

UNIVERSITETI I KOSOVËS — UNIVERZITET KOSOVA

**FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE — NATYRORE
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET**

**BULETINI
ZBORNIK RADOVA**

8

**PRISHTINË — PRIŠTINA
1982**

UNIVERSITETI I KOSOVËS — UNIVERZITET KOSOVA

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE—NATYRORE
PRIODNO MATEMATIČKI FAKULTET

BULETINI ZBORNİK RADOVA

8

PRISHTINË — PRIŠTINA
1982

Këshilli redaktues

Redakcijiški odbor

Dr. Rasim Bejtullahu, Dr. Muharrem Cërabregu
(sekretar); Dr. Emrush Gashi e Dr. Salih Gashi

Kryeredaktor përgjegjës

Glavni i odgovorni urednik

Dr. Emrush Gashi

MATEMATIKË—MATEMATIKA

FUNKSIONET ÇIFT NGA KLASA H_p^ω DHE MODULET E VAZHDUESHMËRISË

M. Berisha, H. Turku.
 R. Kastrati, dhe F. Berisha

HYRJE

Në artikullin [1] shqyrtohet funksioni

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

ndërsa në artikullin [2] shqyrtohet rasti i funksionit çift:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ku koeficientët a_k janë të tillë që

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \dots \geq 0,$$

d.m.th. $a_k \downarrow 0$. Në artikullin [1] jipen konditat e mjaftueshme veçmas prej atyre të nevojshme, të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourier në mënyrë që funksioni të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω . Në artikullin [2] janë dhënë konditat e mjaftueshme dhe të nevojshme, të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourier, në mënyrë që funksionit çift $f(x)$ të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω . Vlerësimet e koeficientëve Fourier të fituara në [2] janë vërtetuar me ndërhyrjen e përafërimit më të mirë $E_n(f)_p$ të funksionit $f(x)$.

Në këtë punim do të tregojmë se mund të vërtetohen pohimet analoge sikurse në artikullin [2] por, në këtë rast në vend të supozimeve suplementare të dhëna por funksionin $\omega(t)$:

$$(1) \quad t \int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du \leq C_1 \omega(t)$$

dhe

$$(2) \quad \int_1^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq C_2 \omega(t)$$

jipen kondita në koeficientët Fourie. Me fjalë tjera, do të vërtetohet pohimi:

Le të jetë $\omega(t)$ — moduli i vazhdueshmërisë dhe funksioni çift periodik me periodë 2π :

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

ku $a_k \downarrow 0$, atëherë konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni $f(x)$ të jetë nga klasa H_p^ω ($1 < p < \infty$) është që koeficientët e tij Fourie të plotësojnë konditat:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p k^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C_1 n \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)^p$$

dhe

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p} \leq C_2 \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$$

§ 1. Shkruajmë së funksioni $f(x) \in L_p$, në qoftë se funksioni periodik $f(x)$ me periodë 2π plotëson konditat:

1. për $1 \leq p < \infty$ është i matshëm dhe

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

2. për $p = \infty$ është i vazhdueshëm dhe

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_x |f(x)|$$

Serinë Fourie të funksionit çift $f(x)$ do ta shkruajmë në formë

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ku

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx$$

Shumën e pjesëshme të serisë Fourie të funksionit çift do ta shënojmë $S_n(x, f)$, d. m. th.

$$S_n(x, f) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx.$$

Me $E_n(f)_p$ shënojmë përafrimin më të mirë të funksionit $f(x)$, në metrikën L_p , me polinomet trigonometrike të rendit jo më të lartë se n , d. m. th.

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \|f(x) - T_n(x)\|_p,$$

ku

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

α_k dhe β_k janë numra real.

Funksionin $\omega(t)$ e quajmë modul të vazhdueshmërisë, në qoftë se ka këto veti:

1. $\omega(t)$ — funksion jozbritës

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$.

3. Në qoftë se n është numër natyral, atëherë:

$$\omega(nt) \leq n \omega(t)$$

4. Në qoftë se λ është çfarëdo numri pozitiv, atëherë:

$$\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1) \omega(t)$$

Si dihet (shih [2], faqe 215), moduli i vazhdueshmërisë së funksionit $f(x) \in L_p$, $p \geq 1$, me periodë 2π , përkufizohet në këtë mënyrë

$$\omega(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right\}^{1/p}$$

Them i se funksioni matshëm periodik $f(x)$, me periodë 2π i takon klasës së funksioneve H_p^ω ($1 \leq p \leq \infty$), në qoftë se:

1. $f(x) \in L_p$

2. $\omega(f, t)_p \leq C \omega(t)$

Që të vërtetohet rezultati themelor në këtë punim është e nevojshme kjo lemë ndihmëse:

Lemë. Le të jetë $f(x) \in L_p$, për p të fiksuar nga intervali $1 < p < \infty$ dhe le të jetë

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ku

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq 0,$$

atëherë vlejné mosbarazimet:

$$A_1 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k^p k^{2p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p} \right\} \leq \omega(f, n^{-1})_p \leq \\ \leq A_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k^p k^{2p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p} \right\}.$$

ku konstantet pozitive A_1 dhe A_2 nuk mvaren prej $f(x)$ dhe n .

Vërtetimi i lemës gjendet në punimin [4], ndërsa vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë nga ana e poshtëme, me ndihmën e koeficientëve Fourier mund të shihet në [5], për rastin kur koeficientë Fourier janë monoton.

§ 2. Teoremë. Le të jetë $\omega(t)$ moduli i vazhdueshmërisë dhe le të jetë

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

një funksion periodik me periodë 2π , $a_k \downarrow 0$, atëherë konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që $f(x) \in H_p^\omega$, ($1 < p < \infty$) është që koeficientët e tij Fourier të plotësojnë konditat:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p k^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C_1 n \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$$

dhe

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p} \leq C_2 \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p.$$

Vërtetim. Nga konditat e dhëne në teoremë dhe nga vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë nga ana e sipërme (shih lemën) rrjedhë së:

$$\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

që do të thotë sipas përkufizimit se $f(x) \in H_p^\omega$.

Në mënyrë analoge, në qoftë se shfrytzojmë konditat e teoremës dhe vlerësimin e modulit të vazhdueshmërisë nga ana e poshtëme (shih lemën), drejtpërdrejtë rrjedhë kondita e nevojshme e teoremës.

LITERATURA

- [1] — M. Berisha, të vlersuarit e koeficientëve Fourie të një funksioni nga klasa H_p^ω . Bul. i pun. shkenc. i FSHMN — Prishtinë, № 5, (1977—1978), (5—12).
- [2] — M. Q. Berisha, Mbi koeficientët Fourie monoton të një funksioni çift nga klasa H_p^ω . Bul. i pun. shkenc. i FSMN — Prishtinë, № 7 (1981—82)
- [3] — Ahiezer N.I. — *Lekcij po teori aproksimaci* — Moskva 1965.
- [4] — M. K. Potapov i M. Berisha — *Moduli glatkosti i koeficienti Fourie periodičeskih funkcij od novo peremenovo*, Publ. Inst. math., 26 (40), 1979). Beograd.
- [5] — S. Aljančić — *On the integral moduli of continuity in L ($1 < p < \infty$) of Fourier series with monotone coefficients*, Proc. Amer. Math. soc. 17 (1966), 287—294.

PARNE FUNKCIJE IZ KLASSE H_p^ω I MODULI GLATKOSTI

M. Berisha, H. Turku,
R. Kastrati, dhe F. Berisha

Sadržaj

U ovom radu su dati potrebni i dovoljni uslovi koje zadovoljavaju Fourier-ovi koeficijenti parne funkcije $f(x)$ da bi ona pripadala klasi funkcija H_p^ω . Napomenemo da je dokaz izveden pomoću dobro poznatih procena modula neprekidnosti.

ЧЁТНЫЙ ФУНКЦИЙ И МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

M. Бериша, Х. Турку,
R. Kastrati, dhe F. Berisha

Резюме

В этой работе доказаны необходимые и достаточные условия, которые удовлетворяют коэффициенты Фурье чётный функций $f(x)$ что бы она принадлежала классу H_p^ω .

Отметим, что в этой работе эти условия доказаны помощью оценки модуля непрерывности.

[illegible]

the 1990s, the number of people in the world who are illiterate has increased from 1.2 billion to 1.5 billion. The number of illiterate people in the world is projected to reach 1.7 billion by the year 2015. The number of illiterate people in the world is projected to reach 1.7 billion by the year 2015.

1. $\frac{1}{2}$

DATE OF BIRTH: 1950-01-01

[illegible]

1000

ZBATIMI I MODULEVE TË VAZHDUESHMËRISË NË VLERËSIMIN E KOEFICIENTËVE FOURIE TË FUNKSIONIT NGA KLASA H_p^ω .

Muharrem Q. Berisha

HYRJE

Në artikullin [1] janë vërtetuar konditat e nevojshme dhe të mjaftueshme në mënyrë që funksioni $f(x)$ të jetë nga klasa H_p^ω , (Teorema 1). Menjëherë duhet cek se këto kondita janë dhënë në terminet e përafërimit më të mirë $E_n(f)$ të funksionit $f(x)$. Në teoremën 2 respektivisht teoremën 3 janë dhënë konditat e mjaftueshme respektivisht konditat e nevojshme të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourie të funksionit $f(x)$, në mënyrë që ai të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω . Me këtë rast ato jipen në termine të koeficientëve Fourie.

Në artikullin [2] vërtetohet teorema 1 e cila jep konditat e mjaftueshme, të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourie, në mënyrë që funksioni $f(x)$ të jetë nga klasa H_p^ω , por për dallim nga teorema 2 në artikullin [1] këtu konditat e mjaftueshme, për vlera të ndryshme të p , jipen jo si më parë në formë shumash, por vetëm në një koeficient. Poashtu në teoremën 2 të artikullit [2] janë dhënë konditat e nevojshme, të cilat duhet plotësuar një koeficient Fourie i funksionit $f(x)$, në mënyrë që ai të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω , por, duke sypozuar që koeficientët të jenë monoton.

Në artikullin [3] shqyrtohet rasti i funksionit çift:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ku koeficientët a_k janë të tillë që

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 0, \quad \text{d. m. th.} \quad a_p \downarrow 0.$$

Në artikujt [1] dhe [2] është shqyrtuar rasti i përgjithshëm:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

dhe janë dhënë konditat e nevojshme, veçmas nga ato të mjaftueshme, ndërsa në artikullin [3] vërtetohen njëherit konditat e nevojshme dhe ako të mjaftueshme për $1 < p < \infty$. Kishte me qenë e arsyeshme të ceket se në artikullin [3] konditat të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourier jipen në formë shumash dhe vetëm në një koeficient.

Vlerësimet e koeficientëve Fourier në artikujt [1], [2] dhe [3] përputhen me rezultatet e fituara në [4], [5] dhe [6], në qoftë se $\omega(t)$ merr vlerën në veçanti $\omega(t) = t^{-r}$.

Vlerësimet e koeficientëve Fourier të fituara në [1], [2] dhe [3] janë vërtetuar me ndërhyrjen e përafrimit më të mirë $E_n(f)_p$ të funksionit $f(x)$. Tërë ato vërtetime dhe veprime kanë kërkuar që për funksionin $\omega(t)$ të bëhen sypozimet suplementare:

$$(1) \quad t \int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du \leq C \omega(t)$$

dne

$$(2) \quad \int_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq C \omega(t).$$

Në këtë artikull do të tregojmë se për disa nga ato pohime në [1] dhe [2] mund të vërtetohen pohime analoge dhe të jipen vlerësime analoge të koeficientëve Fourier të funksionit $f(x)$ të dhënë në formë të përgjithëshme:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

duke shfrytzuar disa rezultate të njohura më parë në lidhje me modulet e vazhdueshmërisë. Kishte me qenë e levërdishme të përmendet se këtu nuk është e nevojshme të vëhen konditat suplementare në lidhje me modulën e vazhdueshmërisë $\omega(t)$. Të përmendim se në këtë rast njera nga konditat e mëposhtëme përputhet me njerën konditë të kërkuar në artikujt [1] dhe [2].

§ 1. Shkruajmë se funksioni $f(x) \in L_p$, në qoftë se funksioni periodik $f(x)$ me periudë 2π plotëson konditat:

1. për $1 \leq p < \infty$ është i matshëm dhe

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

2. për $q = \infty$ është i vazhdueshëm dhe

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_C = \max_x |f(x)|$$

Serinë Fourier të funksionit $f(x)$ zakonisht do ta shkruajmë në formë komplekse:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

ku

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Funksionin $\omega(t)$ e quajmë modul të vazhdueshmërisë në qoftë se ka këto veti:

1. $\omega(t)$ — funksion jo zbritës
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$
3. Në qoftë se n është numër natyral, atëherë:

$$\omega(nt) \leq n \omega(t)$$

4. Në qoftë se λ është çfarëdo numri pozitiv, atëherë

$$\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1) \omega(t).$$

Si që dihet (shih për shembull [7], f. 215) moduli i vazhdueshmërisë së funksionit $f(x) \in L_p$, $p \geq 1$, me periodë 2π , përkufizohet në këtë mënyrë:

$$\omega(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left(\int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Themë se funksioni i matshëm periodik $f(x)$, me periodë 2π i takon klasës së funksioneve H_p^ω ($1 \leq p \leq \infty$) në qoftë se:

1. $f(x) \in L_p$
2. $\omega(f, t)_p \leq C \omega(t)$.

Për vërtetimin e rezultateve themelore në këtë punim është e nevojshme kjo lemë ndihmëse:

Lemë. Le të jetë $f(x) \in L_p$, atëherë për $1 \leq p \leq \infty$ vlejnë këto mosbarazime:

1. për $2 \leq p < \infty$:

$$A_1 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^2 |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \omega(f, n^{-1})_p \leq \\ \leq A_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^p |v|^{2p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^p |v|^{p-2} \right)^{1/p} \right\}.$$

2. për $1 < p \leq 2$

$$A_1 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^p |v|^{2p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^p |v|^{p-2} \right)^{1/p} \right\} \leq \omega(f, n^{-1})_p \leq \\ \leq A_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^2 |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

3. për $p = \infty$:

$$A_1 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^2 |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \omega(f, n^{-1})_{\infty} \leq \\ \leq A_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v| |v| \right) + \sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v| \right\}.$$

4. për $p = 1$:

$$A_1 |c_n| \leq \omega(f, n^{-1})_1 \leq A_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{|v|=1}^n |c_v|^2 |v|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{|v|=n+1}^{\infty} |c_v|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

ku konstantet A_1 dhe A_2 janë të pamvarura prej $f(x)$ dhe n .

Vërtetimi i lehtë gjendet në punimin [8], ndërsa vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë nga ana e poshtëme, me ndihmën e koeficientëve Fourier mund të shihet në [9], për rastin kur koeficientët Fourier janë monoton.

2. Teoremë 1. Që funksioni periodik

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

të jetë nga klasa e funksioneve H_p^{ω} ($1 \leq p \leq \infty$) është e mjaftueshme që koeficientët e tij Fourier të plotësojnë konditat:

$$\text{për } 1 \leq p \leq 2: \begin{cases} \left(\sum_{|k|=1}^n |c_k|^2 |k|^2 \right)^{1/2} \leq C^n \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} \leq C \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

$$\text{për } 2 \leq p < \infty: \begin{cases} \left(\sum_{|k|=1}^n |c_k|^p |k|^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C^n \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^p |k|^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \end{cases}$$

$$\text{për } p = \infty: \begin{cases} \sum_{|k|=1}^n |c_k| |k| \leq C^n \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k| \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \end{cases}$$

Vërtetim: Nga konditat e dhëna në teoremë për $1 \leq p \leq 2$ dhe nga vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë në anën e sipërme (shih lemën e mëparëshme, pjesën e dytë për $1 < p \leq 2$) rrjedhë se:

$$(f, n^{-1})_p \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right),$$

që do të thotë sipas përkufizimit se $f(x) \in H_p^\omega$.

Në mënyrë plotësisht analoge, në qoftë se shfrytzojmë konditat e teoremës për $2 \leq p < \infty$ dhe vlerësimin e modulit të vazhdueshmërisë nga ana e sipërme (shih lemën e mëparëshme, pjesën e parë për $2 \leq p < \infty$), do të fitohet se

$$(f, n^{-1})_p \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Më në fund vërtetimi i teoremës për $p = \infty$ gjithashtu rrjedhë nga vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë (shih lemën në pjesën e tretë për $p = \infty$) dhe nga konditat e teoremës.

Teoremë 2. Konditë e nevojshme që funksioni

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

të jetë nga klasa H_p^ω ($1 \leq p \leq \infty$) është që koeficientët Fourie të tij të plotësojnë konditat:

$$\text{për } 1 \leq p \leq 2: \begin{cases} \left(\sum_{|k|=1}^n |c_k|^p |k|^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C^n \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^p |k|^{2p-2} \right)^{1/p} \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \end{cases}$$

$$\text{për } 2 \leq p < \infty: \begin{cases} \left(\sum_{|k|=1}^n |c_k|^2 |k|^2 \right)^{1/2} \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ \left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) \end{cases}$$

$$\text{për } p=1: |c_n| \leq C \omega \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Vërtetim. Në goftë se shfrytzojmë vlerësimet e modulit të vazhdueshmërisë nga ana e poshtëme (shin lemën për $1 < p \leq 2$ dhe $2 \leq p < \infty$) dhe konditat e teoremës drejtëpërdrejtë rrjedhë vërtetimi i teoremës.

LITERATURA

- [1] — M. Berisha — *Të vlerësuarit e koeficientëve Fourier të një funksioni nga klasa H_p^ω* . Bul. i pun. shkenc. i FSHMN — Prishtinë, № 5, (1977—1978), (5—12).
- [2] — M. Q. Berisha — *Koeficientët Fourier të funksioneve të klasës H_p^ω* . Buletini i pun-shkenc. i FSHMN — Prishtinë, VI, (1979—1980), (5—12).
- [3] — Muharrem Q. Berisha — *Mbi koeficientët Fourier monotoni të një funksioni çift nga klasa H_p^ω* . Bul. i pun. shkenc. i FSHMN — Prishtinë, № 7 (1981—82).
- [4] — A. A. Konjuškov — *O klassah Lipšica*, Izv. AN. SSSR, ser. matem. 21, № 3 (1957), 423—448.
- [5] — Lorentz G. G. — *Fourier koefizienten und funktionen klassen*, Math. Zs. 51, № 2 (1948), 135—149.
- [6] — M. K. Potapov — *O koeficientah Fourier periodičeskikh funkcij, prinalležaščih H — klassam S. M. Nikolskovo*. Dokladi AN. SSSR 1961, Tom 141, № 3 (564—567).
- [7] — Ahiezer N. I. — *Lekcij po teorii aproksimaci* — Nauka — 1965.
- [8] — K. M. Potapov i M. Berisha — *Moduli glatkosti i koeficienti Fourier periodičeskikh funkcij odnovo peremenovo*, Publ. Inst. math., 26 (40) (1979). Beograd.
- [9] — S. Aljančić — *On the integral moduli of continuity in L ($1 < p < \infty$) of Fourier series with monotone coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 287 — 294.

PRIMENA MODULA NEPREKIDNOSTI ZA PROCENU FOURIER — OVIH KOEFICIJENATA FUNKCIJE KLASSE H_p^ω .

Muharrem Q. Berisha

Summary

U ovom radu su dati dovoljni (teorema 1) i potrebni (teorema 2) uslovi koje zadovoljavaju Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f(x)$ da bi ona pripadala klasi H_p^ω . Teoreme su dokazane pomoću već poznatih procena o modulima glatkosti.

МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ
ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ
 H_p^ω — КЛАССАМ

Мухарем Ч. Бериша

Резюме

В этой работе доказаны достаточные условия (теорема 1) и необходимые условия (теорема 2), которые удовлетворяют коэффициенты Фурье функций $f(x)$ чтобы она принадлежала классу H_p^ω .

Отметим, что в этой работе эти условия доказаны помощью оценки модуля непрерывности.

THE UNITED STATES OF AMERICA
DEPARTMENT OF THE INTERIOR
BUREAU OF LAND MANAGEMENT

Wash. D. C. 20250

June 1, 1964

Mr. J. W. [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

MBI MODULET E VAZHDUESHMËRISË DHE KOEFICIENTET FOURIE TË SERIVE LAKUNARE NË H_p^ω

Muharrem Berisha dhe Ruzhdi Kastrati

HYRJE

Në artikullin [1] janë vërtetuar konditat e nevojshme dhe të mjaftueshme në mënyrë që funksioni $f(x)$ të jetë nga klasa H_p^ω (teorema 1). Menjherë duhet cek se këto kondita janë dhënë në terminet e përafritmit më të mirë $E_n(f)$ të funksionit $f(x)$. Në teoremën 2 respektivisht teoremën 3 janë dhënë konditat e nevojshme dhe të mjaftueshme të cilat duhet plotësuar koeficientët Furie të funksionit $f(x)$, në mënyrë që ai të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω . Me këtë rast ato jipen në termine të koeficientëve Fourie.

Në artikullin [2] vërtetohet teorema 1 e cila jep konditat e mjaftueshme, të cilat duhet plotësuar koeficientët Fourie, në mënyrë që funksioni $f(x)$ të jetë nga klasa H_p^ω , por për dallim nga teorema 2 në artikullin [1] këtu konditat e mjaftueshme, për vlera të ndryshme të p -së jipen jo si më parë në formë shumash por vetëm në një koeficient. Poashtu në teoremën 2 të artikullit [2] janë dhënë konditat e nevojshme, të cilat duhet plotësuar një koeficient Fourie i funksionit $f(x)$, në mënyrë që ai të jetë nga klasa e funksioneve H_p^ω , duke supozuar që koeficientët të jenë monoton.

Në artikullin [3] shqyrtohet rasti i funksionit çift:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

ku koeficientët a_k janë të tillë që:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 0, \quad \text{d.m.th.}$$

$$a_k \downarrow 0.$$

Në artikujt [1] dhe [2] është shqyrtuar rasti i përgjithshëm:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

dhe janë dhënë konditat e nevojshme, veçmas nga ato të mjaftueshme, ndërsa në artikullin [3] vërtetohen njëherit konditat e nevojshme dhe ato të mjaftueshme për $1 < p < \infty$.

Vlerësimet e koeficientëve Fourie në artikujt [1], [2], dhe [3] përpunohen me rezultatet e fituara në [4], [5] dhe [6], në qoftë se $\omega(t)$ merrë vlerën në veçanti $\omega(t) = t^{-r}$.

Vlerësimet e koeficientëve Furie të fituara në [1], [2] dhe [3] janë vertetuar me ndërhyrjen e përafrimit më të mirë $E_n(f)$ të funksionit $f(x)$. Të gjitha ato vërtetime dhe veprime kanë kërkuar që për funksionim $\omega(t)$ të bëhen supozime suplementare:

$$(1) \quad t \int_1^t \frac{\omega(u)}{u^2} du \leq C \omega(t) \quad \text{dhe}$$

$$(2) \quad \int_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq C \omega(t).$$

Në këtë punim shqyrtohet moduli i vazhdueshmërisë me vetitë e tij, vargjet lakunare dhe serit Fourie — lakunare.

Sikurse në punimet e mëparëshme [1], [2] — [6] edhe këtu jepen vlerësime të koeficientëve Fourie të funksionit $f(x) \in H_p^\omega$ i cili ka serinë Furie lakunare:

$$f(x) \sim \sum_{v=1}^{\infty} b_v \cos vx \quad \text{me koeficiente}$$

$$b_v = \begin{cases} a_m > 0 & \text{për } v = 2^m \\ 0 & \text{për } v \neq 2^m \end{cases}, \quad m \in N.$$

Duke shfrytëzuar rezultatet e njohura më parë në punimet [1] — [6], këtu do të jipet Teorema 3 e cila na jep konditat e nevojshme dhe të mjaftueshme që duhet ti plotësojnë koeficientët Furie b_v në mënyrë që $f(x) \in H_p^\omega$ ku $1 \leq p < +\infty$.

& 1. Shkruajmë se $f(x) \in L_p$, nëqoftëse funksioni periodik $f(x)$ me periudë 2π plotëson konditat:

1. Për $1 \leq p < \infty$ është i matëshëm dhe

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

2. Për $p = \infty$ është i vazhdueshëm dhe:

$$\|f\| = \|f\|_C = \max_x f(x).$$

Serinë Furie të funksionit $f(x)$ zakonisht do t'a shkruajmë në trajtë komplekse:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \text{ ku}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) e^{-ikt}) dt$$

Themi se funksioni i matëshëm periodik $f(x)$, me periodë 2π i takon klasës së funksionëve H_p^ω ($1 \leq p \leq \infty$) në qoftë se:

1. $f(x) \in L_p$
2. $\omega(f, t)_p \leq C \omega(t)$.

&2 Moduli i vazhdueshmërisë

Përkufizim: Le të jetë $f(x)$ funksion i përcaktuar në $[a, b]$ dhe $\delta > 0$ (madhësi e çfarëdoshme pozitive). Për çfarëdo dy pika $x, y \in [a, b]$ ku $|x - y| \leq \delta$ shqyrtojmë diferencën $|f(y) - f(x)|$ (1)

Kufiri i përpikët i sipërm i diferencës (1) quhet moduli i vazhdueshmërisë i $f(x)$ dhe shenohet:

$$\omega(\delta, a, b, f) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)|.$$

Për funksionin e vazhdueshëm $f(x) \in C_{[0, 2\pi]}$ ku:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \text{ moduli i vazhdueshmërisë shenohet } \omega(\delta, f).$$

Pohim: Nëse funksioni $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, ku $f_1(x)$ dhe $f_2(x)$ janë funksione të vazhdueshme, atëherë vlen

$$\omega(\delta, f_1 + f_2) \leq \omega(\delta, f_1) + \omega(\delta, f_2).$$

Vërtetimi: Sipas përkufizimit kemi

$$\begin{aligned} \omega(\delta, f_1 + f_2) &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |(f_1 + f_2)(y) - (f_1 + f_2)(x)| \\ &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |f_1(y) - f_1(x) + f_2(y) - f_2(x)| \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \delta} |f_1(y) - f_1(x)| + \sup_{|x-y| \leq \delta} |f_2(y) - f_2(x)| \\ &= \omega(\delta, f_1) + \omega(\delta, f_2). \end{aligned}$$

Të përmendim disa veti të modulit të vazhdueshmërisë:

VETIA I^{re}: $\omega(\delta)$ është monotono rritës (jo zvogluës).

Vërtetimi: Nëse $0 < \delta_1 > \delta_2$ atëherë bashkësia e çifteve (x, y) që plotëson konditën $|x - y| \leq \delta_2$ është më e gjërë se bashkësia (x, y) që plotëson konditën $|x - y| \leq \delta_1$. Dimë se me zgjerimin e bashkësisë numerike, kufiri i sipërm (i përpikëti) vetëm mund të rritet, prandaj

$$\sup_{|x-y| \leq \delta_1} |f(y) - f(x)| < \sup_{|x-y| \leq \delta_2} |f(y) - f(x)|$$

$$\omega(\delta_1) < \omega(\delta_2).$$

VETIA II^{re}. Që funksioni $f(x)$ të jetë uniformisht i vazhdueshëm në segmentin $[a, b]$, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$$

Vetia është vetvetiu e qartë.

VETIA III^{re}. Për $n \in \mathbb{N}$ ka vend mosbarazimi:

$$\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta).$$

Vërtetimi: Le të jletë $|x - y| < n\delta$. Segmentin $[x, y]$ e ndajmë në n -pjesë të barabarta me pikat

$$Z_i = x + \frac{i}{n}(y - x), \text{ ku } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(Z_{i+1}) - f(Z_i)]$$

$$|Z_{i+1} - Z_i| \leq \delta \Rightarrow |f(Z_{i+1}) - f(Z_i)| \leq \omega(\delta).$$

$$|f(y) - f(x)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(Z_{i+1}) - f(Z_i)| \leq \omega(\delta) + \omega(\delta) + \dots + \omega(\delta) \quad x, y \in [a, b].$$

$$\sup_{|x-y| \leq n\delta} |f(y) - f(x)| \leq n\omega(\delta), \text{ ose } \omega(\delta) \leq n\omega(\delta).$$

VETIA IV^{re}. Për çfarde $\lambda > 0$ vlen: $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.

Vërtetimi: Marrim që $n \leq \lambda \leq n+1$, atëherë në bazë të vetisë III^{re}: $\omega(\lambda\delta) \leq \omega((n+1)\delta) \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$.

Përkufizim: Nëse $f(x)$, i përkufizuar në $[a, b]$ plotëson mosbarazimin $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha$, atëherë themi se $f(x)$ plotëson konditën e LIPCHIZIT dhe shënohet $f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha$.

VETIA V^{re}. Nga $f(x) \in \text{Lip}_M^\alpha$: $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M|y - x|^{\alpha-1}$; $f(x) = C$ (konstant).

Vërtetimi. Kur $\delta \rightarrow 0$ është qartë se ana e majtë është derivati i funksionit në pikën x , pra $f'(x) = C$.

VI^{te}. Nëse $f(x)$ është funksion i përcaktuar në (α, β) ku $(\alpha, \beta) \supset [a, b]$ dhe $\alpha < \beta$ atëherë: $\text{Lip } \alpha \supset \text{Lip } \beta$.

Vërtetimi. Le të jetë $f(x) \in \text{Lip } \beta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq B|y - x|$.

(a) nëse $|y - x| < 1$, kemi:

$$|f(y) - f(x)| \leq B|y - x|^\beta \leq |y - x|^\alpha \cdot B \Rightarrow f(x) \in \text{Lip } \alpha;$$

(b) nëse $|y - x| \geq 1$:

$$|f(y) - f(x)| \leq B|y - x|^\beta \leq |f(y) + f(x)| \cdot |y - x|^\alpha \Rightarrow f(x) \in \text{Lip } \alpha.$$

VII^{te}. Për $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$, vlen $\omega(\delta) \leq M\delta^\alpha$

Vërtetimi: Nëse $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha$, ku $|y - x| \leq \delta$ gjegjësisht $|f(y) - f(x)| \leq M\delta^\alpha$ për çdo $x, y \in [a, b] \Rightarrow$

$$\sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| \leq M\delta^\alpha \Rightarrow \omega(\delta) \leq M\delta^\alpha.$$

$$\Leftarrow: \omega(\delta) \leq M\delta^\alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq M\delta^\alpha, \quad \forall x, y \Rightarrow$$

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha \Rightarrow f(x) \in \text{Lip}_M \alpha.$$

§ 3. Vargjet lakunare dhe seritë lakunare

Përkufizim. Vargu $\{n_k\}$ i numrave natyral, ku $k = 1, 2, \dots, n$ quhet lakunar nëse plotëson konditën:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Po i cekin disa veti të këtyre vargjeve.

1. Mund të zgjedhim ϵ të tillë që për $\epsilon < \frac{\lambda - 1}{2(\lambda + 1)}$, të tillë që intervalet: $\Delta_k = (n_k(1 - 2\epsilon), n_k(1 + 2\epsilon))$ të jenë të pambuluara.

2. Për vlera të çfarëdoshme të μ , ku $\mu \leq \lambda'$, vargu lakunar mund të zbërthehet në numër të fundëm vargjesh lakunare të shkallës jo më të vogël se μ .

3. Çdo varg lakunar $\{n_k\}$ plotëson konditën (B_2) ku

$$(B_2) \begin{cases} n = n_k + n_j \\ n = n_k - n_j, \end{cases}$$

Ne relacionin (B_2) , n_k dhe n_j janë anëtarët e vargut $\{n_k\}$.

4. Në qoftë se: $l_1 > l_2 > l_3 > \dots > l_p$ ku l_i janë numra — anëtarë të vargut lakunar $\{n_k\}$ ku $\lambda \geq 2$, atëherë çdo numër v i trajtës:

$$v = l_1 \pm l_2 \pm l_3 \pm \dots \pm l_p,$$

i përket intervalit:

$$\left(l_1 \frac{\lambda-2}{\lambda-1}, l_1 \frac{\lambda}{\lambda-1} \right).$$

5. Për r numër të çfardoshëm dhe $\lambda > r+1$, paraqitja e numrit

$$n = a_1 n_{k_1} + a_2 n_{k_2} + \dots \text{ ku } a_1, a_2, \dots \in N$$

është e vetme dhe nuk e tejkalon r në dhe: $n_{k_1} > n_{k_2} > \dots$

Përkufizim. Seria trigonometrike quhet **SERI LAKUNARE**, nëse është e trajtës:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x), \text{ ku}$$

numrat natural n_k e plotësojnë konditen:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Teorema: 1. Nëqoftë se për serinë lakunare:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \text{ kemi:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

atëherë seria konvergjon pothuajse kudo, përndryshe seria është divergjente pothuajse kudo.

Vërtetimi: Nëse $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$ atëherë sipas teoremës së ZYG-

MUNDIT, (shih [7] faqe 684) seria lakunare është e shumueshme me metoden T^* (metoda e TIPLICËS). Seria e tillë është seri Furie — lakunare dhe konvergjon pothuajse kudo në E me masë pozitive.

Nëqoftë se $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = +\infty$ në bashkësinë E me $mE > 0$, atëherë seria lakunare nuk është e shumueshme me metodën T^* . Prandaj seria nuk është seri Furie dhe ajo divergjon pothuajse kudo.

Teorema 2. Që funksioni $f(x)$ për të cilin seria Fourie paraqitet si seri lakunare t'i takojë klasës $\text{Lip } \alpha$, ($0 < \alpha < 1$) është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientët Furie të jenë të kufizuar.

Kondita e nevojshme:

Për serinë Fourier kanë vend këto mosbarazime:

$$|a_n| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ dhe } |b_n| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Me që funksioni plotëson konditen e Lipshiz-it atëherë:

$$\omega(\delta) = O(\delta^\alpha), \text{ prandaj}$$

$$a_n = O(n^{-\alpha}) \text{ dhe } b_n = O(n^{-\alpha}).$$

Kondita e mjaftueshme: Le të jetë:

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ ku a_k, b_k plotësojnë konditat e teoremës (janë të kufizuar). Sipas teoremës së Zugmundit seria $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ është uniformisht konvergjente, prandaj:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k (a_k \cos n_k (x+h) - \cos n_k x)] + \\ &+ \beta_k [\sin n_k (x+h) - \sin n_k x]. \end{aligned}$$

Nga se $\frac{1}{n_{N+1}} \leq \frac{1}{n_N}$, rrjedhë se seria është lakunare; Vertetohet lehtë se $f(x)$ është nga Lip α .

Që të vërtetohet teorema në paragrafin e arëdhëshëm është e nevojshme kjo lemë:

Lemë. Në qoftë se $f(x) \sim \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos 2^v x$ ($1 < p < \infty$) atëherë egzistojnë konstantat C_1 dhe C_2 të pavarura prej $f(x)$ dhe n , të tilla që të vlejë mosbarazimi:

$$\begin{aligned} C_1 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{v=1}^n a_v^2 v^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} a_v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} &\leq \\ \leq \omega(f, n^{-1})_p &\leq C_2 \left\{ n^{-1} \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 v^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} a_v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Vertetimi i lemës gjendet në punimin [8].

§4. Theoreme 3. Që funksioni: $f(x) \sim \sum_{v=1}^{\infty} b_v \cos vx$ me koeficiente:

$$b_v = \begin{cases} a_m > 0 & \text{për } v = 2^m \\ 0 & \text{për } v \neq 2^m \end{cases} \quad m - \text{numër natural}$$

të jetë nga klasa: H_p^{ω} ($1 < p < \infty$), është e nevojshme dhe e mjaftueshme që koeficientet e tij Furie të plotësojnë konditat:

$$\left(\sum_{v=1}^n b_v^2 v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C n \omega\left(\frac{1}{n}\right) \text{ dhe}$$

$$\left(\sum_{v=n+1}^{\infty} b_v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Vertetimi. Për seritë lakunare vlen vlerësimi i modulit të vazhdueshmërisë (lema e mëparëshme), prandaj:

$$C_1 \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{v=1}^n b_v^2 v^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} b_v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq C_2 \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{v=1}^n b_v^2 v^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{v=n+1}^{\infty} b_v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Kondita e mjaftueshme: Në qoftë se shfrytëzohen konditat e teoremës dhe zbatohet vlerësimi i anës së djathtë të mosbarazimit të fundit, atëherë drejtpërdrejtë rrjedhë mjaftueshmëria e teoremës.

Kondita e nevojshme: Në qoftë se shfrytëzohen konditat e teoremës dhe zbatohet vlerësimi i anës së majtë të mosbarazimit të fundit, atëherë drejtpërdrejtë rrjedhë nevojshmëria.

LITERATURA

[1] Berisha — Të vlerësuarit e koeficientëve Furie të një funksioni nga klasa H_p^{ω} . Buletini i pun. shkenc. i FSHMN — Prishtinë, № 5, (1977—1978), (5—12).

[2] M. Q. Berisha — Koeficientët Furie të funksioneve të klasës H_p^{ω} . Bul. i pun. shkenc. i FSHNM — Prishtinë (1979).

[2] M. Q. Berisha — Mbi koeficientët Furie monoton të një funksioni çift nga klasa H_p^{ω} . Bul. i pun. shkenc. i FSHMN — Prishtinë, № 7 (1981—1982).

[4] A. A. Konjuskov — *O klassah Lipsica*, A. N. SSSR, ser. mat. 21, № 3 (1957) 423—448.

[5] Lorentz G. G. — *Fourier koeficienten und funktionen klasen*, math; Zs. 51, № 2 (1957) (135—148).

[6] M. K. Patapov — *o koeficientah Fourie periodiceskih funkcij prinadlezaschih H — klassam* S. M. Nikolskovo. *Dekladi AN. SSSR* 1961, Tom 141, № 3 (654—667).

[7] N. K. Bari — *Trigonometricheski rjadi* — Moskva (1961).

[8] M. K. Potapov i M. Berisha — *Moduli gladkosti i koeficienti Forie periodiceskih funkcij od novo peremenovo*, pub. Inst. math., 26 (40) 1979 Beograd.

O MODULIMA NEPREKIDNOSTI I PROCENA FURIEROVIH KOEFICIENATA LAKUNARNIH RADOVA U H_p^ω .

Muharrem Berisha i Ruzhdi Kastrati

Sadržaj

U ovom radu ispitali smo modul neprekidnosti sa svojim osobinama i lakunarne nizove i lakunarni red.

Data je procena Furierovih koeficienata funkcija $f(x) \in H_p^\omega$ lakunarnih redova.

Dati su potrebni i dovoljni uslovi koji treba ispuniti funkcija $f(x) = \sum_{\delta=1}^{\infty} b_\nu \cos \nu x$ sa koeficientima:

$$b_\nu = \begin{cases} a_m > 0 & \text{za } \nu = 2^m \\ 0 & \text{za } \nu \neq 2^m. \end{cases} \quad m \in N,$$

da bi $f(x) \in H_p^\omega$.

МОДУЛ НЕПРЕРЫВНОСТИ И КОЭФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ЛАКУНАРНЫХ РЯДИ В H_p^ω — КЛАССАМ

Мухарем Ч. Берisha и Ружди Кастраити

Резюме

В этой работе доказаны достаточные и необходимые условия, которые удовлетворяют коэффициенты Фурье функций $f(x)$ с лакунарным рядом, чтобы она принадлежала классу H_p^ω .

O MATRIČNOJ TRIANGULACIJI OPERATORA KLASSE

$$\mathcal{C}_\rho, \rho > 0$$

Fehim Dedagić

Abstract

Posmatramo ograničene linearne operatore u kompleksnom separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, koji poseduju unitarnu dilataciju. Specijalno operatori klase $\mathcal{C}_\rho$ ($\rho > 0$), zahvaljujući svom asimptotskom ponašanju, mogu se predstaviti u obliku trougaone matrice. U [1] dokazana je tačnost operatora T klase $\mathcal{C}_\rho$ i kontrakcije V ($\|V\| \leq 1$). U ovom radu ćemo pokazati da svaki operator klase $\mathcal{C}_\rho$ ($\rho > 0$) ima triangulaciju oblika

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp)$$

gde je $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, $B: \mathcal{H}_1^\perp \rightarrow \mathcal{H}_1$ i $C: \mathcal{H}_1^\perp \rightarrow \mathcal{H}_1^\perp$ i razmotrićemo neke posledice te triangulacije.

1. Definicija: Kažemo da ograničeni linearni operator u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ($T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$) pripada klasi $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$, ako postoji unitarni operator U u Hilbertovom prostoru $\mathcal{R} \supset \mathcal{H}$, takav da je

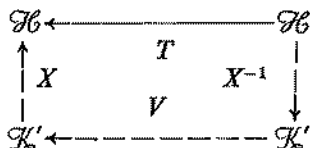
$$T^n = \rho P_{\mathcal{H}} U^n, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Operator U je unitarna ρ -dilatacija operatora T , $P_{\mathcal{H}}$ je ortoprojektor iz $\mathcal{R}$ na $\mathcal{H}$.

Primetimo da ako T pripada klasi $\mathcal{C}_\rho$, iz (1) sledi da je $\|T^n\| \leq \rho$, tj. T je stepeno ograničen. Klasa $\mathcal{C}_1$ poklapa se sa klasom svih kontrakcija Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$. Operatori ostalih klasa $\mathcal{C}_\rho$, $\rho \neq 1$ „blizu“ su kontrakcijama. To je posledica sledećeg tvrdena:

Teorema A. (U [1] Teor. 8.1.II) Neka je $T \in \mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$ tada postoji $V \in \mathcal{C}_1$ i afinitet X (tj. uzajamno jednoznačno i uzajamno neprekidno linearno preslikavanje) tako da je $T = XVX^{-1}$.

Koristeći oznake kao u [3], prethodno tvrđenje možemo ilustrovati dijagramom



Na osnovu asimptotskog ponašanja kontrakcija uvedene su klase $\mathcal{C}_i$ i $\mathcal{C}_i^*$, $i \in \{1, 0\}$ ([1] p.4.II), koristeći prethodni rezultat u klasi $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$ identifikovaćemo sledeće podklase:

- (a) T pripada klasi $\mathcal{C}_{0,0}^*$, ako $T^n h \rightarrow 0$ za svako $h \in \mathcal{H}$;
- (c) T pripada klasi $\mathcal{C}_{1,0}^*$, ako $T^n h \rightarrow 0$ ni za jedno $h \neq 0$ iz $\mathcal{H}$;
- (c) T pripada klasi $\mathcal{C}_{0,0}^*$, ako $T^{*-n} h \rightarrow 0$ za svako $h \in \mathcal{H}$ i

(d) T pripada klasi $\mathcal{C}_{1,1}^*$, ako $T^{*-n} h \rightarrow 0$ ni za jedno $h \neq 0$ iz $\mathcal{H}$. Zaista, neka je V kontrakcija iz klase $\mathcal{C}_{0,0}$ i neka je X afinitet iz Teoreme A, tada je za svako $h \neq 0$ iz $\mathcal{H}$ $X^{-1} h \neq 0$ i $V^n(X^{-1} h) \rightarrow 0$, a kako je $T^n = XV^nX^{-1}$, to je $\|T^n h\| \leq \|X\| \|V^n(X^{-1} h)\|$ dakle $T \in \mathcal{C}_{0,0}^*$. Neka je sad $V \in \mathcal{C}_{1,1}$ i h bilo koji nenula element iz $\mathcal{H}$, pošto je X afinitet to je $X^{-1}h \neq X^{-1}0 = 0$, pa kada $n \rightarrow \infty$, $V^n(X^{-1}h) \rightarrow 0$. Iz $T^n = XV^nX^{-1}$ sledi $X^{-1}T^n = V^nX^{-1}$, odnosno $\|X^{-1}\| \|T^n h\| \geq \|X^{-1}(T^n h)\| = \|V^n X^{-1} h\| = \delta$ odakle je $\|T^n h\| \geq \frac{\delta}{\|X^{-1}\|}$, pa $T^n h \rightarrow 0$ ni za jedno $h \neq 0$ iz $\mathcal{H}$, dakle

$T \in \mathcal{C}_{1,1}^*$. Slično se mogu identifikovati i ostale podklase, jedino je razlika što je T^* adjungovani operator operatora T .

2. Neka je T ograničeni linearni operator u separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, koji pripada nekoj klasi $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$. Stavimo:

$$\mathcal{H}_1 = \{h \in \mathcal{H} : T^n h \rightarrow 0\}. \quad (2)$$

Ako su h_1 i h_2 iz $\mathcal{H}_1$, tada $T^n(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha T^n h_1 + \beta T^n h_2 \rightarrow 0$, kada $n \rightarrow \infty$, povlači da je $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{H}_1$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Neka je h_0 tačka nagomilavanja skupa $\mathcal{H}_1$, tada postoji niz (h_k) u $\mathcal{H}_1$ takav da $h_k \rightarrow h_0$ $k \rightarrow \infty$. Pošto je $T^n h_0 = T^n h_0 = T^n(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T^n h_k) \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, sledi da $h_0 \in \mathcal{H}_1$. Prema tome $\mathcal{H}_1$ je podprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$; još više $T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, pa je $\mathcal{H}_1$ invarijantan u odnosu na T . Stavimo $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$. Razlaganje u ortogonalnu sumu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ inducira triangulaciju:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \text{ gde je } T_i = P_i T|_{\mathcal{H}_i}, \quad i = 1, 2, \text{ a } P_i$$

su ortoprojekti na $\mathcal{H}_1$; T_1 operator u $\mathcal{H}_1$, T_2 operator u $\mathcal{H}_2$, a $T_0: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, još više $T_1 \in \mathcal{C}_0^p$ i $T_2 \in \mathcal{C}_1^p$.

Prostor $\mathcal{H}_1$ je invarijantan u odnosu na T , pa je $P_1 T = T P_1$, (za $h_1 \in \mathcal{H}_1$ je $T P_1 h_1 = T h_1 = h$; $P_1 T h_1 = P_1 h = h$). Dakle, $T_1^n = T^n|_{\mathcal{H}_1}$, pa $T_1 \in \mathcal{C}_0^p$, po definiciji (2). Pokažimo da $T_2 \in \mathcal{C}_1^p$.

Prema propoziciji 3.1.II iz [1], za svako $h \in \mathcal{H}$, važi:

$$Qh = \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-n} T^n h \quad (3)$$

gde je Q ortoprojektor $P_{\mathcal{H}_*}$. Iz (3), za celobrojno $m \geq 0$ i h iz $\mathcal{H}$ ($h = h_1 + h_2$, $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$; $Ph = P_1 h_1 + P_2 h_2$), imamo:

$$\begin{aligned} Qh &= \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-(m+1)} T^{m+1} h = \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-m} U^{-1} T^n (P_2 T^n h) + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-(m+1)} T^n h = U^{-m} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} U^{-1} T^n P_2 T^n h \right) = \\ &= U^{-m} Q P_2 T^m h, \text{ odakle je} \end{aligned}$$

$$\|Qh\| = \|U^{-m} P_2 T^m h\| \leq \|P_2 T^m h\|, \quad h \in \mathcal{H}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Nejednakost (4) pokazuje da ako je za neko h iz $\mathcal{H}$, $h \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_2 T^n h = 0$, tada je $Qh = 0$, a na osnovu Propoz. 3.1.II u [1] tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n h = 0$,

dakle $h \in \mathcal{H}_1$. Kako je $T_2^m = P_2 T^m|_{\mathcal{H}_2}$, jer operatori T i P_2 komutiraju — to ne postoji $h \neq 0$ u $\mathcal{H}_2$ takvo da $T_2^m h \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, prema tome $T_2 \in \mathcal{C}_1^p$. Ovim smo pokazali da svaki operator T klase $\mathcal{C}_p$ ima triangulaciju

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

gde je $T_1 \in \mathcal{C}_0^p$, a $T_2 \in \mathcal{C}_1^p$.

Trangulacija (5) je jedinstvena. Zaista, neka je

$$T = \begin{bmatrix} T'_1 & T'_0 \\ 0 & T'_2 \end{bmatrix}, \text{ gde je } T'_1 = P'_1 T|_{\mathcal{H}_1}, \text{ a}$$

$T'_2 = P'_2 T|_{\mathcal{H}_2}$, ($\mathcal{H} = \mathcal{H}'_1 \oplus \mathcal{H}'_2$). Ako $h \in \mathcal{H}'_1$ tada je $T^n h = T'^n_1 h$ i kada $n \rightarrow \infty$, $T^n h \rightarrow 0$ znači $h \in \mathcal{H}_1$, pa je $\mathcal{H}'_1 \subset \mathcal{H}_1$. Ako $h \in \mathcal{H}'_2 \ominus \mathcal{H}'_1$, tada $T^n h \rightarrow 0$ sa druge strane je $P_2 T^n h = T'^n_2 h$ (jer $h \in \mathcal{H}_2$), pa $T'^n_2 h \rightarrow 0$ povlači $h = 0$, jer $T'_2 \in \mathcal{C}_1^p$. $\mathcal{H}'_1 - \mathcal{H}_1 = \{0\}$, sledi $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1$.

3. Zahvaljujući triangulaciji (5) operatora $T \in \mathcal{C}_p$, $p > 0$, u mogućnosti smo da invertibilnost operatora $T \in \mathcal{C}_p$ vezemo za invertibilnost operatora $T_1 \in \mathcal{C}_0^p$ i $T_2 \in \mathcal{C}_1^p$. Tako npr. ako su operatori T_1 i T_2 iz (5)

invertibilni tada je operator T invertibilan ([2] Problem 57.). Obrnuto tvrđenje nije uvek tačno, ali uz neke dodatne pretpostavke — tačno je.

Primer: neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{H}_1$ podprostor kao u (2), ali konačne dimenzije. Tada ako je T invertibilan invertibilni su i operatori T_1 i T_2 . Pre nego što pokažemo primerima da konačnodimenzijski prostor $\mathcal{H}_1$ invarijantan u odnosu na invertibilan operator T — invarijantan je i u odnosu na operator T^{-1} . Zaista, T čuva linearnu nezavisnost u $\mathcal{H}_1$ (jer je invertibilan), pa $T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ povlači $\dim T\mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_1$, a kako je $\dim \mathcal{H}_1 < \infty$ to je $T\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$, odnosno $\mathcal{H}_1 = T^{-1}\mathcal{H}_1$. Neka je data triangulacija (5), tada je:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T'_1 & T'_0 \\ 0 & T'_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

jer inverzna matrica trougaone matrice je trougaona matrica. Ako izmnožimo matrice (5) i (6) u oba poretka, dobijamo da $TT^{-1} = I$ i $T^{-1}T = I$ povlači $T_1 T'_1 = I$ i $T'_1 T_1 = I$, odakle $T'_1 = T_1^{-1}$, odnosno $T_2 T'_2 = I$, $T'_2 T_2 = I$ odakle je $T'_2 = T_2^{-1}$.

Triangulacija (5) povlači da je $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$, gde je $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C}: (Iz - T)^{-1} \text{ postoji}\}$.

LITERATURA

- [1] Sekefalvi-Nadj B., Fojaš Č. *Garmoniĉeskiĭ analiz operatorov v gilbertovom prostranstve*, Moskva 1970.
- [2] Halmos R. P. *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand (Princeton 1967).
- [3] Dedagić F. *Izotermijske i unitarne dilatacije kontrakcije* (magistarski rad), Priština, 1980.

ON THE TRIANGULATION MATRIY OF OPERATORS CLASS $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$

Dedagić Fehim

Summary

In this paper is given an triangulation martix of operotors clas $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$ and some consequences this decomposition.

MBI MATRICAT TRIENGULARE TË OPERATORËVE TË KLASËS $\mathcal{C}_\rho$, $\rho > 0$

Fehim Dedagiqi

Rezime

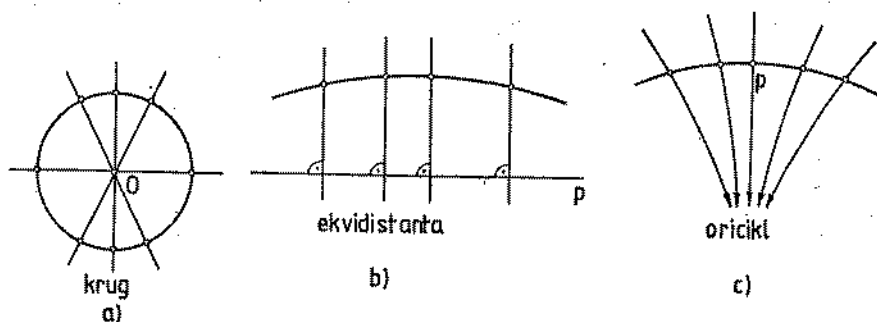
Në këtë punim është treguar se operatori linear i kufizuar në hapësirën separabile të Hilbertit i cili ka ρ — dilatacion, dmth. i cili i takon klasës $\mathcal{C}_\rho$ ka triangulacion matricor te trajtës (5)

EPICKLI HIPERBOLIČKE RAVNI I NJIHOVA „PARALELNOST“

Čemal Dolićanin

U ovom radu ćemo istaći neke osobine epicikala krivih svojstvenih hiperboličkoj ravni, u vezi sa definicijom međusobne „paralelnosti“. Polazeći od definicije „paralelnih“ oricikala date u [1] i nekih osobina, izabraćemo drugu definiciju ekvivalentnu ovoj definiciji, i „paralelnost“ proširujemo na sve epicikle. Takođe biće istaknuto da je relacija „paralelnost“ epicikala; relacija ekvivalencije, kao i da važi teorema: Kroz ma koju tačku $A_1 \in a$ prolazi jedan i samo jedan epicikal O_1 paralelan epiciklu O čija je osa a .

Poznato je da u hiperboličkoj ravni postoje tri tipa pramenova pravih;



SLIKA 1

1) eliptički (centralni) pramen — skup pravih ravni koje prolaze kroz tačku O (sl. 1a);

2) hiperbolički pramen — skup pravih ravni koje su normalne na neku pravu p , pri čemu pravu p zovemo osnovom tog pramena (sl. 1b);

3) parabolički pramen — skup pravih u ravni paralelnih datoj pravoj p u jednom te istom smeru (sl. 1c).

Definicija 1. Pramen pravih hiperboličke ravni zovemo *potpunim* ako kroz svaku tačku ravni prolazi prava tog pramena.

Sobzirom da za sva tri gore navedena pramena važi da kroz svaku tačku ravni prolazi jedna i samo jedna prava odgovarajućeg pramena možemo formulisati teoremu:

Teorema 1. Eliptički, hiperbolički i parabolički pramen pravih su potpuni.

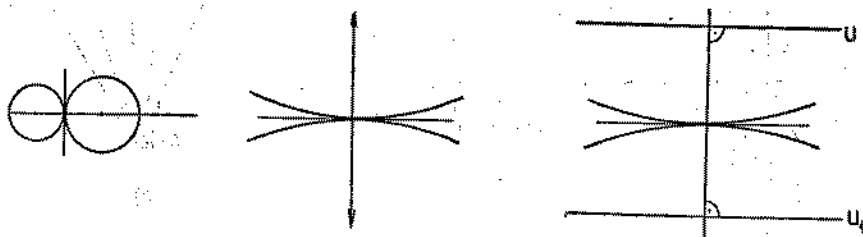
Definicija 2. Epicikl je ortogonalna trajektorija potpunog pramena pravih hiperboličke ravni. Prave pramena su ose epicikla. Ako je pramen eliptičan epicikl se naziva krug; ako je pramen hiperbolički epicikl se naziva ekvidistanta, a ako je, pramen parabolički epicikl se naziva oricikl (sl. 1)

Definicija 3. Za dva epicikla kažemo da se dodiruju ako imaju samo jednu zajedničku tačku.

Očigledno da važi teorema:

Teorema 2. Ako se dva epicikla istoga tipa dodiruju, oni imaju jedino u dodirnoj tački ose koje pripadaju jednoj istoj pravoj (sl. 2).

Teorema 3. Dva epicikla istog tipa se seku u najviše dve zajedničke tačke. Tada je simetrala duži određena presečnim tačkama jedna prava kojoj pripadaju ose oba oricikla.



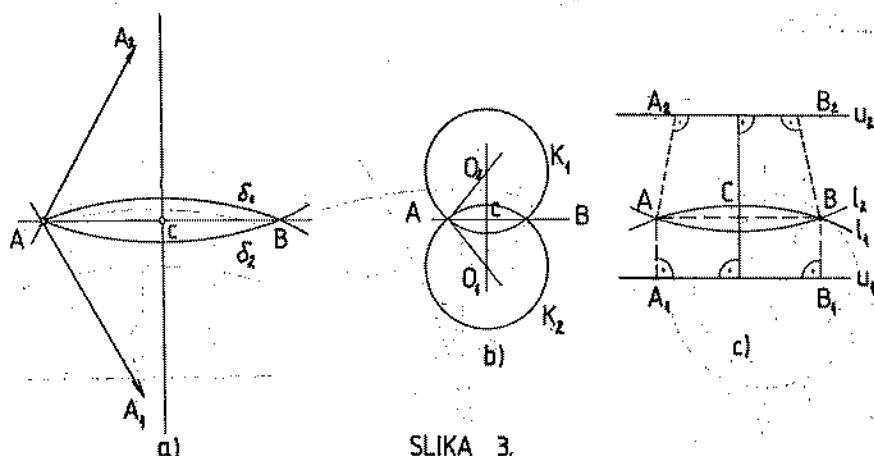
SLIKA 2.

Dokaz. a) Ako su epicikli O_1 i O_2 oricikli i neka se seku u tački A (sl. 3a). Neka su dalje AA_1 i AA_2 redom ose oricikala O_1 i O_2 . Na

simetrali ugla A_1AA_2 položimo odsečak paralelnosti AC za uglove A_1AC i A_2AC . Prava kroz C normalna na AC je paralelna pravima AA_1 i AA_2 i to jednoj u jednom a drugoj u drugom smeru što govori da njoj pripada po jedna osa oba oricikla. Ako na pravoj AC odredimo B tako da je $AC=CB$ tada tačka B zbog simetričnosti pripada oriciklu O_1 i oriciklu O_2 .

b) Dokaz teoreme je jednostavan kada su epicikli k_1 i k_2 krugovi.

c) Neka su epicikli l_1 i l_2 ekvidistante koje se seku u tačkama A i B i neka je C središte duži AB . Ako su A_2 i B_2 redom podnožja normala iz A i B na u_2 (bazisna prava ekvidistante l_2) a A_1 i B_1 podnožja normala redom iz A i B na u_1 (bazisna prava ekvidistante l_1) tada sobzirom da su četvorougli ABB_2A_2 i ABB_1A_1 Sakerjevi i C središte gornje osnovice tada je normale kroz C na AB prava normalna na u_1 i na u_2 , što govori da njoj pripada po jedna osa obe ekvidistante (sl. 3c).



SLIKA 3.

Važi opštija teorema:

Teorema 4. Ma koja dva epicikla se seku u najviše dve zajedničke tačke. Tada je simetrala duži određena presečnim tačkama jedne prave kojoj pripadaju ose oba epicikla.

Definicija 4. Dva epicikla istog tipa su paralelna ako su oba ortogonalne trajektorije jednog te istog pramena pravih [1].

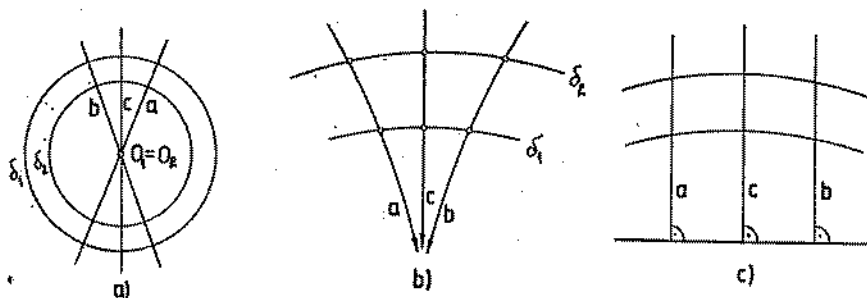
Teorema 4a. Svaka dva epicikla istog tipa koji imaju dve zajedničke ose su paralelni.

Dokaz. Neka su a i b ose epicikala O_1 i O_2 istog tipa. Treba da dokažemo da je svaka osa epicikla O_1 istovremeno i osa epicikla O_2 i obrnuto.

a) Neka su O_1 i O_2 krugovi i neka je c osa kruga (sl. 4a). Kako je c osa kruga O_1 to ona prolazi kroz tačku $O_1 \equiv O_2 = a \cap b$ pa je dakle i osa kruga O_2 i obrnuto. Dale krugovi O_1 i O_2 su paralelni.

b) Neka su O_1 i O_2 oricikli i neka je c osa oricikla O_1 (sl. 4b) tada je ona paralelna osama a i b u istom smeru u kome su paralelne ose a i b međusobno. Dakle c je i osa oricikla O_2 i obrnuto. Dakle oricikli O_1 i O_2 su paralelni.

c) Neka su O_1 i O_2 ekvidistante i neka je c osa ekvidistante O_1 (sl. 4c) tada je ona normalna na zajedničkoj normali u osa a i b pa je dakle i osa ekvidistante O_2 i obrnuto. Dakle ekvidistante O_1 i O_2 su paralelne.



SLIKA 4.

Teorema 4b. Ako su dva epicikla istog tipa paralelna tada oni imaju dve zajedničke ose.

Dokaz. Zaista ako su dva epicikla istog tipa paralelna u smislu definicije 4 tada je svaka osa jednog istovremeno i osa drugog epicikla.

Dakle dokazali smo i sljedeću teoremu:

Teorema 5. Dva epicikla istog tipa su paralelna ako i samo ako imaju najmanje dve zajedničke ose.

Prethodna teorema dokazuje da je definiciji 4, ekvivalentna sledeća definicija 5.

Definicija 5. Dva epicikla istog tipa su paralelna ako imaju dve zajedničke ose.

Teorema 6. Kroz ma koju tačku $A_1 \in a$ prolazi jedan i samo jedan epicikl O_1 paralelan epiciklu O paralelan epiciklu O , čija je osa a .

Dokaz. Sobzirom da dokaz nije komplikovan a i skraćnosti radi isti ćemo sprovesti samo kada su epicikli oricikli. U tom slučaju osom a i tačkom $A_1 \in a$ određen je jedan i samo jedan oricikl O_1 . Ostaje da se pokaže da je taj oricikl koga ćemo označiti sa O_1 , paralelan oriciklu O (sl. 4). Ukoliko recimo, osa b oricikla O ne bi bila i osa oricikla O_1 tada ni osa a kao prava paralelna sa b ne bi bila osa oricikla O_1 što bi protivurečilo pretpostavci. Dakle, svaka osa oricikla O je i osa oricikla O_1 , kao i obrnuto. Analogno se dokazuje teorema i za slučaj kada su epicikli krugovi odnosno ekvidistanti.

Ako relaciju „paralelnost“ epicikala istog tipa označimo simbolom „ $\parallel$ “, tada prema prethodnom važe sledeće osobine:

- 1) $O \parallel O$, za svaki epicikl O
- 2) Iz $O \parallel O_1$ sleduje $O_1 \parallel O$, gde su O i O_1 epicikli istog tipa.
- 3) Iz $O \parallel O_1$ i $O_1 \parallel O_2$ sleduje $O \parallel O_2$, gde su O, O_1, O_2 epicikli istog tipa.

Na osnovu navedenih osobina dokazali smo da važi:

Teorema 7. Relacija „paralelnost“ epicikala istog tipa je relacija ekvivalencije.

LITERATURA

- [1] В. Ф. Каган: *Основания геометрии I*, Москва 1949.
- [2] Ђ. Dolićanin: *Normalno projektovanje u prostoru Lobačevskog na dve normalne, mitotičke i paralelne ravni* (Magistarski rad), Beograd 1974.

EPICICLY HIPERBOLIC PLANE AND THEIR „PARALELITY“

Ćemal Dolicanin

Abstract

This paper presents some epicicly features, curves characteristic for hiperbolic plane in relation to definicion mutual „paralelity“. Definicion of „paralelity“ which is ekvivalent to definicion stated in [1] it is also given, and „paralelity“ is expanded in allepiciles it is proven that „paralelity“ relation of it is equivalency relation and the theorem: Throug $A \notin O$, $O \in \alpha$, passes one and only one epicicly O , paralel T_0 epicicly O .

PRAVA $\mathcal{C}_p$ -TRIVIJALNOST

Minir Efendija

1. UVOD

U radu su definirani pojmovi prave $\mathcal{C}_p$ -trivijalnosti i prave $h\mathcal{C}_p$ -trivijalnosti, gdje je $\mathcal{C}_p$ klasa parova topoloških prostora, za prostore X iz klase Σ ([7]). Dati su nekoliko rezultata u vezi prvog pojma a za drugi je pokazano da je invarijanta pravog oblika. Najvažniji rezultat rada je:

Teorema 4.6. Ako klasa $\mathcal{C}_p$ pravo kvazi dominira klasu $\mathcal{D}_p$ a ako je $X \in \Sigma$ pravo $h\mathcal{C}_p$ -trivijalan, tada je X pravo $h\mathcal{D}_p$ -trivijalan.

2. PREDZNANJA

Kaže se da je preslikavanje $f: X \rightarrow Y$, gdje su X i Y topološki prostori, *pravo* ako je $f^{-1}(C)$ kompaktan podskup od X za svaki kompaktan podskup C od Y . Neka su $f, g: X \rightarrow Y$ prava preslikavanja i neka je V zatvoren podskup od Y . Kažemo da su f i g *pravo homotopne* (u oznaci $f \overset{p}{\sim} g$) [pravo homotopne u V ($f \overset{p}{\sim} g$ u V)] ako postoji pravo preslikavanje $H: X \times I \rightarrow Y$ [$H: X \times I \rightarrow V$] tako da je $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ za svako $x \in X$.

S H označimo Hilbertov kub a s K prostor $H - \{p\}$ gdje je p točka iz H . Neka je Λ parcijalno uređeni skup i X, Y zatvoreni podskupovi od K . Kaže se da je $f = \{f_\lambda: X \rightarrow Y\}$ (ili $f: X \rightarrow Y$) gdje su $f_\lambda: K \rightarrow K$ preslikavanja s K u K , $\lambda \in \Lambda$, *prava fundamentalna mreža* sa X u Y ako za svaku zatvorenu okolinu V od Y u K postoji zatvorena okolina U od X u K i indeks $\lambda_0 \in \Lambda$ tako da za sve indekse $\lambda \geq \lambda_0$ vrijedi $f_\lambda|_U \overset{p}{\sim} f_{\lambda_0}|_U$ u V .

Neka su X i Y zatvoreni podskupovi od K . Kaže se da X *pravo kvazi-dominiran* prostorom Y (oznaka: $X \overset{q}{\leq} Y$) ako za svaku zatvorenu okolinu U od X u K postoje prave fundamentalne mreže $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow X$, zatvorena okolina V od Y u K i indeksi $\lambda_0 \in \Lambda$, $\delta_0 \in \Delta$, tako da za $\lambda \geq \lambda_0$, $\delta \geq \delta_0$ vrijedi: $f_\lambda|_U \overset{p}{\sim} g_\delta|_U$ u V .

Neka je $f: X \rightarrow Y$ pravo preslikavanje. Tada je f preslikavanje koja čuva krajeve ako je restrikcija funkcije Ef (koja je Freudenthalovo proširenje funkcije f) na skupu krajeva EX , injekcija. Sa Σ označimo klasu lokalno kompaktnih separabilnih metričkih prostora X čiji je prostor kvazi-komponenta QX kompaktan. $X \in \Sigma$ je *apsolutni pravi rekt* ako za svaki $X \in \Sigma$ i svako preslikavanje koja čuva krajeve $h: X \rightarrow Y$, $h(X)$ je pravi rekt od Y . Za takav X ćemo pisati $X \in APR$.

Zatvoren podskup P prostora X je *Z-skup* u X ako za svaki neprazan homotopski trivijalan otvoren skup $U \subset X$ skup $U - P$ je neprazan homotopski trivijalan.

Sa stablom podrazumevamo lokalno konačni i jednostavno povezani simplicijalni 1-kompleks.

Oznaka: $(X, X_0) \in \Sigma'$ podrazumeva da je X_0 zatvoren podprostor od X , X i X_0 su u klasi Σ i inkluzija $i: X_0 \rightarrow X$ je preslikavanje koja čuva krajeve.

Preslikavanje $f: K \rightarrow L$ se zove $\mathcal{G}$ -preslikavanje, gdje je $\mathcal{G}$ klasa topoloških prostora, ako je $K \in \mathcal{G}$. Slično, preslikavanje parova $f: (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ se zove $\mathcal{G}_p$ -preslikavanje ako je $(K, K_0) \in \mathcal{G}_p$, gdje je $\mathcal{G}_p$ klasa parova topoloških prostora.

3. PRAVA $\mathcal{G}_p$ -TRIVIJALNOST

Definicija 3.1. Neka je $(P, X) \in \Sigma'$, gdje je $P \in APR$, i neka je $\mathcal{G}_p$ klasa parova topoloških prostora. Kaže se da je X *pravo $\mathcal{G}_p$ -trivijalan* u P , ako za svaku zatvorenu okolinu U od X u P i svako pravo $\mathcal{G}_p$ -preslikavanje $f: (K, K_0) \rightarrow (P, X)$ postoji pravo preslikavanje $f': K \rightarrow U$, tako da vrijedi: $f'|_{K_0} = f|_{K_0}$.

Dokažimo da je izbor APR prostora, u kojem je X smješten, nije bitan. Zbog toga ćemo u daljem tijeku reći da je X pravo $\mathcal{G}_p$ -trivijalan ako je on takav u nekom APR prostoru.

Teorema 3.2. Neka su $(P, X), (Q, Y) \in \Sigma'$, $P \in APR$, $Q \in APR$, zatim X homeomorfan s Y i Y pravo $\mathcal{G}_p$ -trivijalan u Q . Tada je X pravo $\mathcal{G}_p$ -trivijalan u P .

Dokaz. Neka su $h: X \rightarrow Y$, $h^{-1}: Y \rightarrow X$ homeomorfizmi s X na Y odnosno s Y na X i $j: Y \rightarrow Q$ inkluzija s Y u Q . Tada je $f \circ h: X \rightarrow P$ pravo preslikavanje pa, prema [7, teorem 5.2], ono dopušta proširenje do pravog preslikavanja $\varphi: P \rightarrow Q$, takvog da je $\varphi(x) = h(x)$ za svako $x \in X$. Zbog istih razloga postoji pravo preslikavanje $\psi: Q \rightarrow P$, tako da vrijedi $\psi(y) = h^{-1}(y)$, za svaki $y \in Y$.

Neka je U ma koja zatvorena okolina od X u P . Odaberimo zatvorenu okolinu U' od Y u Q , takvu da vrijedi:

$$\varphi(U') \subset U.$$

Nadalje, neka je $f: (K, K_0) \rightarrow (P, X)$ ma koje pravo $\mathcal{G}_p$ -preslikavanje s (K, K_0) u (P, X) . Pravo $\mathcal{G}_p$ -preslikavanje $g: (K, K) \rightarrow (Q, Y)$ definiramo formulom:

$$g = \varphi \cdot f$$

i, kako je Y pravo $\mathcal{G}_p$ -trivi alan, postoji pravo preslikavanje $g': K \rightarrow U'$ sa svojstvom:

$$g'|_{K_0} = g|_{K_0}. \quad (1)$$

Osim toga, preslikavanje $f': K \rightarrow U$ definiramo formulom:

$$f' = \psi \circ g'.$$

f' je pravo kao kompozicija pravih preslikavanja. Ostalo je pokazati da vrijedi $f'|_{K_0} = f|_{K_0}$. Zaista, Za svako $k \in K_0$ imamo $f'(k) = \psi \circ g'(k) =$ (prema (1)) $= \psi \circ \varphi \circ f(k) = id \circ f(k) = f(k)$, jer je $f(k) \in X$ i $\psi \circ \varphi|_X = id_X$. Time je dokaz završen.

U slučaju da je klasa $\mathcal{G}_p = \{(P, X)\}$, tada stavljajući u Definiciji 1. $f = id$ i $\mathcal{G}_p = 1_p$ ona će se reformulisati na sledeći način:

Definicija 3.3. Neka je $(P, X) \in \Sigma'$, gde je $P \in APR$. Kaže se da je X prava 1_p -trivijalan u P , ako za svaku zatvorenu okolinu U od X u P postoji pravo preslikavanje $f'_U: P \rightarrow U$ sa svojstvom: $f'_U(x) = x$ za svako $x \in X$.

Teorema 3.4. Ako je $X \in \Sigma$ apsolutni pravi retrakt oblika (APSR [2]) tada je on pravo 1_p -trivijalan.

Dokaz. Kako je $X \in APSR$ tada je, prema [2; teorem 4.11], $X \in SUV^\infty$, što po teoremu 3.1 [8], znači da postoji stablo T tako da je $Sh_p X = Sh_p T$. Odatle posebno imamo: $Sh_p X \leq Sh_p T$. Najprije dokažimo da se prostor X može (strogo) pravo smjestiti u nekom APR prostoru. Neka je C zatvoren podskup od C_0 , gdje je C_0 Kontorov skup smješten kao Z -skup u H , takav da $C \approx ET$. Sada, kako su X i T istog pravog oblika, imamo $ET \approx EX$ i otuda: $C \approx EX$. Nadalje, prema [2, teorem 3.5.], zaključimo da se X može pravo smjestiti u $H - C$. Da bi dokazali da je $H - C \in APR$ najprije primjetimo da je $C \subset H$ Z -skup u H . Zaista, kako je $C_0 \subset H$ Z -skup i $C \subset C_0$ tada, prema teoremu 3.1 (2) iz [10], dobivamo da je C Z -skup u H . Sada, prema teoremu 3.3 iz [2], imamo:

$$T \times H \approx H - C, \quad (1)$$

i zbog toga dovoljno je pokazati da je $T \times H \in APR$. Najprije primjetimo da je $F(T \times H) \in AR$ ([7]) i $E(T \times H)$ nestabilan podskup ([7]) od $F(T \times H)$. Primjenom teorema 3.1 i 4.1 iz [7] dobivamo da je $T \times H \in APR$.

Kako je T lokalno kompaktni poliedar, zatim $Sh_p X \leq Sh_p T$ i X smješten kao Z -skup u H -mnogostrukost $H - C$, to su ispunjeni svi uvjeti teorema 2. iz [9], pa postoji kofinalan sistem zatvorenih okolina od X u $H - C$, tako da vrijede rezultati (1), (2) i (3) gore spomenutog teorema.

Označimo taj sistem s $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$. Skupa A uređujemo relacijom $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow U_\alpha \subset U_\beta$. Neka je $\alpha \in A$. Kako je $U_\alpha \approx T \times H$, tada, prema (1) dobivamo $U_\alpha \approx H - C$. Stavimo $P = h(H - C) = U_\alpha$, gdje je $h: (H - C) \rightarrow U$ homeomorfizam. Jasno je da $(P, X) \in \Sigma'$ i $P \in APR$.

Sada za svako $\beta \geq \alpha$ posoji homeomorfizam $f_\beta: P \rightarrow U_\beta$, tako da vrijedi: $f_\beta|_X = id_X$. Zbog činjenice da je $H - C$, tj. P „pogodan ANR“, dovoljno je u Definiciji 3. promatrati zatvorene okoline $U \in \{U_\alpha | \alpha \in A\}$. Primjećujući još da, prema Teoremu 3.2, uloga APR prostora P , u kojem je X pravo smješten, nije bitna, vidimo da su ispunjeni svi uvjeti Definicije 3.1. pa time zaključujemo da je X pravo 1_p -trivijalan.

Teorema 3.5. Ako je $X \in \Sigma$ pravo 1_p -trivijalan i inkluzija $i: X \hookrightarrow P$ preslikavanje koje strogo čuva krajeve, tada je $FX \in FAR$.

Dokaz. Promatramo X kao prostor koji je strogo pravo smješten u $H_1 = H - C_1$, gdje je $C_1 = \overline{C_1} \subset C_0$, $C_1 \approx EX$, a C_0 Cantorov skup koji je smješten kao Z skup u H . H_1 je APR. Tada za svaku zatvorenu okolinu U od X u H_1 postoji pravo preslikavanje $f_U: H_1 \rightarrow U$ sa svojstvom da je $f_U(x) = x$ za svaki $x \in X$.

Za pravo preslikavanje f_U postoji, prema [3, Lema 4.2], jedinstveno proširenje do preslikavanja parova $Ff_U: (FH_1; EH_1) \rightarrow (FU, EU)$. Nadalje, kako je $F \circ id_X = id_{FX}$ i $f_U|_X = id_X$, tj. $F((u|_X) = F \cdot id_X$, dobivamo $F(f_U|_X) = id_{FX}$. Odatle imamo:

$$Ff_U|_{FX} = id_{FX}. \quad (1)$$

Dokažimo sada da su sve zatvorene okoline od FX u $H = FH_1$ oblika FU . Zaista, neka je W zatvorena okolina od FX u H . Stavimo:

$$U = W - EW. \quad (2)$$

Budući da je $i: X \hookrightarrow H_1$ preslikavanje koje strogo čuva krajeve, imamo $EX = EH_1 (= EU = EW)$. Iz (2) dobivamo $FU = U \cup EU = (W - EW) \cup EU = W$.

Primjetimo da, kako je H „pogodan ANR“, u teoremu 27.1. iz [4], dovoljno je promatrati zatvorene okoline od FX u H . Odatle, kako za svaku zatvorenu okolinu $U (= FU)$ od FX u H postoji preslikavanje $Ff_U: FH_1 \rightarrow FU$, tako pa vrijedi (1), zaključujemo da je $FX \in FAR$.

4. PRAPA $h \mathcal{C}_p$ -TRIVIJALNOST

Definicija 4.1. Neka je $(P, X) \in \Sigma'$ gdje je $P \in APR$. Kaže se da je X pravo $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan u P ako za svaku zatvorenu okolinu U od X u P postoji zatvorena okolina $U_0 \subset U$ od X u P , tako da za svako pravo $\mathcal{C}_p$ -preslikavanje $f: (K, K_0) \rightarrow (P, U_0)$, postoji pravo preslikavanje $f': K \rightarrow U$ sa svojstvom $f'|_{K_0} \approx f|_{K_0}$ u U .

Sličnim putem kao u teoremu 3.2., primenjujući još teorem 3.4. iz [3], pokazuje se da uloga APR prostora, u kojem je $X \in \Sigma$ pravo smješten, nije bitna.

Sljedeći teorem pokazuje da je svojstvo prostora biti $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan je invarijantna relacije pravo kvazi-dominacije tj. tim prije invarijanta pravog oblika. Najprije primjetimo da je $K \in APR$. Zaista, kako je $(CK, \{točka\})$ homeomorfan s $(H, \{točka\})$, to je $CK \in AR$. Nadalje, točka kao Z -skup u H je nestabilan skup u H , tj. nestabilan i u CK . Odatle, prema [7, Teorem 3.1 i 4.1], imamo $K \in APR$.

Teorem 4.2. Neka su $(K, X), (K, Y) \in \Sigma'$ i $X \leq_p^q Y$. Tada ako je Y pravo $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan, takav će biti i X .

Dokaz. Neka je U ma koja zatvorena okolina od X u K . Kako je prostor X pravo kvazi-dominiran prostorom Y , posebno imamo $X \leq_p Y$, pa postoje prave fundamentalne mreže $f = \{f_\lambda, X, Y\}$, $g = \{g_\delta, Y, X\}$ i postoji zatvorena okolina $W \subset U$ od X u K , zatim indeksi $\lambda_0 \in \Lambda$, $\delta_0 \in \Delta$, tako da sa $\lambda \geq \lambda_0$, $\delta \geq \delta_0$ vrijedi: $g_\delta \circ f_{\lambda|W} \stackrel{pU}{\approx} id_W$ u U .

Kako je $g: Y \rightarrow X$ prava fundamentalna mreža s Y u X , to postoji zatvorena okolina U' od Y u K i indeks $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_1 \geq \delta_0$, tako da za $\delta \geq \delta_1$ vrijedi: $g_\delta(U') \subset U$.

Nadalje, kako je Y pravo $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan, izaberimo zatvorenu okolinu $U_0 \subset U'$ od Y u K , tako da ona zadovoljava uvjete Definicije 4.1. Sada, za okolinu U_0 postoji zatvorena okolina $U_0 \subset W$ i indeks $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq \lambda_0$, tako da za $\lambda \geq \lambda_1$ vrijedi: $f_\lambda(U_0) \subset U_0$. Primjetimo da, za $\lambda \geq \lambda_0$, $\delta \geq \delta_0$, imamo:

$$g_\delta \circ f_{\lambda|U_0} \stackrel{pU_0}{\approx} id_{U_0} \text{ u } U. \quad (1)$$

Neka je $f: (K_1, K_0) \rightarrow (K, U_0)$ ma koje pravo $\mathcal{C}_p$ -preslikavanje s (K_1, K_0) u (K, U_0) . Definiramo pravo $\mathcal{C}_p$ -preslikavanje $g: (K_1, K_0) \rightarrow (K, U_0)$ formulom:

$$g = f_{\lambda_1} \circ f. \quad (2)$$

Budući da je Y pravo $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan, postoji pravo preslikavanje $g': K \rightarrow U'$ tako da vrijedi:

$$g'|_{K_0} \stackrel{pU'}{\approx} g|_{K_0} \text{ u } U'. \quad (3)$$

Preslikavanje $f': K_1 \rightarrow U$ definiramo formulom:

$$f' = g_{\delta_1} \circ g'. \quad (4)$$

f' je pravo preslikavanje. Sada, prema (1), (2), (3) i (4), nije teško vidjeti da vrijedi: $f'|_{K_0} \stackrel{pU}{\approx} f|_{K_0}$ u U , što upravo znači da je X pravo $h \mathcal{C}_p$ -trivijalan. Time je teorem dokazan.

Uvedimo sada definiciju pravih kvazi relacija za parove lokalno kompaktnih metričkih prostora.

Zna se ([1]) da svaki lokalno kompaktni metrički prostor X može smjestiti kao zatvoren podskup nekog lokalno kompaktnog prostora $P \in ANR$, tako da postoji kofinalna familija $\mathcal{U}(X, Y)$ zatvorenih okolina od X u P , tako da je svaki $U \in \mathcal{U}(X, P)$ ANR . Neka su X i $X_0 \subset X$ i Y i $Y_0 \subset Y$ zatvoreni podskupovi lokalno kompaktnih ANR prostora P odnosno Q . S $\mathcal{U}((X, X_0), P)$ označimo kofinalnu familiju zatvorenih ANR okolina (U, U_0) od (X, X_0) u P , tj. U i U_0 , $U_0 \subset U$ su zatvoreni podskupovi od P , tako da je $X \subset U$ i $X_0 \subset U_0$. Familiju $\mathcal{U}((X, X_0), P)$ zovemo *pravim sistemom okolina* od (X, X_0) u P .

Definicija 4.3. Ako su $\mathcal{U}((X, X_0), P)$ i $\mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$ pravi sistemi okolina od (X, X_0) u P , odnosno od (Y, Y_0) u Q , tada prava mutacija $f: \mathcal{U}((X, X_0), P) \rightarrow \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$, je familija pravih preslikavanja $f: (U, U_0) \rightarrow (V, V_0)$, $(U, U_0) \in \mathcal{U}((X, X_0), P)$, $(V, V_0) \in \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$, tako da vrijedi:

(1) svaki član od $\mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$ je kodomena nekog preslikavanja iz f ;

(2) ako je $f: (U, U_0) \rightarrow (V, V_0)$ iz f i $(U', U'_0) \subset (U, U_0)$, $(V', V'_0) \subset (V, V_0)$, tada preslikavanje $f': (U', U'_0) \rightarrow (V', V'_0)$ definirano s $f' = f|_{(U', U'_0)}$ za svaki $x \in U'$ je također u f , $(U', U'_0) \in \mathcal{U}((X, X_0), P)$, $(V', V'_0) \in \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$;

(3) ako su f_1 i $f_2: (U, U_0) \rightarrow (V, V_0)$ iz f , tada postoji $(U', U'_0) \in \mathcal{U}((X, X_0), P)$, tako da je $f_1|_{(U', U'_0)} \stackrel{q}{\sim} f_2|_{(U', U'_0)}$.

Slično kao u [1] se definira kompozicija pravih mutacija.

Definicija 4.4. Za prave mutacije $f, g: \mathcal{U}((X, X_0), P) \rightarrow \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$ se kaže da su *pravo (V, V_0) -homotopne* (oznaka: $f \xrightarrow[p(V, V_0)]{\sim} g$), gdje je $(V, V_0) \in \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$, ako za svaki $f \in f$ i $g \in g$, $f, g: (U, U_0) \rightarrow (V, V_0)$, postoji $(U', U'_0) \in \mathcal{U}((X, X_0), P)$, tako da je $(U, U_0) \subset (U', U'_0)$, i tako da vrijedi: $f|_{(U, U_0)} \stackrel{q}{\sim} g|_{(U, U_0)}$ u (V, V_0) .

Definicija 4.5. Kaže se da je par (X, X_0) *pravo kvazi-dominiran* parom (Y, Y_0) (oznaka: $(X, X_0) \stackrel{q}{\leq} (Y, Y_0)$), ako za svaki $(U, U_0) \in \mathcal{U}((X, X_0), P)$ postoje prave mutacije $f: \mathcal{U}((X, X_0), P) \rightarrow \mathcal{U}((Y, Y_0), Q)$ i $g: \mathcal{U}((Y, Y_0), Q) \rightarrow \mathcal{U}((X, X_0), P)$ tako da vrijedi $g \circ f \xrightarrow[p(U, U_0)]{\sim} \text{id}_{(X, X_0, P)}$ gdje je $\text{id}_{(X, X_0, P)}: \mathcal{U}((X, X_0), P) \rightarrow \mathcal{U}((X, X_0), P)$ identična mutacija koja sadrži skup svih inkluzija između članova od $\mathcal{U}((X, X_0), P)$.

Na analogan način se definiraju relacije $\stackrel{q}{\leftarrow} i \stackrel{q}{\rightarrow}$.

Slično kao i u apsolutnom slučaju reći ćemo da klasa $\mathcal{G}_p$ -pravo kvazi-dominira klasu $\mathcal{D}_p$, ako za svaki $(X, X_0) \in \mathcal{D}_p$ postoji $(Y, Y_0) \in \mathcal{G}_p$, tako da vrijedi $(X, X_0) \stackrel{q}{\underset{p}{\leq}} (Y, Y_0)$.

Dokažimo sada rezultat koji je analogan Teoremu 3.11. iz [6].

Teorema 4.6. Ako klasa $\mathcal{G}_p$ pravo kvazi-dominira klasu $\mathcal{D}_p$ i ako je $X \in \Sigma$ pravo h $\mathcal{G}_p$ -trivijalan, tada je X pravo h $\mathcal{D}_p$ -trivijalan.

Dokaz. Neka je $X = \bar{X} \subset P \in APR$ pravo smješten u P i neka je U^* ma koja zatvorena okolina od X u P . Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $U^* \in ANR$. Odaberimo zatvorenu okolinu $U_0^* \subset U$ od X u P , tako da ona zadovoljava uvjet pravo h $\mathcal{G}_p$ -trivijalnosti prostora X .

Neka je $f: (K, K_0) \rightarrow (P, U_0^*)$ ma koje pravo $\mathcal{D}_p$ -preslikavanje. Nadalje, pretpostavimo da su K i K_0 , $K_0 = \bar{K} \subset K$, zatvoreni podskupovi lokalno kompaktnog metričkog ANR prostora M . Kako je f pravo $P \in ANR$, $U_0^* \in ANR$, $K \subset M$, tada ([3]) postoji zatvorena okolina (U, U_0) od (K, K_0) u M , tako da f dopušta proširenje $f^*: (U, U_0) \rightarrow (P, U_0^*)$, koje je pravo preslikavanje. Zbog kofinalnosti familije $\mathcal{U}((K, K_0), M)$ okolinu (U, U_0) možemo izabrati da pripada familiji $\mathcal{U}((K, K_0), M)$.

Kako klasa $\mathcal{G}_p$ pravo kvazi-dominira klasu $\mathcal{D}_p$, tada je za $(K, K_0) \in \mathcal{D}_p$ postoji $(L, L_0) \in \mathcal{G}_p$, tako da vrijedi:

$$(K, K_0) \stackrel{q}{\underset{p}{\leq}} (L, L_0). \quad (1)$$

L i L_0 promatramo kao zatvorene podskupove lokalno kompaktnog metričkog ANR prostora N . Iz (1), za okolinu (U, U_0) slijedi postojanje pravih mutacija $f: \mathcal{U}((K, K_0), M) \rightarrow \mathcal{U}((L, L_0), N)$ i $g: \mathcal{U}((L, L_0), N) \rightarrow \mathcal{U}((K, K_0), M)$, tako da vrijedi:

$$g \circ f \stackrel{\sim}{\underset{p(U, U_0)}{=}} \text{id}_{(K, K_0), M}. \quad (2)$$

Nadalje, kako je g prava mutacija i $(U, U_0) \in \mathcal{U}((K, K_0), M)$ tada postoji zatvorena okolina $(V, V_0) \in \mathcal{U}((L, L_0), N)$ i pravo preslikavanje $g_1: (V, V_0) \rightarrow (U, U_0)$, $g_1 \in g$. Očito je da $f^* \circ g_1: (V, V_0) \rightarrow (P, U_0^*)$ pravo preslikavanje. Stavimo:

$$h = f^* \circ g_1|_{(L, L_0)}: (L, L_0) \rightarrow (P, U_0^*).$$

Sada, kako je X pravo h $\mathcal{G}_p$ -trivijalan, postoji pravo preslikavanje $h': L \rightarrow U^*$, tako da vrijedi:

$$h'|_{L_0} \stackrel{\sim}{\underset{p}{=}} h|_{L_0} \text{ u } U^*. \quad (4)$$

Nadalje, kako je $U^* \in ANR$ i h' pravo, postoji zatvorena okolina V' od L u N , $V' \in \mathcal{U}(L, N)$, $V' \subset V$, tako da h' dopušta proširenje $h^*: V' \rightarrow U^*$. Izaberimo zatvorenu okolinu $V_0 \in \mathcal{U}(L_0, N)$, tako da je $V_0 \subset V'$, $V_0 \subset V_0$. Tada je $(V, V_0) \in \mathcal{U}((L, L_0), N)$ i $(V, V_0) \subset (V, V_0)$ i očito je da je preslikavanje

$$h^* = f^* \circ g_1|_{(V', V_0)}: (V', V_0) \rightarrow (P, U_0^*) \quad (5)$$

pravo. Sada iz (4) slijedi postojanje prave homotopije $H: L_0 \times I \rightarrow U^*$, tako da je $H_0 = h'|_{L_0}$, $H_1 = h|_{L_0}$. Stavimo $T = (V_0 \times \{0\}) \cup (L_0 \times I) \cup (V_0 \times \{1\})$ i definiramo preslikavanje $\psi: T \rightarrow U^*$ formulom:

$$\psi(x, t) = \begin{cases} h'(x), & \text{za } x \in V_0 \times \{0\} \\ H(x, t), & \text{za } x \in L_0 \times I \\ h(x), & \text{za } x \in V_0 \times \{1\}. \end{cases}$$

ψ je pravo preslikavanje. Nadalje, kako je $U^* \in ANR$, postoji zatvorena okolina G od T u $V_0 \times I$, tako da ψ dopušta proširenje u pravu preslikavanju $\Phi: G \rightarrow U^*$. Neka je $V_0^* \subset V_0$ zatvorena okolina od L_0 , tako da je $V_0^* \times I \subset G$. Tada je $\Phi|_{V_0^* \times I}: V_0^* \times I \rightarrow U^*$ prava homotopija koja povezuje prava preslikavanja $h^*|_{V_0^*}$ i $h^*|_{V_0}$, tj. vrijedi:

$$h^*|_{V_0^*} \stackrel{\sim}{\approx} h^*|_{V_0} \text{ u } U^*. \quad (6)$$

Nadalje, kako je $V_0^* \subset V_0$, dobivamo (iz (5)) da je $h^*|_{(V', V_0)}: (V', V_0) \rightarrow (P, U_0^*)$ pravo preslikavanje. Iz (2) slijedi da za svako $g \circ f$, i: $(\hat{U}, \hat{U}_0) \rightarrow (U, U_0)$, $(\hat{U}, \hat{U}_0) \in \mathcal{U}((K, K_0), M)$, $(\hat{U}, \hat{U}_0) \subset (U, U_0)$, postoji $(\hat{U}', \hat{U}_0') \in \mathcal{U}((K, K_0), M)$, $(\hat{U}', \hat{U}_0') \subset (\hat{U}, \hat{U}_0)$, tako da vrijedi

$$g \circ f|_{(\hat{U}', \hat{U}_0')} \stackrel{\sim}{\approx} i(\hat{U}', \hat{U}_0'), (U, U_0) \text{ u } (U, U_0). \quad (7)$$

Osim toga, kako je f prava mutacija, tada za okolinu $(V, V_0) \in \mathcal{U}((L, L_0), N)$ postoji okolina $(U, U_0) \subset (\hat{U}', \hat{U}_0')$, $(U, U_0) \in \mathcal{U}((K, K_0), M)$ i $f_1 \in f$ koja za kodomenu ima (V', V_0^*) . Sada po Definiciji 4.3, preslikavanje $f_1|_{(U', U_0')}: (U', U_0') \rightarrow (V', V_0^*)$ pripada familiji f i (7) dobiva oblik $g \circ f|_{(U', U_0')} \stackrel{\sim}{\approx} i(U', U_0'), (U, U_0) \text{ u } (U, U_0)$. Odatle, stavljajući $g \circ f = g_1 \circ f_1$, imamo

$$g_1 \circ f_1|_{(U', U_0')} \stackrel{\sim}{\approx} i(U', U_0'), (U, U_0) \text{ u } (U, U_0). \quad (8)$$

Stavimo $f' = h^* \cdot f_1|_K: K \rightarrow U^*$, koje je pravo preslikavanje jer su takva $f_1|_K$ i $h^*|_{V'}$. Sada, prema (6) i (8) nije teško vidjeti da vrijedi vrijedi $f'|_{K_0} \stackrel{\sim}{\approx} f|_{K_0}$ u U^* . Time je dokaz teorema 4. 6. završen.

LITERATURA

- [1] B. J. Ball, *Alternative approaches to proper shape theory*, Studies in Topology, edited by N. M. Stavrakas, K. R. Allen, Academic Press, New York, 1975.
- [2] B. J. Ball, *Proper shape retracts*, Fund. Math. 89 (1975), 177—185.
- [3] B. J. Ball i R. R. Sher, *A theory of proper shape for locally compact metric spaces*, Fund. Math. 86 (1974), 163—192.
- [4] K. Borsuk, *Teorija šejpov*, Izdateljstvo „Mir“ Moskva, 1976.
- [5] Z. Čerin, *Homotopy properties of locally compact spaces at infinity-triviality and movability*, Glasnik Mat. 13 (1979), 347—370.
- [6] M. Efendia, *Prava $\mathcal{C}$ -pokretljivost*, Zbornik radova PMF-Priština, VII (1981).
- [7] R. B. Sher, *A theory absolute proper retracts*, Fund. Math. 88 (1975).
- [8] S. B. Sher, *Property SUV^∞ and proper shape theory*, Trans. Amer. Math. Soc., 190 (1974).
- [9] R. B. Sher, *Proper shape theory and neighborhoods of sets in Q -manifolds*, Bull. de l'Acad. Polon. des Scienc., 23 (1975).
- [10] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*, Regional conference series in mathematics, № 28, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

PROPER $\mathcal{C}_p$ -TRIVIALITY

Minir Efendija

Summary

In this paper are defined the notions of proper $\mathcal{C}_p$ -triviality and proper $h\mathcal{C}_p$ -triviality, where $\mathcal{C}_p$ is the class of topological spaces, for the spaces $X \in \Sigma$ ([7]). It is proved that the second notion is a proper shape invariant. The most important result is:

Theorem 4.6. If the class $\mathcal{D}_p$ is proper quasi-dominated by $\mathcal{C}_p$ and if $X \in \Sigma$ is proper $h\mathcal{C}_p$ -trivial the X is proper $h\mathcal{D}_p$ -trivial.

$\mathcal{C}_p$ -TRIVIALETI I DREJTE

Minir Efendija

Rezime

Në punim janë definuar kuptimet e $\mathcal{C}_p$ -trivialitetit të drejtë dhe $h\mathcal{C}_p$ -trivialitetit të drejtë, ku $\mathcal{C}_p$ është klasa e çifteve të hapsirave topologjike, për hapsirat X të klasës Σ ([7]). Janë dhënë disa rezultate për kuptimin e parë, ndërsa për të dytin është treguar se është invariantë e formës së drejtë. Rezultati më i rëndësishëm është:

Tedrema 4.6. Në qoftë se klasa $\mathcal{D}_p$ kvazi-dominon drejtë klasën $\mathcal{D}_p$ dhe në qoftë se $X \in \Sigma$ është hapsirë $h\mathcal{C}_p$ -triviale e drojtë atëherë X është $h\mathcal{D}_p$ -triviale e drejtë.

BIMODULI I RADIKALI

Emrush Gashi

Abstrakt

U ovom članku ćemo pokazati da se radikal Jacobsona, asocijativnog prstena, kao i radikal u opštem smislu Kuroša-Amitsura može opisati (definisati) na jeziku bimodula tj. reprezentacija i antireprezentacija, kao u [4] na jeziku modula. Ovde se ustvari jednim bimodulom definiše radikal dva prstena, obzirom da se levi i desni radikal prstena (definisani pomoću leve i desne primitivnosti) poklapaju.

1. NEKI OSNOVNI POJMOVI

Neka su R, S dva asocijativna prstena i M jedan (R, S) -bimodul. To znači da je M levi R -modul, desni S -modul tj. da važi:

$$m \in M, r \in R, s \in S, ms \in M$$

$sm \in M$ i da važi relacija

$$(rm)s = r(ms) = rms$$

Slično kao moduli, i bimoduli se mogu definisati pomoću reprezentacija. Neka su R, S dati prsteni i M jedna komutativna (aditivna) grupa $\cdot r \rightarrow \bar{r}$ neka je reprezentacija prstena R , tj. homomorfizam R u $\text{End}(M)$. Kao što je poznato, u $R \times M$ može se definisati kompozicija $rm = \bar{r}m, r \in R, m \in M$, tako da M postaje levi R -modul. Takođe antireprezentacija $ms = \bar{s}m$, prstena S u odnosu na M u $M \times S$ definiše desni S -modul. Ako $\bar{r}$ i $\bar{s}$ ispunjavaju još uslov

$$(\bar{s}m)\bar{r} = \bar{r}(\bar{s}m),$$

to znači da je $R \times M \times S$ ispunjen još uslov

$$(rm)s = r(ms) = rms,$$

što predstavlja treći uslov da M bude (R, S) -bimodul.

Ponekad dati bimodul se posmatra nad nekim drugim prstenima. Tako kao u slučaju modula ([1], str. 14), može se dokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje. Neka su R, S proizvoljni prsteni i $A \triangleleft R, B \triangleleft S$. Ako je M $(R/A, S/B)$ -bimodul, tada M može se smatrati (R, S) -bimodulom. Obratno, ako je M (R, S) -bimodul i A, B ideali u R i S , koji se sadrže u jezgrima odgovarajućih reprezentacija, tada se M može smatrati kao $(B/A, S/B)$ -bimodul. Podbimoduli od M kao (R, S) -bimodul, su i podbimoduli od M , kao $(R/A, S/B)$ -bimodul. Ako su P, Q , respektivno jezgra odgovarajućih reprezentacija M kao (R, S) , bimodul, tada su P/A i Q/B jezgra reprezentacija M , kao $(R/A, S/B)$ -bimodul.

Napomenimo da se operacija u oba slučaja definiše sa $rms = (r+A)m(s+B)$, čitajući sleva na desno i obratno.

Definišimo još kvocijente, analogno kao kod modula ili ideala. Neka je N podbimodul (R, S) -bimodula M i $P \subseteq M$, tada skupovi:

$$m(N, P) = \{r \in R \mid rp \in N, \text{ za sve } p \in P\} \text{ i}$$

$$d(N, P) = \{s \in S \mid ps \in N, \text{ za sve } p \in P\}.$$

zovu se, respektivno, levi i desni kvocijent podbimodula N po podskupu P . Lako je videti da $m(N, P) \triangleleft_m R, d(N, P) \triangleleft_d S$. Za $x \in M$, ideali $m(O, x)$ i $d(O, x)$ zovu se levi i desni anulotor elementa x . Dok levi i desni anulotor samog bimodula glasi:

$$m(O, M) = \cap \{m(O, x) \mid x \in M\} = \cap \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in M\} \text{ i}$$

$$d(O, M) = \cap \{d(O, x) \mid x \in M\} = \cap \{s \in S \mid xs = 0, \forall x \in M\}.$$

$m(O, M)$ je jezgro predstavljanja koje definiše M kao levi R -modul a $d(O, M)$ jezgro antipredstavljanja koje definiše M kao desni S -modul. To znači da su pomenuta predstavljanja tačna tada i samo tada kada su $m(O, M) = 0$ i $d(O, M) = 0$. Neka je $N \triangleleft M$ i M/N odgovarajući faktor-bimodul. Anulatori od M/N su:

$$m(\bar{O}, M/N) = \{r \in R \mid r \cdot M/N \subseteq N\} \text{ i } d(\bar{O}, M) = \{s \in S \mid M/N \cdot s \subseteq N\}.$$

odavde

$$\begin{aligned} m(\bar{O}, M/N) &= \{r \in R \mid r(N+y) = N+ry = 0, y \in M\} = \\ &= \{r \in R \mid ry \in N, \forall y \in N\} = m(N, M). \end{aligned}$$

Na isti način se vidi da je $d(\bar{O}, M/N) = d(M, N)$.

Primitimo da i teoreme o homomorfizmima kod bimodula sledi:

Tvrđenje 2. Neka je M posmatrani (R, S) -bimodul i $x \in M$. Tada je $xR = \{xr \mid r \in R\} \triangleleft M, Sx = \{xs \mid s \in S\} \triangleleft M$ i $xR \simeq R/m(O, x), Sx \simeq S/d(O, x)$.

2. RADIKAL JACOBSONA

Označimo sa ${}_R\Sigma_S$ jedan skup (R, S) -bimodula, ili kraće sa Σ . Sa svakim $M \in \Sigma$ su vezani anulatori $m(O, M)$ i $d(O, M)$, tj. jezgra odgovarajuće reprezentacije i antireprezentacije za M . Skupovi.

$$\text{Ker}_m \Sigma = \cap \{m(O, M) \mid M \in \Sigma\} \text{ i } \text{Ker}_d \Sigma = \cap \{d(O, M) \mid M \in \Sigma\},$$

koji su ideali u R i S , zovu se respektivno levo i desno jezgro skupa Σ .

Kažemo da je $\text{Ker}_m \Sigma = 0$ ($\text{Ker}_d \Sigma = 0$), ako $\forall r \in R$ ($s \in S, s \neq 0$), $\exists M \in \Sigma$, takav da slika elementa r (s) pomoću odgovarajuće reprezentacije (antireprezentacije), bude nenulti endomorfizam. Ako je $\text{Ker}_m \Sigma = 0$ ($\text{Ker}_d \Sigma = 0$), kažemo da je skup Σ tačan. Ovaj termin se upotrebljava i u slučaju samo jednog bimodula.

Definicija 1. (R, S) -bimodul M zove se ireducibilan i vezano sa njim reprezentacija (antireprezentacija) je ireducibilna, ako:

$$(1) \text{ RMS} \equiv \{\sum r_i x_i s_i \mid r_i \in R, m_i \in M, s_i \in S\} \neq 0,$$

(2) u M nema podbimodula, različitih od M i 0 . Jasno je da iz (1) sledi $M \neq 0$.

Definicija 2. Prsteni R i S , zovu levo, odnosno desno primitivnim, ako postoje njima odgovarajući tačni, ireducibilni (R, S) -bimoduli. Ako su R i S proizvoljni prsteni, označimo sa I_R i I_S , respektivno skup svih (R, S) -bimodula, koji su ireducibilni. Tada $\text{Ker}_m I_R$ i $\text{Ker}_d I_S$ zovu se respektivno, radikal prstena R i S i označimo, $\text{Rad } R = J(R)$, $\text{Rad } S = J(S)$.

Prisetimo da $\text{Rad } R$ predstavlja levi a $\text{Rad } S$ desni radikal Jacobsona, ali pomoću istog bimodula. Kao što je poznato, i ako se levi i desni primitivnost ne poklapaju, radikali definisani pomoću ovih pojmova se poklapaju. Za to $\text{Rad } R$ i $\text{Rad } S$ predstavljaju radikal Jacobsona prstena R i S , što pokazuje malo niže, teorema 1. Prisetimo da ako su skupovi I_R i I_S tačni, to su prsteni R i S poluprosti. Ako je $I_R = \emptyset$ ($I_S = \emptyset$), tada je $\text{Rad } R = R$ ($\text{Rad } S = S$) i R (S) se zove radikalan prsten.

Definicija 3. Ideal $A \triangleleft R$ ($B \triangleleft S$) zove se primitivan ako je faktor-prsten R/A (S/B) primitivan prsten. Pošto su primitivni prsteni $\neq 0$, tj. $R/A \neq 0$ ($S/B \neq 0$), to A (B) je pravi radikal u R (S). Uzimajući u obzir levo i desno jezgro tj. anulatore od M , kao u [1] može se dokazati

Teorema 1. Radikal prstena R (S) je presek svih primitivnih ideala R (S).

Takođe važi

Teorema 2. Ako su $\text{Rad } R$ i $\text{Rad } S$, radikali tada su odgovarajući faktor-prsteni $R/\text{Rad } R$ i $S/\text{Rad } S$ doluprostr.

3. RADIKAL U SMISLU KUROŠA I BIMODULI

Ovde ćemo, analogno sa [4], pokazati da se opšta teorija radikala asocijativnih prstena u smislu Kuroša [2] i Amitsura [3], može interpretirati pomoću bimodula. Sama definicija radikala će biti ista kao u 2. a pokazaćemo da on ispunjava uslove definicije radikala.

Neka su R, S dva asocijativna prstena i M jedan (R, S) -bimodul. $m(O, M)_R$ i $d(O, M)_S$ su levi i desni anulator bimodula M (u odnosu na R i S). Ako je $m(O, M)_R = 0$, M se zove levo tačan, a za $d(O, M)_S = 0$, M je desno tačan. Ako su oba anulatora jednaki nuli, M se zove tačan bimodul. A ako je jedan od uslova $RM=0$, $MS=0$ ispunjen, tada je M trivijalan bimodul. Za proizvoljnu klasu (R, S) -bimodula ${}_R\Sigma_S$

$$\text{Ker}_m {}_R\Sigma_S = \cap \{m(O, M)_R \mid M \in {}_R\Sigma_S\},$$

$$\text{Ker}_d {}_R\Sigma_S = \cap \{d(O, M)_S \mid M \in {}_R\Sigma_S\}$$

su levo i desno jezgro klase ${}_R\Sigma_S$. Ako je ${}_R\Sigma_S = \emptyset$, tada je $\text{Ker}_m {}_R\Sigma_S = R$, $\text{Ker}_d {}_R\Sigma_S = S$. Ako je bar jedan od radikala Ker_m , Ker_d jednak nuli, tada se klasa ${}_R\Sigma_S$ zove tačna klasa.

Analogno sa tvrđenjem 1. važi:

Tvrđenje 3. Neka su R, S asocijativni prsteni i $A \triangleleft R$, $B \triangleleft S$. Ako je M jedan $(R/A, S/B)$ -bimodul, tada, pomoću kompozicije $rms = (r+A)m(s+B)$, M postaje (R, S) -bimodul, gde $A \subseteq m(O, M)_R$, $B \subseteq d(O, M)_S$. Obratno, ako je M , (R, S) -bimodul i $A \subseteq m(O, M)_R$, $B \subseteq d(O, M)_S$. Tada pomoću kompozicije $(r+A)m(s+B) = rms$, M postaje $(R/A, S/B)$ -bimodul. Svaki podbimodul u M kao $(R/A, S/B)$ -bimodul je podbimodul od M kao (R, S) -bimodul i obratno. Važi još $m(O, M)_{R/A} = m(O, M)_R/A$ i $d(O, M)_{S/B} = d(O, M)_S/B$.

Označimo sa Σ klasu svih klasa ${}_R\Sigma_S$, za sve asocijativne prstene R, S .

Definicija 4. Klasa Σ zove se opšta klasa bimodula ako ispunjava sledeće uslove (prema oznakama u tvrđenju 3):

$$0.1. M \in {}_{R/A}\Sigma_{S/B} \Rightarrow M \in {}_R\Sigma_S,$$

$$0.2. M \in {}_R\Sigma_S, A \subseteq m(O, M)_R, B \subseteq d(O, M)_S \Rightarrow M \in {}_{B/A}\Sigma_{S/B},$$

0.3. Ako je klasa ${}_R\Sigma_S$ tačna, tada ${}_A\Sigma_B \neq \emptyset$, za bilo koje ideale $\neq 0$, $A \triangleleft R$, $B \triangleleft S$,

0.4. Ako je ${}_A\Sigma_B = \emptyset$, za bilo koje ideale $\neq 0$, $A \triangleleft R$, $B \triangleleft S$, tada je klasa ${}_R\Sigma_S$ tačna.

Lako je videti da klasa svih ireducibilnih bimodula čini opštu klasu bimodula.

Definicija 5. (Def. 2.). Za opštu klasu Σ , pod Σ -radikalom prstena R i S , podrazumevamo jezgra klase ${}_R\Sigma_S$:

$$J(\Sigma, R) = \text{Ker}_m {}_R\Sigma_S = \cap \{m(O, M)_R \mid M \in {}_R\Sigma_S\},$$

$$J(\Sigma, S) = \text{Ker}_d {}_R\Sigma_S = \cap \{d(O, M)_S \mid M \in {}_R\Sigma_S\}.$$

Ako je ${}_R\Sigma_S = \emptyset$, tada se prsteni R i S zovu Σ -radikalni. Ako je klasa ${}_R\Sigma_S$ tačna tj. $J(\Sigma, R) = 0$, $J(\Sigma, S) = 0$, tada se R i S zovu Σ -poluprosti prsteni

Primetimo da je R (S) Σ -radikalna tada i samo tada, ako je $R = J(\Sigma, R)$ ($S = J(\Sigma, S)$).

Svojstva Σ -radikala su data pomoću sledećih tvrđenja:

Tvrđenje 4. Homorfna slika Σ -radikalnih prstena su takođe Σ -radikalni prsteni.

Ovo tvrđenje sledi iz uslova 0.1. i definicije Σ -radikalnih prstena.

Tvrđenje 5. Ako su $A \trianglelefteq R$, $B \trianglelefteq S$ takvi da $A \subseteq J(\Sigma, R)$, $B \subseteq J(\Sigma, S)$, tada je $J(\Sigma, R/A) = J(\Sigma, R/A)$ i $J(\Sigma, S/B) = J(\Sigma, S/B)$.

Zaista, za ${}_R\Sigma_S = \emptyset$, po tvrđenju 4 imamo $J(\Sigma, R/A) = R/A$, tj. $J(\Sigma, R/A) = J(\Sigma, R/A)$. A za ${}_R\Sigma_S \neq \emptyset$, iz $A \subseteq J(\Sigma, R) \subseteq m(O, M)_R$ i uslova 0.1., 0.2., kao i tvrđenja 1. dobijamo

$$J(\Sigma, R/A) = \cap \{m(O, M)_{R/A} \mid M \in {}_{R/A}\Sigma_{S/B} = \cap \{m(O, M)_{R/A} \mid M \in {}_R\Sigma_S\} = \\ = J(\Sigma, R)/A.$$

Slično se vidi da je $J(\Sigma, S/B) = J(\Sigma, S)/B$.

Posledica 1. $J(\Sigma, R/J(\Sigma, R)) = 0$ i $J(\Sigma, S/J(\Sigma, S)) = 0$.

To je jasno jer $J(\Sigma, R/J(\Sigma, R)) = J(\Sigma, R)/J(\Sigma, R) = 0$.

Posledica 2. Prsteni R , S su Σ -radikalni tada i samo tada ako se oni ne preslikavaju homomorfno na nenulte Σ -poluproste prstene.

Tvrđenje 6. Za svaki par prstena R , S , Σ -radikali se poklapaju sa presekom svih ideala (iz R i S), takvih da su odgovarajući faktor-prsteni Σ -poluprosti.

Posmatrajmo samo slučaj levog radikala tj. radikala $J(\Sigma, R) = J$. Kako je $J(\Sigma, R/J) = 0$, ako su A_α , pomenuti ideali iz R , to $J \supseteq \bigcap A_\alpha$. Neka je $R_\alpha = R/A_\alpha$, gde $J(\Sigma, A_\alpha) = 0$, tj. $\cap \{m(O, M)_R \mid M \in {}_{R_\alpha}\Sigma_{S_\beta}\} = 0$. Kako je $m(O, M)_{R_\alpha} = m(O, M)_R/A_\alpha$ tj. $\cap \{m(O, M)_R/A_\alpha \mid M \in {}_R\Sigma_S\} = 0$, a to znači $\cap \{m(O, M)_R \mid M \in {}_{R_\alpha}\Sigma_{S_\beta}\} = A_\alpha$. Prema uslovu 0.1. dobijamo

$A_\alpha \supseteq \{m(O, M)_R \mid M \in {}_R \Sigma_S\}$, tj. $A_\alpha \supseteq J$. Kako je A_α uzet proizvoljno, to $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq J$ tj. $J = \bigcap_\alpha A_\alpha$.

Posledica 3. Poddirektne sume $R = \sum R_\alpha$, $S = \sum S_\beta$, Σ -poluprostih prstena R_α i S_β su takođe Σ -poluprosti prsteni.

Zaista, neka je $R = \sum R_\alpha$. Prema definiciji poddirektne sume, $\exists A_\alpha \trianglelefteq R$, takvi da $\bigcap A_\alpha = 0$, $R/A_\alpha = 0$, $R/A_\alpha \simeq R_\alpha$. A to znači da prema tvrđenju 6. je $J(\sum, R) = 0$.

Pokazaćemo sada da se Σ -radikal poklapa sa radikalom u smislu Kuroša i Amitsura.

Neka je s proizvoljno svojstvo prstena. Prsten sa svojstvom s zvaćemo s -prstenom. Ako je $A \trianglelefteq R$ s -prsten, kazaćemo da je A s -ideal. Suma svih s -ideala iz R označava se sa $s(R)$.

Definicija 6. Kažemo da je s radikalno svojstvo, ako:

1. Homomorfna slika s -prstena je s -prsten.
2. Za bilo koji prsten R , $s(R)$ je s -ideal u R .
3. Za bilo koji prsten R , važi $s(R/s(R)) = 0$.

Kada je s radikalno svojstvo, za prsten R , koji ima svojstvo s , kažemo da je s -radikalni prsten. Ideal $s(R)$ zove se s -radikal prstena R . Važi sledeća teorema:

Teorema 3. Svaki Σ -radikal je radikal u smislu definicije 6. Obratno, ako je s proizvoljan radikal u smislu definicije 6, tada postoji takva opšta klasa bimodula Σ , tako da se radikal s poklapa sa Σ -radikalom.

Dokaz. Prvo, tvrđenje 4. i posledica 1, predstavljaju, respektivno, uslove 1. i 3. definicije 6. Za to dokažimo da se Σ -radikal $J(\Sigma, R)$ prstena R , poklapa sa sumom T svih Σ -radikalnih ideala iz R . Zaista, suma T svih Σ -radikalnih ideala iz R , je Σ -radikalni ideal. A kako se svaki Σ -radikalni ideal prstena sadrži u Σ -radikalu tog prstena, imamo da je $J(\Sigma, R) \supseteq T$. A po tvrđenju 6. imamo $J(\Sigma, R) \subseteq T$. Za to važi $J(\Sigma, R) = T$. Kako je T najveći Σ -radikalni prsten, to uslov 2. je dokazan.

Drugi deo teoreme se dokazuje kao pri definiciji radikala pomoću jezgra modula, pa se taj dokaz može naći u [4].

LITERATURA

- [1] Jacobson N. *Stroenie kolec*, Moskva 1961.
- [2] Kuroš A. G. *Radikal kolec i algebr*, Matem. sbornik, 33 (75), 1953.
- [3] Amitsur S. K. *A general theory of radicals I*, Amer. J. Math. 74 (1952).
- [4] Andrunakijević B. A. — Rjabuhin JU. M. *Moduli i radikali*, DAN SSSR, 156, № I (1964).

BIMODULET DHE RADIKALET

Emrus Gashi

Rezime

Në këtë artikull tregohet se teoria e radikaleve, në kuptim të Kurosh-Amitsurit, tek unazat asociative, si dhe radikali i Jacobsonit, mund të zhvillohet me anë të bimoduleve. Në të vërtetë, me një bimodul, me anë të përkufizimit të jashtëm, karakterizohet radikali i dy unazave asociative.

БИМОДУЛИ И РАДИКАЛИ

Эгмуш Гаши

Резюме

В этой заметке показывается что общая теория радикалов, в смысле Куроша-Амицура, может изложиться на языке бимодулей. Здесь одним бимодулем, внешним образом определяется радикал два ассоциативных колец.

RESOLUTIONS OF MAPS OF PAIRS

Qamil Haxhibeqiri

The purpose of this paper is to define the notion of a resolution of a map between pairs of topological spaces and to show the existence of such resolutions.

1. By a pair of topological spaces in this paper we mean a pair (E, E_0) which consists of a topological space E and its closed subspace E_0 . By a map of pairs $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ we mean a continuous map $p: E \rightarrow B$ with $p(E_0) \subseteq B_0$. Polyhedron P is a carrier $|K|$ of a simplicial complex K endowed with CW -topology. An ANR space A is an ANR for metric spaces. By $\mathcal{P}^2$ and $\mathcal{ANR}^2$ we denote the class of all pairs of polyhedra (P, P_0) and the class of all pairs of ANR -spaces (A, A_0) , respectively. If $f, g: X \rightarrow Y$ are two maps of topological spaces and $\mathcal{U}$ a covering of Y , we say that f and g are $\mathcal{U}$ -near maps provided for each $x \in X$ there is a $V \in \mathcal{U}$ such that $f(x), g(x) \in V$. This fact is denoted by $(f, g) \leq \mathcal{U}$.

Let $\mathcal{X}^2$ and $\mathcal{Y}^2$ be two classes of pairs of topological spaces. Similarly as in [2], we say that $\mathcal{X}^2$ is *approximately dominated* by $\mathcal{Y}^2$, in notation $\mathcal{X}^2 \leq_a \mathcal{Y}^2$, if for every $(X, X_0) \in \mathcal{X}^2$ and for every normal covering $\mathcal{U}$ of X there exists a $(Y, Y_0) \in \mathcal{Y}^2$ and there exist maps of pairs $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$, $g: (Y, Y_0) \rightarrow (X, X_0)$ such that $(gf, 1_X) \leq \mathcal{U}$. (Here 1_X denote the identity map of X). If $\mathcal{X}^2 \leq_a \mathcal{Y}^2$ and $\mathcal{Y}^2 \leq_a \mathcal{X}^2$ we say that $\mathcal{X}^2$ and $\mathcal{Y}^2$ are *approximately equivalent* and write $\mathcal{X}^2 \simeq_a \mathcal{Y}^2$.

Similarly as [2], Theorem 1, we can show the following fact.

Lemma 1. The classes $\mathcal{P}^2$ and $\mathcal{ANR}^2$ are approximately equivalent.

Proof. $\mathcal{P}^2 \leq_a \mathcal{ANR}^2$. Let $(P, P_0) \in \mathcal{P}^2$ and let $\mathcal{U}$ be an open covering of polyhedron P . Let (K, K_0) be a triangulation of (P, P_0) so fine that the star covering $\mathcal{K} = \{st(v, K); v \in K^0\}$ of K refines $\mathcal{U}$. (Here K^0 denote the set of all vertices of K). Let $A = |K|$ and $A_0 = |K_0|$ be carriers of K and K_0 endowed with the metric topology, respectively. Then (A, A_0) is a pair of ANR -spaces ([1], Theorem 6. 1. IV) and the identity

map $i: (P, P_0) \rightarrow (A, A_0)$ is continuous map which admits a homotopy inverses $j: (A, A_0) \rightarrow (P, P_0)$ such that ji and 1_P are contiguous with respect to K ([3], 2, Theorem 2). Hence $(ji, 1_P) \leq \mathcal{K}$, and since $\mathcal{K}$ refines $\mathcal{U}$, $(ji, 1_P) \leq \mathcal{U}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{NR}^2 \leq \mathcal{P}^2$. For every $(A, A_0) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{NR}^2$ and for every open covering $\mathcal{U}$ of A there exists a pair of polyhedra (P, P_0) and there exist maps $f: (A, A_0) \rightarrow (P, P_0)$, $g: (P, P_0) \rightarrow (A, A_0)$ such that gf and 1_A are $\mathcal{U}$ -homotopic ([1], VII, Corollary 6.2), and so $(gf, 1_A) \leq \mathcal{U}$.

A map of inverse systems $p: (p_\mu, \pi): E = E_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \rightarrow B = (B_\mu, r_{\mu\mu'}, M)$ consists of a function $\pi: M \rightarrow \Lambda$ and of family of maps $p_\mu: E_{\pi(\mu)} \rightarrow B_\mu$, $\mu \in M$, such that whenever $\mu \leq \mu'$, then there is a $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq \pi(\mu)$, $\pi(\mu')$ for which

$$p_\mu q_{\pi(\mu)} = r_{\mu\mu'} p_{\mu'} q_{\pi(\mu')} \lambda.$$

Index sets Λ and M of inverse systems E and B always are taken to be directed and cofinite. In special case, if $M = \Lambda$ and $\pi = 1_\Lambda$ then $p = (p_\lambda, 1_\Lambda): E = (E_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \rightarrow B = (B_\lambda, r_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ consists of a family of maps $p_\lambda: E_\lambda \rightarrow B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, such that

$$p_\lambda q_{\lambda\lambda'} = r_{\lambda\lambda'} p_{\lambda'}, \text{ for } \lambda \leq \lambda'.$$

In this case $p: E \rightarrow B$ is called a *level map of systems*. If $E = \{E\}$ is a rudimentary system, then $p: E \rightarrow B$ consists of a family of maps $p_\mu: E \rightarrow B_\mu$, $\mu \in M$, such that

$$r_{\mu\mu'} p_{\mu'} = p_\mu \text{ for } \mu \leq \mu'.$$

2. Definition 1. A resolution of pair of spaces (E, E_0) is a map of systems $q = (q_\lambda, \Lambda): (E, E_0) \rightarrow (E, E_0) = ((E_\lambda, E_{0\lambda}), q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, which satisfies the following two conditions:

(R1) Let (P, P_0) be a pair of polyhedrons, $\mathcal{U}$ an open covering of P and $f: (E, E_0) \rightarrow (P, P_0)$ a map of pairs. Then there exist an index $\lambda \in \Lambda$ and a map of pairs $f_\lambda: (E_\lambda, E_{0\lambda}) \rightarrow (P, P_0)$ such that $(f_\lambda q_\lambda, f) \leq \mathcal{U}$.

(R2) Let (P, P_0) be a pair of polyhedrons and $\mathcal{U}$ an open covering of P . Then there exists an open covering $\mathcal{U}'$ of P with the following property:

If $\lambda \in \Lambda$ and $f, f': (E_\lambda, E_{0\lambda}) \rightarrow (P, P_0)$ are maps of pairs such that $(f q_\lambda, f' q_\lambda) \leq \mathcal{U}'$, then there exists a $\lambda' \geq \lambda$ such that $(f q_{\lambda\lambda'}, f' q_{\lambda\lambda'}) \leq \mathcal{U}$.

A resolution $q: (E, E_0) \rightarrow (E, E_0)$ is called a *polyhedral (ANR) resolution* if all members $(E_\lambda, E_{0\lambda})$ of a system (E, E_0) are pairs of polyhedra (ANR-spaces).

Remark 1. The original definition of a resolution of a pair of spaces given by Mardešić in [4] differs from this one because in that definition everywhere instead of pair of polyhedrons (P, P_0) stands a pair of ANR-spaces (A, A_0) . However it is easy to show that the definition 1 is equivalent to a definition given in [4]. The proof is similar as the proof of Proposition 1 in [2] and use Lemma 1.

A resolution of a space E ([2], Def. 3) is a map of systems $q: E \rightarrow E$ which satisfies the conditions (R1) and (R2) for polyhedron (or approximate polyhedron or ANR-space) P and all maps are maps of spaces. In [2], Theorem 5 is shown that the following two conditions (B1) and (B2) are sufficient for a map of systems $q = (q_\lambda, \Lambda): E \rightarrow E = (E_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ to be a resolution of the space E :

(B1) For every normal covering $\mathcal{U}$ of E there exist a $\lambda \in \Lambda$ and a normal covering $\mathcal{U}_\lambda$ of E_λ such that $q_\lambda^{-1}(\mathcal{U}_\lambda)$ refines $\mathcal{U}$.

(B2) for every $\lambda \in \Lambda$ and for every open neighborhood U of $cl(q_\lambda(E))$ in E_λ there exists a $\lambda' \geq \lambda$ such that $q_{\lambda\lambda'}(E_{\lambda'}) \subseteq U$.

Conversely, if all E_λ in a resolution $q: E \rightarrow E$, are normal spaces, then q satisfies conditions (B1) and (B2) ([2], Theorem 6). In [2], Def. 4 is defined a resolution of a map $p: E \rightarrow B$ as a triple (q, r, p) , where $q: E \rightarrow B$ and $r: B \rightarrow B = (B_\mu, r_{\mu\mu'}, M)$ are resolutions of spaces E and B , respectively, and $p = (p_\mu, \pi): E \rightarrow B$ is a map of systems for which hold $pq = rp$, i.e. $p_\mu q_{\pi(\mu)} = r_\mu p$, $\mu \in M$. A resolution (q, r, p) of a map $p: E \rightarrow B$ is called a polyhedral (ANR) resolution if resolutions of spaces $q: E \rightarrow E$ and $r: B \rightarrow B$ are such resolutions. In [2], Theorem 11 and 13, is shown the existence of such resolutions.

If $p: E \rightarrow B$ is a level-map of systems, then the resolution (q, r, p) is called a level-resolution of a map p . In [5] is shown the existence of a polyhedral level resolution of a map $p: E \rightarrow B$.

3. Now we are able to give a definition of a resolution of a map of pairs and to show the existence of a such resolution.

Definition 2. A resolution of a map of pairs $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ is a triple (q, r, p) where $q = (q_\lambda, \Lambda): (E, E_0) \rightarrow (E, E_0) = ((E_\lambda, E_{0\lambda}), q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ and $r = (r_\mu, M): (B, B_0) \rightarrow (B, B_0) = ((B_\mu, B_{0\mu}), r_{\mu\mu'}, M)$ are resolutions of pairs (E, E_0) and (B, B_0) , respectively, and $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ is a map of inverse systems of pairs for which hold $pq = rp$, i.e. $p_\mu q_{\pi(\mu)} = r_\mu p$, $\mu \in M$.

If a map $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ is a level map, then (q, r, p) is called a level resolution of a map $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$. If $q: (E, E_0) \rightarrow (E, E_0)$ and $r: (B, B_0) \rightarrow (B, B_0)$ are polyhedral resolutions then (q, r, p) is called a polyhedral resolution of a map $p: (E, E) \rightarrow (B, B_0)$.

Theorem 1. Every map of pairs $p: (E, E) \rightarrow (B, B_0)$ admits a polyhedral level resolution (q, r, p) .

Proof. Let (q', r', p') be a polyhedral level resolution of a map $p: E \rightarrow B$ ([5], Lemma 4.6). Then $q': (q'_\mu, M): E \rightarrow E' = (E'_\mu, q'_{\mu\mu'}, M)$,

$r' = (r'_\mu, M): B \rightarrow B' = (B'_\mu, r'_{\mu\mu'}, M)$ are polyhedral resolutions of spaces E and B , respectively, and $p' = (p'_\mu, 1_M): E' \rightarrow B'$ is a level map of systems for which hold

$$p'q' = r'p \quad \text{i.e.} \quad p'_\mu q'_\mu = r'_\mu p, \quad \mu \in M. \quad (1)$$

Let Λ denote the set of all triples $(\mu, V, U) = \lambda$, where $\mu \in M$, V is a closed polyhedral neighborhood of $\text{cl}(r'_\mu(B_0))$ in a polyhedron B'_μ and U is a closed polyhedral neighborhood of $\text{cl}(q'_\mu(E_0))$ in a polyhedron E'_μ such that $U \subseteq p'^{-1}(\text{Int} V)$. Let Λ be ordered by relation $\leq$ which is given in this manner:

$\lambda = (\mu, V, U) \leq \lambda' = (\mu', V', U')$ if and only if $\mu \leq \mu'$, $r'_{\mu\mu'}(V') \subseteq V$ and $q'_{\mu\mu'}(U') \subseteq U$.

$(\Lambda, \leq)$ is a directed ordered set. By [2], Remark 9, we can assume that Λ is cofinite. For each $\lambda = (\mu, V, U) \in \Lambda$ we put:

$$(E_\lambda, E_{0\lambda}) = (E'_\mu, U), \quad (B_\lambda, B_{0\lambda}) = (B'_\mu, V), \quad q_\lambda = q'_\mu: (E, E_0) \rightarrow (E'_\mu, U) = (E_\lambda, E_{0\lambda})$$

$$r_\lambda = r'_\mu: (B, B_0) \rightarrow (B'_\mu, V) = (B_\lambda, B_{0\lambda}), \quad p_\lambda = p'_\mu: (E_\lambda, E_{0\lambda}) = (E'_\mu, U) \rightarrow$$

$$\rightarrow (B'_\mu, V) = (B_\lambda, B_{0\lambda}),$$

and for $\mu \leq \mu'$ we put:

$$q_{\lambda\lambda'} = q'_{\mu\mu'}: (E_{\lambda'}, E_{0\lambda'}) = (E'_{\mu'}, U') \rightarrow (E'_\mu, U) = (E_\lambda, E_{0\lambda}),$$

$$r_{\lambda\lambda'} = r'_{\mu\mu'}: (B_{\lambda'}, B_{0\lambda'}) = (B'_{\mu'}, V') \rightarrow (B'_\mu, V) = (B_\lambda, B_{0\lambda}).$$

In this manner we obtain inverse systems of polyhedra $(E, E_0) = ((E_\lambda, E_{0\lambda}), q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $(B, B_0) = ((B_\lambda, B_{0\lambda}), r_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ and maps of systems $q = (q_\lambda, \Lambda): (E, E_0) \rightarrow (E, E_0)$, $r = (r_\lambda, \Lambda): (B, B_0) \rightarrow (B, B_0)$, $p = (p_\lambda, 1_\Lambda): (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ for which, because of (1), hold

$$(1') \quad pq = rp \quad \text{i.e.} \quad p_\lambda q_\lambda = r_\lambda p, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Now we show that $q: (E, E_0) \rightarrow (E, E_0)$ and $r: (B, B_0) \rightarrow (B, B_0)$ are polyhedron resolutions of pairs (E, E_0) and (B, B_0) respectively. To show this, by [4], Theorem 9, suffices to show that $q: E \rightarrow E$, $r: B \rightarrow B$ are resolutions of spaces E and B , and that induced morphisms

$$q_0 = q|_{E_0}: E_0 \rightarrow E_0 = (E_{0\lambda}, q_{\lambda\lambda'}|_{E_{0\lambda}}, \Lambda), \quad r_0 = r|_{B_0}: B_0 \rightarrow B_0 = (B_{0\lambda}, r_{\lambda\lambda'}|_{B_{0\lambda}}, \Lambda)$$

satisfy the condition (B2).

Condition (R1) for q . Let P be a polyhedron, $\mathcal{U}$ an open covering of P and $f: E \rightarrow P$ a map. Since $q': E \rightarrow E'$ has (R1) there exist $\mu \in M$ and $f_\mu: E'_\mu \rightarrow P$ such that $(f_\mu q'_\mu, f) \leq \mathcal{U}$. Then for $\lambda = (\mu, B'_\mu, E'_\mu) \in \Lambda$ hold $E_\lambda = E'_\mu$, $q_\lambda = q'_\mu$ and for $f_\lambda = f_\mu: E_\lambda \rightarrow P$ we have $(f_\lambda q_\lambda, f) \leq \mathcal{U}$.

Condition (R2) for q . Let P be a polyhedron and $\mathcal{U}$ an open covering of P . Since $q': E \rightarrow E'$ has (R2), there exists an open covering $\mathcal{U}'$ of P which has property (R2) for q' . We claim that $\mathcal{U}$ has property (R2) for q also. Indeed, let $\lambda = (\mu, V, U) \in \Lambda$ and $f, f': E_\lambda = E'_\mu \rightarrow P$ such that $(fq_\lambda, f'q_\lambda) \leq \mathcal{U}'$, i.e. $(fq'_\mu, f'q'_\mu) \leq \mathcal{U}'$. By the choice of $\mathcal{U}'$ there exists $\mu' \geq \mu$ such that

$$(2) \quad (fq'_{\mu\mu'}, f'q'_{\mu\mu'}) \leq \mathcal{U}.$$

Let V' be a closed polyhedral neighborhood of $\text{cl}(r'_\mu(B_0))$ in B'_μ such that $V' \subseteq r'^{-1}_{\mu\mu'}(\text{Int } V)$ and let U' be a closed polyhedral neighborhood of $\text{cl}(q'_\mu(E_0))$ in E'_μ such that

$$U' \subseteq p'^{-1}_{\mu\mu'}(\text{Int } V) \cap q'^{-1}_{\mu\mu'}(\text{Int } U).$$

Then $\lambda' = (\mu', V', U') \in \Lambda$ and $\lambda \leq \lambda'$. Since $q'_{\mu\mu'} = q_{\lambda\lambda'}$, (2) implies

$$(fq_{\lambda\lambda'}, f'q_{\lambda\lambda'}) \leq \mathcal{U}.$$

Thus is shown that $q: E \rightarrow E$ is a resolution of a space E .

Similarly is shown that $r: B \rightarrow B$ is a resolution of B .

Condition (B2) for $q_0: E_0 \rightarrow E_0$. Let $\lambda = (\mu, V, U) \in \Lambda$ and U_λ an open neighborhood of $\text{cl}(q_{0\lambda}(E_0)) = \text{cl}(q'_\mu(E_0))$ in $E_{0\lambda} = U$. Then there is an open set U'_λ in $E_\lambda = E'_\mu$ such that $U'_\lambda \cap U = U_\lambda$. Since $U'_\lambda \cap \text{Int } U$ is an open neighborhood of $\text{cl}(q'_\mu(E_0))$ in a polyhedron $E'_\mu = E_\lambda$, there exists a closed polyhedral neighborhood U' of $\text{cl}(q'_\mu(E_0))$ in $E'_\mu = E_\lambda$ such that $U' \subseteq U'_\lambda \cap \text{Int } U \subseteq U_\lambda$ ([4], Lemma 7). Since $U' \subseteq U \subseteq p'^{-1}_{\mu\mu'}(\text{Int } V)$, we conclude that $\lambda' = (\mu, V, U') \in \Lambda$. Also, $\lambda \leq \lambda'$ because $\mu \leq \mu$, $r'_{\mu\mu'}(V) = V$ and $q'_{\mu\mu'}(U') = U' \subseteq U$. For this λ' holds

$$q_{\lambda\lambda'}(E_{0\lambda'}) = q'_{\mu\mu'}(U') = U' \subseteq U_\lambda.$$

Thus is shown that $q_0: E_0 \rightarrow E_0$ satisfies the condition (B2).

Similarly is shown that $r_0: B_0 \rightarrow B_0$ satisfies (B2).

Theorem 1 is proved.

Remark 2. If (q, r, p) is a resolution of a map of pairs $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ and if $q: E \rightarrow E$, $r: B \rightarrow B$, $p: E \rightarrow B$, $q_0: E \rightarrow E_0$, $r_0: B_0 \rightarrow B_0$,

$p_0: E_0 \rightarrow B_0$ are the induced morphisms, then is obvious that (q, r, p) is a resolution of a map $p: E \rightarrow B$. However (q_0, r_0, p_0) need not be a resolution of a map $p_0 = p|_{E_0}: E_0 \rightarrow B_0$. But, if E_0 and B_0 are P -embedded in E and B , respectively, then (q_0, r_0, p_0) is a resolution of $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ also. This follows from [4] Remark 9.

REFERENCES

- [1] S. T. Hu: *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [2] S. Mardešić: *Approximate polyhedra, resolutions of maps and shape fibrations*, *Fundamenta Mathematicae*, CXIV (1981), p. 53—78.
- [3] S. Mardešić: *The Foundations of Shape Theory*, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kentucky, Lexington 1978.
- [4] S. Mardešić and J. Segal: *Shape Theory*, North-Holland Publ. Com., Amsterdam 1982.
- [5] Q. Haxhibeqiri: *Shape fibrations for topological spaces*, *Glasnik Matematički*, Vol. 17 (37) (1982), 381—401.

REZOLVENTET E PASQYRIMEVE TË ÇIFTEVE

Qamil Haxhibeqiri

Rezyme

Në këtë punim përkufizohet rezolyenta për pasqyrimet (funksionet e vazhdueshme) e çifteve të hapësirave topologjike $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ dhe vërtetohet egzistenca e rezolventës poliedrike nivelore e pasqyrimin $p: (E, E_0) \rightarrow (B, B_0)$ (Teorema 1).

KOMUTATORËT E OPERATORËVE NË HAPSIRËN E HILBERT-it

Isak Hoxha

Në këtë punim me termin operator nënkuptojmë, operatorin e kufizuar në hapsirën e Hilbert-it.

Përkufizim 1. Komutatori C i operatorëve A dhe B përkufizohet si operator i formës

$$C = AB - BA$$

Ndër rezultatet kryesore në teorinë e komutatorve është teorema e Wintner — Wielandt-it në të cilën argumentohet se operatori njësh nuk është komutator, do të thotë nuk ekzistojnë operatorët A dhe B të tillë që $AB - BA = 1$ ku 1 është operator njësh.

Teorema 1 (Wintner — Wielandt). Komutatori skalar i vetëm është zero.

Vërtetim. Trajtojmë sëpari rastin kur hapsira ka dimension të fundëm. Në rastin e tillë, shfrytzojmë kuptimin e gjurmës. Gjurma e operatorit është linear, do të thotë

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr} A + \beta \text{tr} B$$

ku α dhe β janë skalar, ndërsa A dhe B operatorë në hapsirën e fundme dimensionale. Pastaj vlenë $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Prej nga rrjedhë $\text{tr}(AB - BA) = 0$, që do të thotë tragu i komutatorit gjithmonë është i barabartë me zero. Me që gjurma e operatorit njësh është numër i ndryshëm nga zero, përfundojmë se $AB - BA = \alpha \cdot 1$ vetëm në qoftë se $\alpha = 0$.

N'anën tjetër dihet fakti se matrica e fundme katrore është komutatorë, në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ka gjurmën e barabartë me zero ([5]).

Në rastin e përgjithshëm në hapsirën e pa fundme dimensionale teoremën pavarësisht njëri prej tjetrit e vërtetuan Wintneri dhe Wielandt. Vërtetimi sipas Wielandt:

Në qoftë se $AB - BA = \alpha$, atëherë

$$\begin{aligned} A^2B - BA^2 &= A^2B - ABA + ABA - BA^2 = A(AB - BA) + (AB - BA)A = \\ &= \alpha A + \alpha A = 2\alpha A, \end{aligned}$$

Në përgjithsi me anën e induksionit vërtetohet se

$$\begin{aligned} A^nB - BA^n &= nA^{n-1}\alpha; \quad n=1, 2, \dots. \text{ Me të vërtetë } A^{n+1}B - BA^{n+1} = \\ &= A^{n+1}B - ABA^n + ABA^n - BA^{n+1} = A(A^nB - BA^n) + (BA + \alpha)A^n - B \cdot A^{n-1}\alpha + \\ &+ 0 = nA^n\alpha + BA^{n+1} + \alpha A^n - BA^{n+1} = (n+1)A^n\alpha. \end{aligned}$$

Në qoftë se A është nilpotent me indeks n (dmth. $A^n = 0, A^{n-1} \neq 0$), atëherë $A^nB - BA^n = nA^{n-1}\alpha$ implikon $nA^{n-1}\alpha = 0$ prej nga $\alpha = 0$.

Në qoftë se A nuk është nilpotent atëherë, jobarazimi

$$\begin{aligned} \|nA^{n-1}\| &= \|A^nB - BA^n\| \leq \|A^n\| \|B\| + \|B\| \|A^n\| \text{ ose } n \|A^{n-1}\| |\alpha| \leq \\ &\leq 2 \|A\| \|A^{n-1}\| \|B\|, \end{aligned}$$

i cili vlenë për $n=1, 2, 3, \dots$ implikon $n|\alpha| \leq 2 \|A\| \|B\|$ prej nga përsëri del $\alpha = 0$. Teorema u vërtetua në tërësi.

Teorema 2. (Jacobson) Sympozojmë se $C = AB - BA$, ku A dh B janë operatorë në hapsirën e fundme dimensionale. Në qoftë se $AC = CA$, atëherë C është nilpotent.

Për të vërtetuar teoremën e tillë shfrytzojmë këtë lemë:

Lema 1 tr $A^k = 0, k=1, 2, \dots$ në qoftë se dhe vetëm në qoftëse A është nilpotente

Vërtetimi. Le të jetë A operator nilpotent. Atëherë operatorit A i përgjigjet matrica e formës

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

në të cilën të gjithë elementet mbi diagonalen kryesore i ka njeshe, ndërsa elementet tjerë i ka zero. Prej këndeje përfundojmë se tr $A^k = 0, k=1, 2, \dots$.

Anasjelltas, le të jetë tr $A^k = 0, k=1, 2, \dots$. Në hapsirën e fundme dimensionale komplekse operatorit A i përgjigjet matrica

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mathcal{I}_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 + \mathcal{I}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m + \mathcal{I}_m \end{pmatrix}$$

ku λ_k ($k=1, 2, \dots, m$) janë vlera karakteristike të ndryshme të operatorit A . Matrica J_k është matricë e Jordanit rendi i së cilës është n_k ku n_k është potencia e rrënjës λ_k të ekuacionit $\det(\lambda I - A) = 0$. Matrica A ka formën

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ 0 & & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & & \lambda_m & 1 \end{pmatrix}$$

prej nga

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & * \\ & \lambda_1^k & & & \\ & & \lambda_2^k & & \\ & & & \lambda_2^k & \\ & & & & \lambda_m^k & \\ 0 & & & & & \lambda_m^k \end{pmatrix}$$

ku $*$ do të thotë se ka elemente. Prej këndeje gjejmë

$$\text{tr} A^k = n_1 \lambda_1^k + n_2 \lambda_2^k + \dots + n_m \lambda_m^k, \text{ ku } \text{tr} A = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_m \lambda_m.$$

Me që $\text{tr} A^k = 0$, $k=1, 2, 3, \dots$ atëherë $n_1 \lambda_1^k + n_2 \lambda_2^k + \dots + n_m \lambda_m^k = 0$ $k=1, 2, \dots$. Do të thotë kemi sistemin homogjen të formës

$$\lambda_1^1 n_1 + \lambda_2^1 n_2 + \dots + \lambda_m^1 n_m = 0$$

$$\lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2 n_2 + \dots + \lambda_m^2 n_m = 0$$

$$\lambda_1^m n_1 + \lambda_2^m n_2 + \dots + \lambda_m^m n_m = 0$$

Determinanta e këtij sistemi është

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_m^m \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^m \lambda_k \prod_{j < l} (\lambda_l - \lambda_j) \neq 0$$

sepse sipas supozimit $\lambda_i \neq \lambda_j$. Me që $D \neq 0$, sistemi ka vetëm zgjidhje triviale $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 0$, prej nga

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dmth. A është nilpotente. Lema u vërtetua.

Vërtetimi i teoremës 2. Vërtetojmë se C është nilpotent. Me që $C^n = CC^{n-1} = (AB - BA)C^{n-1} = ABC^{n-1} - BAC^{n-1} = ABC^{n-1} - BC^{n-1}A$, sepse $CA = AC$ implikon $C^n A = AC^n$, $n = 1, 2, \dots$. Pra fituam $C^n = ABC^{n-1} - BC^{n-1}A$, prej nga $\text{tr } C^n = \text{tr}(ABC^{n-1} - BC^{n-1}A) = 0$, për $n = 1, 2, \dots$ do të tjetër $\text{tr } C^n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, prej nga në bazë të lemës 1. përfundojmë se C është nilpotente.

Nëse te teorema 2. termi nilpotente zëvendësohet me termin kuazinilpotent, atëherë ajo do të zgjerohet deri te teorema që vijon:

Teorema 3. (Kleinecke — Shirokov).

(i) Supozojmë se Q është komutatorë i operatorëve A dhe T

$$Q = AT - TA$$

Në qoftë se $QA = AQ$ atëherë Q është kuazinilpotent, dmth.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n\|^{1/n} = 0$$

(ii) Supozojmë se operatori Δ është operator i diferencimit, i tillë që

$$\Delta(AB) = A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot B$$

dhe T është operator i cili plotëson konditën $\Delta^2 T = 0$, atëherë do të vlejë

$$\Delta^n(T^n) = n! (\Delta T)^n$$

Vërtetimi. (i) e vërtetojmë me anën e (ii).

Le të jetë $\Delta X = AX - XA$. Operatori Δ është linearë, sepse

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha P + \beta Q) &= A(\alpha P + \beta Q) - (\alpha P + \beta Q)A = \alpha AP + \beta AQ - \alpha PA - \beta QA = \\ &= \alpha(AP - PA) + \beta(AQ - QA) = \alpha \Delta P + \beta \Delta Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(BC) &= ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = (AB - BA)C + \\ &+ B(AC - CA) = \Delta BC + B \cdot \Delta C, \end{aligned}$$

do të thotë operatori Δ i ka vetitë e derivatit. Përpos kësaj $\Delta^2 T = 0$ nga se $\Delta^2 T = \Delta(\Delta T) = A \Delta T - \Delta T A = 0$, sepse $A \Delta T = \Delta T A$ (sypozimi). Pastaj

$$\|\Delta X\| = \|AX - XA\| \leq 2 \|A\| \|X\| \text{ prej nga } \|\Delta\| \leq 2 \|A\|,$$

do të thotë Δ është operator i kufizuar. Tani nga (ii) shfrytzojmë faktin që $\Delta^n(T^n) = n! (\Delta T)^n$ përkatësisht $\Delta^n(T^n) = n! Q^n$ ku $\Delta T = Q$, prej nga gjejmë $Q^n = \frac{1}{n} \Delta^n(T^n)$, $\|Q^n\| = \frac{1}{n!} \|\Delta^n(T^n)\| \leq \frac{1}{n!} \|\Delta^n\| \|T^n\| \leq \frac{1}{n!} \|\Delta\|^n \|T\|^n$
 $\leq \frac{1}{n!} 2^n \|A\|^n \|T\|^n$ (sepse nga $\|\Delta T\| \leq 2 \|A\|$ rrjedh $\|\Delta T\|^n \leq 2^n \|A\|^n$).
 Pra

$$\|Q^n\| \leq \frac{1}{n!} 2^n \|A\|^n \|T\|^n \text{ ose } \|Q^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} 2 \|A\| \|T\|,$$

$$\text{implikon } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} 2 \|A\| \|T\| = 0$$

dhe n'anën tjetër $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n\|^{\frac{1}{n}} \geq 0$ që së bashku japin $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, do të thotë Q është kuazinilpotent.

Vërtetojmë tani (ii), dmth.

$$\Delta^n(T^n) = n! (\Delta T)^n.$$

Vërtetimi bëhet me induksion. Për $n=1$ është e qartë. Supozojmë

$$\Delta^{n-1}(T^{n-1}) = (n-1)! (\Delta T)^{n-1}$$

atëherë duke diferencuar fitojmë

$$\begin{aligned} \Delta^n(T^{n-1}) &= \Delta(\Delta^{n-1}(T^{n-1})) = A \Delta^{n-1}(T^{n-1}) - \Delta^{n-1}(T^{n-1}) A = \\ &= A(n-1)! (\Delta T)^{n-1} - (n-1)! (\Delta T)^{n-1} A = (n-1)! (A(\Delta T)^{n-1} - (\Delta T)^{n-1} A) = \\ &= 0 \text{ (sepse } A \cdot \Delta T = \Delta T A \text{ implikon } A(\Delta T)^k = (\Delta T)^k A, k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Prej këndeje në bazë të formulës së Leibnizit kemi

$$\begin{aligned} \Delta^n(T^n) &= \Delta^n(TT^{n-1}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i T \Delta^{n-i}(T^{n-1}) = 0 + n \Delta T \Delta^{n-1}(T^{n-1}) + \\ &+ \binom{n}{2} \Delta^2 T \Delta^{n-2}(T^{n-1}) + \binom{n}{3} \Delta^3 T \Delta^{n-3}(T^{n-1}) + \dots + \\ &+ \binom{n}{n-1} \Delta^{n-1} T \Delta(T^{n-1}) + \Delta^n T = n \Delta T (n-1)! (\Delta T)^{n-1} = n! (\Delta T)^n. \end{aligned}$$

Le të jetë $\mathcal{H}$ hapsirë e Hilbert-it e fiksuar, ndërsa $\mathcal{K}$ bashkësi e të gjithë vargjeve $x = \{x_n\}$ të tillë $x_n \in \mathcal{H}$ $n=1, 2, \dots$ dhe të tillë që $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$. Atëherë $\mathcal{K}$ është hapsirë e Hilbert-it me produktin skalar

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)$$

për $x \in \mathcal{K}$ dhe $y \in \mathcal{K}$. Supozojmë se A është operator i Hermit-it në $\mathcal{K}$ dhe perkufizojmë operatorin B në $\mathcal{K}$ me anën e $(Bx)_n = Ax_n$. Perkufizojmë operatorin tjetër U në $\mathcal{K}$ në këtë mënyrë $(Ux)_1 = 0$ dhe $(Ux)_n = x_{n-1}$ për $n > 1$.

Lema 2. Në qoftë se $P = BU$, atëherë

$$([P]_x)_1 = A^2 x_1 \text{ dhe } ([P]_x)_n = 0 \text{ për } n > 1, \text{ ku } [P] = P^*P - PP^*$$

është komutator i Hermit-it.

Vërtetimi. Së pari provojmë se operatorin B është operator i Hermit-it dhe se operatorin i adjunguar i operatorit U perkufizohet me $(U^*x)_n = x_{n+1}$. Me të vërtetë për $x \in \mathcal{K}$ dhe $y \in \mathcal{K}$ sipas perkufizimit të produktit skalarë

$$(Bx, y) = \sum_n ((Bx)_n, y_n) = \sum_n (Ax_n, y_n) = \sum_n (x_n, Ay_n) =$$

$$= \sum_n (x_n, Ay_n) = \sum_n (x_n, (By)_n) = (x, By);$$

$$(U^*x, z) = (x, Uz) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, (Uz)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, z_{n-1}) =$$

$$= (x_2, z_1) + (x_3, z_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1}, z_n), \text{ sepse } (Uz)_1 = z_0 = 0.$$

N'anën tjetër sipas perkufizimit është

$$(U^*x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} ((Ux)_n, z_n) \text{ që së bashku japin } (U^*x)_n = x_{n+1}. \text{ Pastaj } (P^*Px)_n =$$

$$= ((BU)^*BUx)_n = (U^*B^*BUx)_n = (U^*B^2BUx)_n = (UB^2Ux)_n = (B^2Ux)_{n+1} =$$

$$= A^2(Ux)_{n+1} = A^2x_n \text{ dhe nëse } n > 0 \text{ atëherë}$$

$$(PP^*x)_n = (BUU^*B^*x)_n = A(UU^*Bx)_n = A(U^*Bx)_{n-1} = A(Bx)_n = A^2x_n.$$

Meqenëse

$$(PP^*x)_1 = (BUU^*Bx)_1 = A(UU^*B)_1 = A(0) = 0,$$

dhe

$$(P^*Px)_1 = (U^*B^2Ux)_1 = (B^2Ux)_2 = (BBUx)_2 = A(BUx)_2 = AA(Ux)_2 = A^2x_1,$$

atëherë

$$([P]_x)_1 = ((P^*P - PP^*)x)_1 = (P^*Px)_1 - (PP^*x)_1 = A^2x_1 - 0 = A^2x_1,$$

$$([P]_x)_n = (P^*P - PP^*)x_n = (P^*Px)_n - (PP^*x)_n = 0, \text{ për } n > 1.$$

Lema u vërtetua.

Përkufizim 2. Nënhapsira $\mathcal{H}$ e hapsirës së Hilbert-it $\mathcal{K}$ është e madhe, nëse $\mathcal{H}$ përmbanë pakufi shumë kopje ortogonale të komplementit të tij ortogonal $\mathcal{H}^\perp = \mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$ ose me fjalë tjera $\dim \mathcal{H} \geq 0, \dim \mathcal{H}^\perp$ ose që është njësojë

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K}.$$

Lema 3. Operatori i Hermit-it me bërthamë të madhe është komutator i Hermit-it.

Vërtetimi. Supozojmë së pari se operatori i dhënë i Hermit-it është pozitiv, pra ai mund të shkruhet në formën A^2 ku A është operator i Hermit-it. Le të jetë $\mathcal{H}$ mbyllësi e rangut $R(A)$ të operatorit A , dmth. $\mathcal{H} = \overline{R(A)}$. Me që $\mathcal{H}$ është komplementi ortogonal i bërthamës së operatorit A , pra $\mathcal{H} = (\text{Ker } A)^\perp$ dhe meqenëse bërthama $\text{Ker } A$ është nënhapsirë e madhe e hapsirës $\mathcal{H}$; dmth. $\dim \text{Ker } A = \dim \mathcal{H}$, atëherë pa u cënuar përgjithshmëria mund të merret që hapsira e dhënë e Hilbertit $\mathcal{H}$ përmbanë shumë direkte $\mathcal{K}$ të një numri të numrueshem kopjesh të $\mathcal{H}$, dmth. $\mathcal{H}$ përmbanë $\mathcal{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{K}_n$ ku $\dim \mathcal{K}_n = \dim \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{H}$ përmbahet në $\mathcal{K}$, ashtu që ai përputhet me bashkësinë e të gjithë vargjeve të tillë x nga $\mathcal{K}$ për të cilët $x_n = 0$ për $n > 1$, pra

$$\mathcal{H} = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty, x_n \in \mathcal{K}_n, x_n = 0, \text{ për } n > 1 \right\}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \left(\sum_{i=2}^{\infty} \oplus \mathcal{K}_i \right), \dim \mathcal{K}_i = \dim \mathcal{H}, \mathcal{K}_1 = \mathcal{H}.$$

Nëse operatorin e përkufizojmë në $\mathcal{K}$ sikurse në Lemën 2. dhe e zgjerojmë në hapsirën $\mathcal{H}$ ashtu që të jetë zero (ose çfarëdo operatori normal) në komplementin ortogonal $\mathcal{H} \ominus \mathcal{K} = \mathcal{H}$. Me fjalë tjera $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, $\tilde{h} = k + h$ $k \in \mathcal{K}$, $h \in \mathcal{H}$, $P\tilde{h} = P(k + h) = Pk$ Tani Lema 2. implikon rezultatin e kërkuar.

Lema 4. Secili operator i Hermitit në hapsirën e pafundme dimensionale të Hilbert-it është invariant në lidhje me një nënhapsirë (te pak-tën një) me komplement ortogonal të madh.

Vërtetimi. Vështrojmë në veçanti rastin joseparabil dhe separabil. Në qoftë se hapsira e Hilbert-it nuk është separabile, atëherë ajo mund të shkruhet si shumë direkte e nënhapsirave të pafundme dimensionale, të cilat janë invariante në lidhje me operatorin e dhënë. Me të vërtetë, le të jetë $\mathcal{H}$ hapsirë e Hilbert-it joseparabile dhe $x_1 \in \mathcal{H}$. Bashkësinë e vektorëve $\{x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots\}$ e ortonormojmë me metodën e Gram-Schmit-it, nxjerrim bashkësinë e vektorëve, e cila është e numrueshme. Le të jetë $\mathcal{M}_1 = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{A^n x_1\}$. Është e çartë se $\mathcal{M}_1$ është nënhapsirë separabile

e formuar me anën e vektorëve $x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots$. Nënhapsira $\mathcal{M}_1$ është invariante në lidhje me operatorin A sepse $A^n x_1 \in \mathcal{M}_1$ implikon $A(A^n x_1) = A^{n+1} x_1 \in \mathcal{M}_1$. Me që nënhapsira $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}_1$ nuk është separabile, ekziston vektori x_2 i ndryshëm nga zero, i cili i takon $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}_1$ dhe le të jetë $\mathcal{M}_2 = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{A^n x_2\}$. Në mënyrë analoge $\mathcal{M}_2$ është nënhapsirë separabile

dhe invariante në lidhje me operatorin A . Analogjikisht $\mathcal{M}_3 = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n x_3$ është nënhapsirë separabile dhe invariante në lidhje me A . Procesi i tillë vazhdonet dhe me $\mathcal{N}$ shënojmë komplementin ortogonal të nënhapsirës $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$, pra

$\mathcal{N} = \mathcal{H} \ominus \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \right)$ përkatësisht $\mathcal{H} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \right) \oplus \mathcal{N}$. Nënhapsira $\mathcal{N}$ është e madhe nga se është joseparabile dhe dim $\mathcal{N} = \dim \mathcal{H}$.

Konsiderojmë tani rastin kur $\mathcal{H}$ është hapsirë separabile e Hilbert-it. Le të jetë A operator i Hermit-it, ndërsa E mase spektrale e operatorit A dhe nëse për çdo nënbashkësi të Borel-it nga drejtëza reale, vlenë $E(M) = 1$, atëherë A është multipël skalarë i njëshit. Me të vërtetë, me që A është operator i Hermitit, spektri i tij është real dhe shtrihet në segmentin $[k, K]$ ku $k = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $K = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Le të jetë

$$A = \int_k^K \lambda dE_{\lambda}$$

dekompozimi spektral i operatorit A . Sipas perkufizimit të dekompozimit spektral

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n v_k E(M_k), \quad \delta > 0$$

ku intervalet gjysëm të hapura $M_k = [\lambda_k, \mu_k)$ janë nënbashkësi të intervaleve gjysëm të hapura $[k, K + \delta)$, $v_k \in [\lambda_k, \mu_k)$, $\delta = \max(\mu_k - \lambda_k)$. Nëse

$$E(M_k) = 0 \text{ për çdo } M_k, \text{ atëherë } A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v_k \cdot 0 = 0$$

Sypozojmë se $k < K$. Atëherë prerja $\{k\} \cap \{K\}$ është bashkësi vakante dhe sipas vetive të mases spektrale kemi $E(\{k\}) \cdot E(\{K\}) = 0$, që është në kontradikcion me $E(k) = E(K) = 1$.

Në qoftë se $k = K$, atëherë $k(x, X) \leq (Ax, X) \leq K(x, X)$, $\|x\| = 1$, implikon $k(x, x) \leq (Ax, x) \leq k(x, x)$, prej nga $(Ax, x) = k(x, x)$ përkatësisht $Ax = kx$ për çdo x , do të thotë $A = k$ që dmth. se A është multipël skalarë i njëshit.

Nëse për çdo M dimensioni i rangut të projektorit $E(M)$ është i fundëm pra $\dim R(E(M)) < \infty$ ose kofinit, pra $\dim R(E(M))_1 < \infty$, atëherë A dallohet nga multipli skalarë i njëshit për një operator të fundëm dimensional. Me të vërtetë meqenëse $R(E(M)) = \{E(M) : x \in \mathcal{H}\}$,

$R(E(M))^{\perp} = \{(1 - E(M))x : x \in \mathcal{H}\} = R(1 - E(M))$, sipas teoremës për projektionin çdo vektor $x \in \mathcal{H}$ mund të shkruhet sikurse

$$x = E(M)x + (1 - E(M))x \text{ prej nga}$$

$$Ax = AE(M)x + A(1 - E(M))x.$$

Në qoftë se $x \in R(E(M))$, atëherë $E(M)x = x$ dhe $kx = Ax + A(1 - E(M))x$, përkatësisht $kx - Ax = A(1 - E(M))x$. Me që nënhapsirat $E(M)\mathcal{H}$ dhe $(1 - E(M))\mathcal{H}$ janë invariante në lidhje me A atëherë $A(1 - E(M)) = (1 - E(M))A$. Pra $kx - Ax = (1 - E(M))Ax = (1 - E(M))y$, $y = Ax$; në të kundërtën nënhapsirat $(F(M)\mathcal{H})$ dhe $(1 - E(M))\mathcal{H}$ do të ishin me dimension të pafundëm dhe n'atë rast operatori A është invariant në lidhje me të paktën njërin nga ato dy nënhapsira.

Teorema 4. Secili operatorë i Hermit-it në hapsirën e Hilbert-it me dimension të pafundëm është shumë e dy komutatorëve të Hermit-it

Vërtetimi. Në bazë të Lemës 4. operatori i dhënë është shumë e dy operatorëve të Hermitit me bërthama të mëdha dhe teorema rrjedh nga Lema 3.

Për të zbatuar ato rezultate në operatorin e qërgjithshëm A , është e nevojshme që A të zbërthehet në pjesën e tij reale dhe imagjinare, do të thotë në operator të vetëm të Hermitit P dhe Q për të cilët $A = P + iQ$. Nëse $A = P + iQ$, $B = R + iS$ (P , Q , R dhe S janë operatorë të Hermitit). Shënojmë me

$$A' = A'(A, B) = P + iS, \quad B' = B'(A, B) = Q + iR.$$

Kjo implikon

$$A'' = A'(A', B') = P + iR, \quad B'' = B'(A', B') = S + iQ,$$

përfundimisht rrjedh

$$A''' = A'(A'', B'') = P + iQ = A, \quad B''' = B'(A'', B'') = R + iS = B.$$

Në këto simbole, komutatori i operatorëve A dhe B është

$$AB - BA = 2^{-1}([A'] + [B'] + (2i)^{-1}([A''] + [B'']))$$

ku $[A'] = (A')^* A' - A'(A')^*$ etj. janë komutatorë të Hermitit. Me që komutatori i Hermitit është operator i Hermitit dhe meqenëse ai operator është i caktuar në mënyrë të vetme me pjesën e tij reale dhe imagjinare, rrjedh psh. se pjesa reale e $AB - BA$ është $2^{-1}([A'] + [B'])$. Me që transformimi, i cili A dhe B e transformon në A' dhe B' , është pasqyrim ciklik i rendit 3, rrjedh se secili nga çiftet $\{A, B\}$, $\{A', B'\}$ dhe $\{A'', B''\}$ në mënyrë të vetme i përcakton dy të tjerët. Këto fakte së bashku me Teoremën 4. japin këtë rezultat

Teorema 5. Secili operator i Hermitit në hapsirën e Hilbert-it me dimension të pafundëm është pjesë reale e komutatorit.

LITERATURA

- [1] P. R. Halmos, *Commutators of operators*, Amer. J. Math., Vol. 74 (1952), 237—240.
[2] P. R. Halmos, *A glimpse into Hilbert space*, chap. I. Lectures on Mathematics (New York, 1963).
[3] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand. Co. 1967.
[4] D. C. Kliencke, *On operators commutators*, Proc. A.M.S., Vol. 8 (1957), 535—536.
[5] A. A. Albert, B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J. Vol. 4 1957, 1—3.

COMMUTATORS OF BOUNDED OPERATORS ON HILBERT SPACE

Isak Hoxha

Summary

In this paper are given many basic facts about the commutators of bounded operators on Hilbert space. Winter and Wieland showed that $AB-BA=I$ has no solutions in bounded operators (Theorem 1.) In the sequel using the Lemma 1, it is showed the Theorem 2. Theorem 5 is a consequence of the assertion (Theorem 4) that every Hermitian operator on an infinite dimensional Hilbert space is the sum of two self-commutators.

KOMUTATORI OGRANIČENIH OPERATORA NA HILBERT-OVOM PROSTORU

Isak Hoxha

Rezime

U ovom članku su dokazane nekoliko činjenica u vezi komutatora ograničenih operatora na Hilbert-ovom prostoru. Wintner i Wieland su pokazali da $AB-BA=I$ nema rešenje u skupu ograničenih operatora (Teorema 1). U nastavku, koristeći Lemu 1, dokazano Teorema 2. Teorema 5 je posledica tvrdnje (Teorema 4) da svaki Hermitski operator na beskonačno dimenzionalnom Hilbert-ovom prostoru je suma dvaju Hermitskih komutatora

O UNIFORMNOM KOREKTNOM CAUCHYJEVOM PROBLEMU U BANACHOVOM PROSTORU

Isljam Šehu

Abstrakt

U ovom radu se govori o uniformnom korektnom Cauchyjevom problemu linearne diferencijalne jednačine s neograničenim konstantnim operatorom u Banachovom prostoru. Daju se potrebni i dovoljni uslovi da bi Cauchyjev problem jed. (1) sa zatvorenim operatorom bio uniformno korektan pomoću generatora polugrupe klase C_0 i rezolvente operatora. Pokaže se da je svaki uniformno korektan Cauchyjev problem limes ograničenih operatora. Na kraju daje se skup uniformne korektnosti operatora i analitičnost rešenja.

1. U Banachovom prostoru E data je diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

s početnim uslovom

$$x(0) = x_0 \in D(A), \quad (2)$$

gde je A linearan zatvoren neograničen operator i gustim domenom $D(A)$ u E .

Rešenja korektnog Cauchyjevog problema jed. (1) su oblika

$$x(t) = U(t)x_0, \quad x_0 \in D(A),$$

gde je $U(t)$ polugrupa operatora, jako neprekidna za $t > 0$ (Videti [4]).

Definicija 1. Korektan Cauchyjev problem jed. (1) zove se uniformno korektan, ako za niz rešenja x_n iz $x_n(0) \rightarrow 0$ sledi da $x_n(t) \rightarrow 0$ uniformno po t , na svakom konačnom segmentu $[0, T]$.

Ako je Cauchyjev problem jed. (1) uniformno korektan, tada je

$$\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)x = x, \quad \text{za svako } x \in E. \quad (3)$$

Definicija 2. Kaže se da je polugrupa $U(t)$ klase C_0 , ako je jako neprekidna za $t > 0$ i važi relacija (3).

Dakle, polugrupa $U(t)$, koja odgovara uniformno korektnom Cauchyjevom problemu pripada klasi C_0 .

Nezavisno od diferencijalne jednačine polugrupe klase C_0 imaju osobine:

1° Ako je polugrupa $U(t)$ klase C_0 , tada važi

$$\|U(t)\| \leq M \exp(\omega t) \quad (4)$$

gde je M konstanta a broj ω dat je sa

$$\omega = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} \quad (5)$$

2° Ako je polugrupa $U(t)$ klase C_0 , tada je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D(U^n(0))$$

gusto u prostoru $E_0 = \bigcup_{0 < \alpha < \infty} U(\alpha)E$, koji je najmanji linearni potprostor, koji sadrži kodomen operatora $\{U(t) : t > 0\}$.

Kod proučavanja polugrupe $U(t)$ linearnih ograničenih preslikavanja kompleksnog Banachovog prostora u sebe važnu ulogu igra generator $U'(0)$:

$$U'(0)x_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} [U(t) - I]x_0, \text{ za } x_0 \in D.$$

Prirodno je da Laplaceova transformacija daje vezu između polugrupe $U(t)$ i rezolvente $R(\lambda; U'(0))$ formulama:

$$R(\lambda; U'(0)) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) U(t) dt$$

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(\lambda t) R(\lambda; U'(0)) d\lambda,$$

gde L je takav kontur da na njemu funkcija $\exp(\lambda t)$ teži k nuli, kada $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Teorema 1. Ako je polugrupa $U(t)$ klase C_0 , tada generator $U'(0)$ ima rezolventu $R(\lambda; U'(0))$ za svako λ s dovoljno velikim realnim delom. (Dokaz u [1]).

Iz gornje teoreme sledi da spektar polugrupe klase C_0 leži svugde u nekoj poluravnini $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$.

Problem korektnosti diferencijalne jednačine s generatorom rešava sledeća:

Tvrđnja 1. Ako je

$$\frac{dw}{dt} = U'(0) w \quad (6)$$

$$w(0) = w_0 \in D, \quad (7)$$

gde je $U'(0)$ generator polugrupe klase C_0 , tada je problem (6), (7) uniformno korektan.

Zaista, funkcija $w(t) = U(t)w_0$ je rešenje jed. (6) za svako $w_0 \in D$. Kako važi ocena (4) ona neprekidno zavisi od početnog uslova w_0 uniformno po t na svakom konačnom segmentu. Dakle, treba pokazati samo jedinstvenost rešenja (videti [1]).

Sada se može definisati osnovni rezultat:

Teorema 2. Da bi problem (1), (2) sa zatvorenim operatorom A bio uniformno korektan, potrebno je i dovoljno, da je A generator polugrupe klase C_0 .

Dokaz. Operator $U'(0)$ je zatvoren i $A \subset U'(0)$. S druge strane, A dopušta zatvorenje i $A \subset U'(0)$. Koristeći relaciju:

$$\mathcal{T}(\lambda)x_0 = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t)x_0 dt,$$

imamo da je

$$(A - \lambda I)\mathcal{T}(\lambda)x = x, \text{ za } x \in D(A).$$

Zbog ograničenosti operatora $\mathcal{T}(\lambda)$ gornja jednakost važi i za svako $x \in E$. No, rezolventa $\mathcal{T}(\lambda)$ generatora $U'(0)$ preslikava ceo prostor E na D . Dakle, $D \subset D(A)$. Prema tome, $A = U'(0)$.

Obratno, neka je w_n niz tačaka iz domena generatora, takav da

$$w_n \rightarrow w_0 \text{ i } U'(0)w_n \rightarrow z_0.$$

Prema definiciji zatvorenog operatora, treba pokazati da je $U'(0)w_0$ definisan i jednak z_0 .

Kako je $w_n \in D$, tada važi

$$\frac{1}{h} \int_0^h U(\tau) U'(0) w_n d\tau = \frac{1}{h} [U(h) - I] w_n,$$

i prelaskom na limes, kada $n \rightarrow \infty$, dobija se

$$\frac{1}{h} \int_0^h U(\tau) z_0 d\tau = \frac{1}{h} [U(h) - I] w_0.$$

Konačno, kada $h \rightarrow 0$, leva strana zadnje jednakosti teži k z_0 , a desna je, po definiciji, generator. Dakle, $z_0 = U'(0)w_0$.

Teorema 3. Da bi zatvoreni linearni operator A generirao polugrupu klase C_0 , takvu da je $\|U(t)\| \leq M$, potrebno je i dovoljno da je $D(A)$ gusto u E i važi nejednakost

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq M \lambda^{-n}, \text{ za } \lambda > 0 \text{ i } n=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Dokaz. Potrebno. Najpre primetimo da imajući u vidu relaciju

$$\frac{d^n R(\lambda; A)}{\lambda^n} = n! R(\lambda; A)^{n+1} \quad (9)$$

relacija (8) je ekvivalentna sa

$$\lambda^{n+1} \|R(\lambda; A)^{(n)}\| \leq Mn!, \text{ za } \lambda > 0 \text{ i } n=0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Ako je polugrupa $U(t)$ klase C_0 s generatorom $B=U'(0)$, tada je, prema osobini 2°, domen D gusto u E . Za $\lambda > 0$ je

$$R(\lambda; B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) x dt,$$

ili diferenciranjem dobija se

$$R(\lambda; B)^{(n)}x = \int_0^\infty (-1)^n t^n e^{-\lambda t} U(t) x dt.$$

Konačno uzimajući normu i koristeći pretpostavku da je $\|U(t)\| \leq M$ imamo

$$\|R(\lambda; B)^{(n)}\| \leq \frac{Mn!}{\lambda^{n+1}}, \text{ za } n=0, 1, 2, \dots$$

a to je (10).

Dovoljnost se bazira na formuli

$$U(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{B_\lambda t} x, \text{ za } \lambda > 0$$

gde je $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda; A) - I$.

Operatori B_λ međusobno komutiraju.

Kako važi

$$B_\lambda x = \lambda R(\lambda; A) Ax, \text{ za } x \in D(A)$$

odnosno

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax,$$

to nam daje ideju da koristimo aproksimativnu polugrupu

$$S_\lambda(t) \equiv e^{B_\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} R(\lambda; A)^n.$$

Koristeći (8) imamo

$$\|S_\lambda(t)\| \leq M, \text{ za } \lambda > 0. \quad (11)$$

Dalje,

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{d\sigma} [S_\mu(t-\sigma)S_\lambda(\sigma)x] d\sigma = \\ &= \int_0^t S_\mu(t-\sigma)S_\lambda(\sigma)[B_\lambda x - B_\mu x] d\sigma, \end{aligned}$$

ili koristeći (11) je

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq M^2 t \|B_\lambda x - B_\mu x\|.$$

Za $x \in D(A)$ važi

$$\lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \|B_\lambda x - B_\mu x\| = 0.$$

Dakle, $S_\lambda(t)x$ jako konvergira nekom limesu, kad $\lambda \rightarrow \infty$, uniformno po t na svakom konačnom segmentu $0 \leq t < T < \infty$. Neka je taj limes $U(t)x$. Zbog gustoće $D(A)$ u E prema teoremi Banach-Steinhausa imamo

$$U(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)x, \text{ za svako } x \in E.$$

Iz (11) sledi uniformna konvergencija po t na segmentu $[0, T]$, odakle, zaključimo da je $U(t)$ neprekidna za $t > 0$ i da važi

$$\|U(t)\| \leq M, \quad U(0) = I.$$

$\{S_\lambda(t), \text{ za } t \geq 0\}$ je i polugrupa.

Time je pokazano da je polugrupa $U(t)$ klase C_0 .

Treba još pokazati da se generator $B = U'(0)$ poluprupe $U(t)$ poklapa sa operatorom A .

Polazeći iz jednakosti

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(\sigma) B_\lambda d\sigma$$

vidi se da podintegralna funkcija teži k $U(\sigma)Ax$, za $x \in D(A)$. Dakle,

$$U(t)x - x = \int_0^t U(\sigma) A x d\sigma, \text{ za } x \in D(A).$$

Otuda sledi da je

$$U_h x = \frac{1}{h} \int_0^h U(\sigma) A x d\sigma \rightarrow Ax, \text{ kada } h \rightarrow 0_+.$$

Prema tome je

$$(1) \quad Bx = Ax, \text{ za svako } x \in D(A).$$

Znamo da $B \supset A$. S druge strane, za svako $\lambda > 0$ postoje rezolvente $R(\lambda; A)$ i $R(\lambda; B)$, prva po pretpostavci, a druga po teoremi 1. Prema tome, operator $\lambda I - B$ jednoznačno preslikava $D(A)$ u D na E . To je moguće jedino ako je $D(A) \equiv D(B)$. Znači $A = B = U'(0)$.

Prema tome, zaključimo da ako se ograničimo na jednačine sa zatvorenim operatorom, tada klasa jednačina za koju je Cauchyjev problem uniformno korektan, poklapa se sa klasom jednačina u kojem je operator A generator polugrupe klase C_0 .

2. Ako je u jed. (1) operator A ograničen, tada je Cauchyjev problem uniformno korektan i polugrupa $U(t)$ ima oblik

$$U(t) = e^{tA}.$$

Da je svaki uniformno korektan problem u izvesnom smislu limes problema ograničenih operatora govori se u sledećoj teoremi.

Teorema 4. Da bi Cauchyjev problem jed. (1) sa zatvorenim operatorom A bio uniformno korektan potrebno je i dovoljno da operator A ima rezolventu za dosta veliko $\lambda > 0$, a sam je limes niza ograničenih međusobno komutirajućih operatora A_n , takvih da je

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(\omega t), \quad (12)$$

gde M i ω ne zavise od n .

Dokaz ćemo dati u skraćenom obliku.

Potrebno. Zbog zatvorenosti operatora A , prema teoremi 3, on je generator polugrupe $U(t): A = U'(0)$. Rezolventa operatora A je

$$R(\lambda; A)x_0 = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x_0 dt, \quad x_0 \in D(A) \quad (14)$$

čija je norma, prema oceni (4)

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}.$$

Definišemo operatore A_n :

$$A_n = -\lambda_n I - \lambda_n^2 R(\lambda_n; A),$$

gde su λ_n realni i $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Ovi operatori su ograničeni i jako konvergiraju k operatoru A i međusobno komutiraju. Da bi pokazali da oni zadovoljavaju (12) poslažimo od

$$\exp(tA_n) = \exp(-\lambda_n t - \lambda_n^2 R(\lambda_n; A)t) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 t)^k R(\lambda_n; A)^k}{k!}$$

i diferencirajući $k-1$ puta po λ , formulu (14) dobija se

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} R(\lambda; A) w = (-L)^k \int_0^\infty t^{k-1} U(t) w dt = (k-1)! R(\lambda; A)^k$$

ili

$$\|R(\lambda; A)^k\| \leq \frac{M}{(Re \lambda - \omega)^n}$$

Pa je, konačno

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(2\omega t), \text{ za } \lambda_n > 2\omega.$$

Dovoljnost. Polazi se od jednakosti

$$\exp(tA_n) - \exp(tA_m) = \int_0^t \exp(t-s) A_n \cdot (A_n - A_m) \exp(sA_m) ds$$

koja se dobija integriranjem jednačine

$$\frac{d}{ds} [\exp(t-s) A_n \exp(sA_m)] = \exp(t-s) A_n \cdot (A_m - A_n) \exp(sA_m).$$

Kako operatori A_n i A_m međusobno komutiraju, te oni komutiraju i sa $\exp(sA_m)$. Koristeći ocenu (12) imamo

$$\|\exp(tA_n)w - \exp(tA_m)w\| \leq M^2 t \exp(t\omega) \cdot \|(A_n - A_m)w\|, \text{ za svako } w. \quad (15)$$

Kako $A_n w_0 \rightarrow A w_0$, za $w_0 \in D(A)$, onda je

$$\|(A_n - A_m)w_0\| \rightarrow 0.$$

Iz (15) sledi da funkcije $\exp(tA_n)w_0$ uniformno konvergiraju po t na svakom konačnom segmentu $[0, T]$ i $w_0 \in D(A)$. Zbog gustoće $D(A)$ u E operatori $\exp(tA_n)$ su i uniformno ograničeni na $[0, T]$ i funkcije $\exp(tA_n)w$ uniformno konvergiraju po t na $[0, T]$ za svako $w \in E$. Neka je limes niza $\exp(tA_n)w$ označen sa $U(t)w$, gde su $U(t)$ linearni ograničeni operatori, jako neprekidni po t , za $t \geq 0$.

Operatori $U(t)$ čine polugrupu i kako je $U(0) = I$, prema definiciji 2, pripada klasi C_0 .

Operator A je i generator te polugrupe, tj. $A = U'(0)$.

Prema tome, konačno po tvrdnji 1 Cauchyjev problem je uniformno korektan.

Koristeći gornji teorem imamo sledeću tvrdnju:

Teorema 5. Da bi Cauchyjev problem jed. (1) sa zatvorenim operatorom A bio uniformno korektan potrebno je i dovoljno da rezolventa operatora A zadovoljava uslov

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re \lambda - \omega)^n}, \quad (Re \lambda > \omega) \quad (16)$$

za neke ω i M a za odgovarajuću polugrupu važi ocena (4).

Dokaz se svodi na prethodni teorem.

Da samo uslov

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \quad (\text{za } \lambda > \omega \text{ i } M > 1)$$

nije dovoljan za uniformnu korektnost Cauchyjevog problema, videti primer u [2].

3. Sledećom definicijom uvodi se pojam skupa uniformne korektnosti operatora A .

Definicija 3. Skup svih kompleksnih brojeva ζ za koje je Cauchyjev problem jednačine:

$$\frac{dx}{dt} = \zeta Ax, \quad x(0) = x_0 \in D(A), \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

uniformno korektan, zove se skup uniformne korektnosti operatora A i označi se sa K_A^c .

Uslove kada neka tačka pripada skupu K_A^c daje teo. 4 odnosno:

Teorema 4'. Da bi zrak $\arg \zeta = \varphi$ pripadao skupu K_A^c , potrebno je, da važi

$$\|R(z + \eta)^n\| \leq \frac{M}{|z - z_0|^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

gde je z_0 tačka na zraku $\arg z = -\varphi$, z ma koja tačka na tom zraku sa $|z| > |z_0|$ i η proizvoljna tačka na pravoj koja je normalna na tom zraku.

Dovoljnost se dobija iz uslova (17) za $\eta = 0$.

Dokaz. Neka je $\zeta_0 = e^{i\varphi} \in K_A^c$. Tada imajući u vidu teo. 5, zato je potrebno i dovoljno, da važi nejednakost

$$\|R[e^{i\varphi} A; (\sigma + i\tau)]^n\| \leq \frac{M}{(\sigma - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

za neko $M > 0$ i realno ω , tj.

$$\|R[\sigma e^{-i\varphi} + \tau e^{i(n/2 - \varphi)}]^n\| \leq \frac{M}{(\sigma - \omega)^n}.$$

Ako sa $z: z = \sigma e^{-i\varphi}$ označimo promenljivu tačku na zraku $\arg \zeta = -\varphi$, sa η proizvoljnu tačku na zraku $\arg \zeta = -\varphi$, tada zadnja nejednakost postaje

$$\|R(z + \eta)^n\| \leq \frac{M}{|z - z_0|^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

a to je (17).

Skup K_A^c je podskup od K_A i prema teo. 4 u [4], leži u nekoj zatvorenoj poluravni, odnosno može se izreći sledeća:

Teorema 6. Skup K_A^c može biti: 1) tačka $\zeta=0$; 2) zrak; 3) prava; 4) otvoren, poluotvoren ili zatvoren sektor s uglom θ : $0 \leq \theta \leq \pi$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ako skupu K_A^c pripadaju dva zraka $\arg \zeta = \varphi_1$ i $\arg \zeta = \varphi_2$ ($0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$), tada tom skupu pripada i svaki zrak $\arg \zeta = \varphi$, gde je $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Dakle, ako su $\exp(i\varphi_1)$ i $\exp(i\varphi_2)$ iz K_A^c , tada prema teo. 4' na odgovarajućim zracima važe ocene:

$$\|R(z + \eta_1)^n\| \leq \frac{M_1}{|z - z_1|^n} \quad \text{i} \quad \|R(z + \eta_2)^n\| \leq \frac{M_2}{|z - z_2|^n}. \quad (18)$$

Neka se u tačkama z_1 i z_2 konstruišu normale na zrake $\arg z = -\varphi_1$ i $\arg z = -\varphi_2$. Tačka preseka neka se označi sa ξ . Promatramo operator: $A_1 = A - \xi I$, za čiju rezolventu važe ocene:

$$\|R(z; A_1)^n\| \leq \frac{M_1}{|z|^n} \quad \text{i} \quad \|R(z; A_1)^n\| \leq \frac{M_2}{|z|^n}, \quad (19)$$

gde se z menja na odgovarajućim zracima. Kako je funkcija $z^n R(z; A_1)^n$ analitička u uglu $-\varphi_2 \leq \arg z \leq -\varphi_1$ i imajući u vidu (18) i (19) dobijamo

$$\|z^n R(z; A_1)^n\| \leq M = \max(M_1, M_2),$$

na rubu ugla.

Prema teoremi Fragmaena-Lindelefa ona važi i u unutrašnjosti ugla, tz.

$$\|R(z; A_1)^n\| \leq \frac{M}{|z|^n}, \quad (-\varphi_2 \leq \arg z \leq -\varphi_1).$$

Konačno, prema teo. 4' Cauchyjev problem operatora: $\zeta A_1 = \zeta A - \zeta \xi I$ je uniformno korektan, za svako ζ iz sektora $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$. To će važiti i za operator A tj. $\zeta \in K_A^c$.

Tako konačno se dobija sledeća:

Teorema 7. Da bi polugrupa $U(\zeta)$ odgovarajućeg Cauchyjevog problema bila analitička u sektoru $\varphi_1 < \arg \zeta < \varphi_2$ i zadovoljio uslov

$$\|U(\zeta)\| \leq M \exp(\omega |\zeta|)$$

potrebno je i dovoljno, da je Cauchyjev problem uniformno korektan na zracima $\arg \zeta = \varphi_1$ i $\arg \zeta = \varphi_2$.

LITERATURA

- [1] S. G. Krein, *Lieine differencijalne upravnjenja v Banachovom prostranstve*, Moskva 1967.
- [2] E. Hille, R. S. Phillips, *Funkcionalni analiz i polugrupi*, Moskva 1962.
- [3] Dunford N, and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience, New York 1958.
- [4] I. Šchu, *O diferencijalnoj jednačini u Banachovom prostoru*, Zbornik rda PMF u Prištini, br. 7
- [5] K. Yosida, *Funkcionalni analiz*, Moskva 1967.

MBI PROBLEMIN E KOSHIT UNIFORMISHT KOREKT NE HAPESIREN E BANACHUT

Islam Shehu

Rezime

Në këtë punim flitet mbi problemin e Koshit uniformisht korekt të ekuacionit linear diferencial me operator të pakufizuar konstant në hapësirën e Banachut. Jipen kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme, që ekuacioni me operator të mbyllur të jetë uniformisht korekt, me ndihmën e gjeneratorit të semigrupit të klasës C_0 dhe rezolventës së operatorit. Vertetohet se çdo problem i Koshit uniformisht korekt është limit i operatorve të kufizuar. Në fund jipet bashkësia korekte e operatorve dhe zgjidhja analitike.

О РАВНОМЕРНОЙ КОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ислам Шеху

Резюме

В этой работе говорится о равномерной корректной задаче Коши линейного дифференциального уравнения с неограниченным константным оператором в Банаховом пространстве. Даются необходимые и достаточные условия чтоб задача Коши уравнения (I) с замкнутым оператором был равномерной корректной с помощью производящей полугруппы класса C_0 и резольвенты оператора. Доказывается что каждая равномерная корректная задача Коши является пределом ограниченных операторов. Конечно, даётся множество равномерной корректности оператора и аналитичности решения.

NJË KRITER I INTERPOLIMIT NË HAPËSIRËN H^2

H. Turku. M. Berisha, I. Hoxhaj

1

Me P le të shënojmë gjysmëplanin e hapur të djathtë, ndërsa me H^2 hapësirën e Hardit për funksione analitike $f(z)$ në P , në mënyrë që

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dy < \infty$$

pavarësisht nga $x > 0$.

Me l^p , si zakonisht do të shënojmë hapësirën e vargjeve numerike $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, të tillë që

$$\|\{w_k\}\|_p = (\sum |w_k|^2)^{1/p} < \infty, \quad p \in \{0, \infty\}$$

$$\|\{w_k\}\|_p = \sup |w_k| < \infty, \quad p = \infty$$

Është e qartë se l^p do të paraqet hapësirë të Banach-ut për $1 \leq p \leq \infty$, ndërsa hapësirë Frechë për $0 < p < 1$.

Vargun $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ të pikave të ndryshme të P , do ta quajmë (H^2, l^p) interpolativ, në qoftë se për çdo varg $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ ekziston funksioni $f(z) \in H^2$ në mënyrë të tillë që

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Në vazhdim, për $1 \leq p \leq \infty$ problemin interpolativ (H^2, l^p) të vargjeve $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ do ta shënojmë me $Z(H^2, l^p)$. Në qoftë se $q > p$, atëherë duket qartë se $Z(H^2, l^q) \subset Z(H^2, l^p)$.

Në qoftë se për shënimet e mësipërme në vend të H^2 marrim $H^{\infty} = H^{\infty}(P)$, hapësirën e funksioneve analitike të kufizuara në P , atëherë vargun interpolativ që i korrespondohet (H^{∞}, l^p) do ta shënomë me $Z(H^{\infty}, l^p)$.

Prej këtij, është e qartë se $Z(H^\infty, l^q) \subset (H^\infty, l^p)$, $q > p$.

Në anën tjetër L. Carleson ka treguar që vargu $\{k_k\}_{k=1}^\infty \in Z(H^\infty, l^1)$, atëherë dhe vetëm atëherë, në qoftë se $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in Z(H^\infty, l^\infty)$ (Shih [1]). Në këtë rast problemi i interpolimit $Z(H^\infty, l^p)$ në fakt nuk varet nga p . Tani në mënyrë të natyrshme shtrohet pyetja se a vlenë kjo edhe për hapësirën H^2 ?

Në këtë pyetje, përgjigjen negative na jepë kjo teoremë (Shih [2]);

Për çfarëdo çifti (p, q) , $1 \leq p < q \leq \infty$, $Z(H^2, l^q)$ është nënbashkësi e vërtetë e $Z(H^2, l^p)$.

2

Pothuajse në tërë boshtin imagjinar ekziston vlera kufitare

$$f(iy) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x + iy)$$

për funksionin $f(z)$ nga H^2 ; $f(iy) \in L^2$, dhe funksioni $f(z)$ shndërrohet në $f(iy)$ me ndihmën e integralit të Poisson-it

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{x^2 + (y-t)^2} dt, \quad z = x + iy, \quad x > 0, \quad (2)$$

dhe integralit të Cauchy-t

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{-it + z} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (3)$$

Në bazë të produktit skalar

$$(f(z), g(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iy) \overline{g(iy)} dy, \quad f(z), g(z) \in H^2 \quad (3)$$

H^2 është hapësirë e Hilbertit me bërthamë riproduese $K(z, \bar{\xi}) = (z + \bar{\xi})^{-1}$, d.m.th. për ξ të fiksuar në P , $(z + \bar{\xi})^{-1} \in H^2$ dhe për çfarëdo funksioni $f(z) \in H^2$ është

$$f(\xi) = (f(z), (z + \bar{\xi})^{-1}). \quad (5)$$

Barazimi (5) rrjedh nga (3) dhe (4). Si zakonisht norma në H^2 do të jetë

$$\|f(z)\|_{H^2} = (f(z), f(z))^{1/2}.$$

Le të marrim në shqyrtim vargum $\delta^j = \{\delta_k^j\}_{k=1}^\infty$, $j = 1, 2, \dots$, ku me δ_k^j kemi shënuar simbolin Kroneker delta, ku

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{për } j = k \\ 0, & \text{për } j \neq k \end{cases}$$

Në këtë rast, problemi i interpolimit

$$f^j(z_k) = \delta_{kj}, \quad k=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots \quad (6)$$

mund të zgjerohet në H^2 (gjithashtu edhe në H^∞), atëherë dhe vetëm atëherë në qoftë se vargu $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ plotëson konditën Blaschke, d.m.th.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_e z_k}{1 + |z_k|^2} < \infty. \quad (7)$$

Në qoftë se plotësohet (7), atëherë funksioni

$$f(z) = \frac{2 R_e z_k}{z + z_j} \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)}, \quad j=1, 2, \dots, \quad (8)$$

ku me $B_j(z)$ kemi shënuar produktin Blaschke

$$B_j(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{|1 - \bar{z}_k|}{1 - \bar{z}_k} \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k}$$

me zero në pikat $\{z_k\}_{k \neq j}^\infty$ (Shih [3]), është zgjidhje e (6). Faktori $2 R_e z_j (z + z_j)^{-1}$ në anën e djathtë të relacinit (8) e siguron përkatësinë e funksionit $f(z)$ në H^2 .

3

Këtu do të vemë në dukje disa lema të cilat na japin përgjigjen në pyetjen e shtruar ndën pikën 1. Disa prej lemave vetëm do ti formulojmë e vërtetimet e tyre lexuesi do ti gjejë në punimet e publikuara [4], [5], [6].

Lema 1. Le të jetë $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ një varg çfarëdo i numrave kompleks, sikurse në rastin për H^2 , që e plotëson konditë e interpolimit (1) Duke konsideruar

$$\inf \|f(z)\|_{H^2} \\ f(z) \in H^2$$

- (i) kufiri i poshtëm merret për funksionin unik $f_w(z)$;
- (ii) funksioni $f_w(z)$ ndodhet në hapësirën $\mathcal{L}$ të H^2 në largësi prej $\{(z + z_k)^{-1}\}_{k=1}^\infty$.

Lema 2. T është operator linear i $\{\{f(z_k)\}_{k=1}^\infty : f(z) \in H^2\}$ tek H^2 dhe $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in Z(H^2, l^p)$, $1 \leq p \leq \infty$, atëherë dhe vetëm atëherë në qoftë se $l^p \subset \{\{f(z_k)\}_{k=1}^\infty : f(z) \in H^2\}$ dhe restriksi i T tek l^p është operator i kufizuar prej hapësirës së Banach-ut l^p tek hapësira e Hilbertit H^2 .

Lema 3. Për çfarëdo j pozitive, funksioni $f^j(z)$ i dhënë me relacimin (8), është funksion e vetëm me normë minimale në H^2 që i plotëson konditat (6).

Vërtetimi teoremës për rastin $2 \leq p < q \leq \infty$ është dukshëm më i lehtë në sajë të konstruktimit të përkatësisë $Z(H^2, l^q) \subset Z(H^2, l^p)$. Një vërtetim i tillë ndryshon nga ai që është përdorur tek A. Snyder në [1].

Vërtetimi i teoremës për rastet $1 \leq p < 2$ ndohet në [5]. Aty janë të dhëna lemat e formuluar dhe të vërtetuara plotësisht.

LITERATURA

- [1] A. K. Snyder, *Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions*, Studia Math, 39, 1971, 137—153.
- [2] H. Turku, S. V. Švedenko, *Interpolation of l^p sequences by H^2 functions over a half-plane*, Mathematica Balkanica, 6, 43, 1976, 273—280.
- [3] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [4] H. Turku, *Ob jednoj interpolacionoi zadači v klase funkcii H v poluploskosti*, Matematički Vesnik, 2 (15) (30), 1978, 409—420.
- [5] S. V. Švedenko, H. Turku, *Interpolation of l^p sequences by H^2 functions along a sequences of points in a half-plane*, Glasnik Matematički, Vol. 12 (32) (1977), 271—282.
- [6] H. Turku, *Interpolimi me ndihmën e vargjeve nga l^p* , Bul. i pun. shkenc. III (1975), 109—117.

JEDAN KRITERIJUM INTERPOLACIJE U PROSTORU H^2

H. Turku, M. Berisha, I. Hoxhaj

Résumé

Označimo sa P otvorenu desnu poluravan, $H^2 = H^2(P)$ Hardyev prostor analitičkih funkcija na P za koje je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dy < \infty$$

ograničen i nezavisan od $x > 0$, a sa l^p , $1 \leq p < \infty$ Banachov prostor kompleksnih nizova. Sa $Z(H^2, l^p)$ označimo skup interpolacionih nizova. Glavni rezultat glasi:

Za svaki par (p, q) , $1 \leq p < q \leq \infty$, vrijedi da je $Z(H^2, l^q)$ pravi podskup $Z(H^2, l^p)$.

FIZIKË — FIZIKA

FRESNELOVA DIFRAKCIJA NA TANKOJ PRIZMI KOJA POKRIVA POLOVINU PUKOTINE

R. Bejtullahu, J. Moser i H. Spahiu

Abstract

U radu se određuje raspodjela Fresnelovog difrakcionog polja, klasičnog izvora svjetlosti, u nekoj paralelnoj ravnini iza pukotine, čija je polovina pokrivena tankom prizmom. Ovo polje je pokriveno sistemom interferencionih linija koje imaju oblik ekvidistantnih pravaca paralelno s rubovima pukotine. Formula razmaka između ovih linija omogućava određivanje indeksa prelamanja prizme ili uopšte uzevši faznog transparentnog profila. Položaj interferencionih linija koje se nalaze između modulacionih difrakcionih krivih, zavisi od načina postavljanja prizme na otvoru.

UVOD

Pretpostavimo da se na nekoj nepropusnoj ravnini nalazi otvor oblika pukotine širine $2l$ i beskraje dužine. Polovina te pukotine neka je pokrivena tankom prozirnom prizmom pravokutnog presjeka dužine l i visine h . Pretpostavljamo da je $h \ll l$ da bi prizma bila dovoljno tanka. Klasični izvor monohromatične svjetlosti neka ima oblik pravca paralelnog sa rubovima pukotine i neka se nalazi na njenoj simetrali udaljen za a . Nakon prolaza svjetlost se difraktira, a jer svaka od polovine pukotine različito utiče na upadni snop treba očekivati i pojavu interferencije. Difrakciona slika nastaje na ekranu koji je paralelan zapreki i od nje ima udaljenost b . Treba izračunati raspodelu irradiance na ekranu. Račun će biti izveden pomoću Kirchhoffove aproksimacije, koja je dosta pogodna kod difrakcije na faznim transparentnim profilima, [1], [2].

Poprečni presjek ove difrakciono — interferencione šeme skiciran je na slici 1, gdje su date i oznake koje dolaze u računima.

TEORIJA

Kompleksna amplituda difrakcijom skrenute svjetlosti je suma dviju amplituda

$$u = u_1 + u_2 \quad (1)$$

Ovdje je u_1 onaj njezin dio koji potječe od prolaza svjetlosti kroz prizmu, a u_2 onaj dio koji potječe od prolaza svjetlosti kroz slobodni dio pukotine. Kako se radi o cilindričnim valovima, određuju se ti djelovi kompleksne amplitude pomoću integrala

$$u_1 = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} \int_0^l \exp ik(R_1 + r_1 + \delta) d\xi \quad (2)$$

$$u_2 = -\frac{iA}{\pi\sqrt{ab}} \int_{-l}^0 \exp ik(R_2 + r_2) d\xi \quad (3)$$

Simboli u tim formulama objašnjeni su na slici 1, a δ je razlika optičkog puta kroz prizmu i kroz slobodni prostor iste debljine y . Ona iznosi

$$\delta = (n-1)y \quad (4)$$

gdje je n indeks loma materijala prizme. Treba još odrediti dužinu puta u prizmi y . Iz sličnosti trokuta slijedi razmjer

$$y : h = \xi : l$$

i

$$y = \frac{h}{l} \xi$$

pa ako označimo kraće

$$s = (n-1) \frac{h}{l} \quad (5)$$

je

$$\delta = s \xi \quad (6)$$

Uz pretpostavku da su a i b veliki u usporedbi sa ξ - x , možemo približno izračunati odgovarajuće udaljenosti

$$R_1 = a - y + \frac{\xi^2}{2a} \quad R_2 = a + \frac{\xi^2}{2a} \quad r_1 = r_2 = b + \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi}{2b} \quad (7)$$

i kad uvedemo kraće oznake

$$k \left(a + b + \frac{x^2}{2b} \right) = \sigma \quad \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = p^2 \quad (8)$$

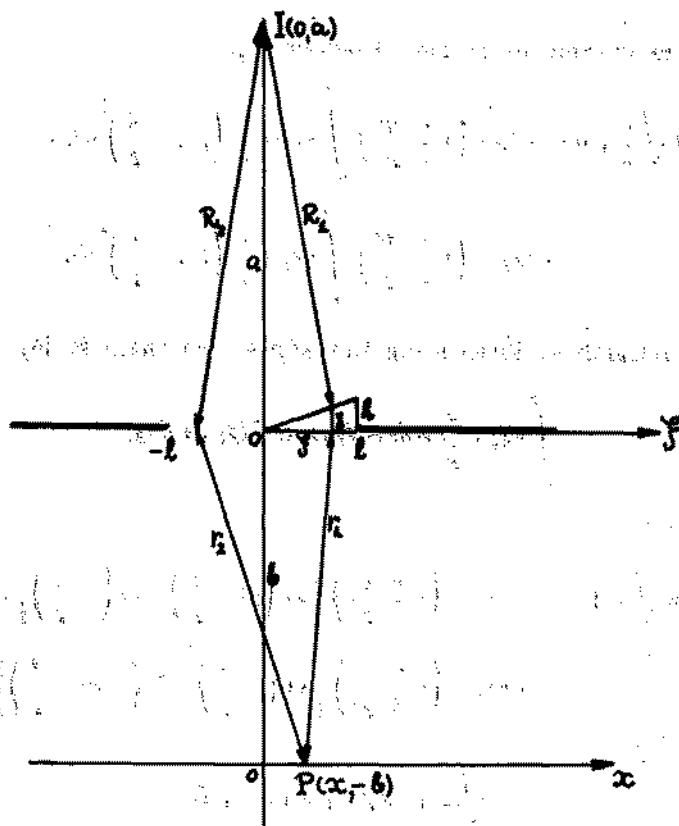
$$\frac{2}{\lambda} \left(\frac{x}{b} - s \right) = q \quad \frac{2x}{\lambda b} = t$$

dobićemo

$$k(R_1 + r_1 + \delta) = \sigma + \frac{\pi}{2} (p^2 \xi^2 - 2q\xi)$$

(9)

$$k(R_2 + r_2) = \sigma + \frac{\pi}{2} (p^2 \xi^2 - 2t\xi)$$



Sl. 1

Dalje uvodimo oznaku

$$G = \left[\frac{i\pi}{lA} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \exp(-i\sigma) \right] \quad (10)$$

Kad (9), (10), (2) i (3) uvrstimo u (1) izlazi

$$G u \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{ab} = \int_0^l \exp i \frac{\pi}{2} (p^2 \xi^2 - 2 q \xi) d\xi + \\ + \int_{-l}^0 \exp i \frac{\pi}{2} (p^2 \xi^2 - 2 t \xi) d\xi$$

Svodimo eksponente na potpune kvadrate [3],

$$G u \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{ab} = \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{p^2} \right) \int_0^l \exp i \frac{\pi}{2} \left(p \xi - \frac{q}{p} \right)^2 d\xi + \\ + \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{t^2}{p^2} \right) \int_{-l}^0 \exp i \frac{\pi}{2} \left(p \xi - \frac{t}{p} \right)^2 d\xi \quad (11)$$

Preostali integrali su Fresnelovog tipa koji su definirani sa [4],

$$\int_0^z \exp i \frac{\pi}{2} z^2 dz = Fr(z) = C(z) + i S(z) \quad (12)$$

Stoga izlazi

$$G u \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{ab} p = \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{p^2} \right) \left[Fr \left(pl - \frac{q}{p} \right) - Fr \left(-\frac{q}{p} \right) \right] + \\ + \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{t^2}{p^2} \right) \left[Fr \left(-\frac{t}{p} \right) - Fr \left(-pl - \frac{t}{p} \right) \right] \quad (13)$$

Prema (8) je

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{ab} p = \sqrt{a+b} = \sqrt{D}$$

gdje je D udaljenost ekrana do izvora svjetlosti. Zbog antisimetričnosti Fresnelovih integrala (13) prelazi u

$$G u \sqrt{D} = \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{p^2} \right) \left[Fr \left(pl - \frac{q}{p} \right) + Fr \left(\frac{q}{p} \right) \right] + \\ + \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{t^2}{p^2} \right) \left[Fr \left(pl + \frac{t}{p} \right) - Fr \left(\frac{t}{p} \right) \right] \quad (14)$$

Da dobijemo intenzitet treba ovaj izraz pomnožiti sa njemu konjugirano kompleksnim izrazom, jer je

$$I = \bar{G}_1 u u \quad (15)$$

i uz

$$K = \frac{G_1}{|G|^2}$$

imamo na lijevoj strani

$$|G u \sqrt{D}|^2 = ID/K \quad (16)$$

Na desnoj strani ćemo prema (12) kraće pisati

$$\begin{aligned} \text{Fr} \left(pl - \frac{q}{p} \right) &= C_1 + i S_1 \\ \text{Fr} \left(\frac{q}{p} \right) &= C_2 + i S_2 \\ \text{Fr} \left(pl + \frac{t}{p} \right) &= C_3 + i S_3 \\ \text{Fr} \left(\frac{t}{p} \right) &= C_4 + i S_4 \end{aligned} \quad (17)$$

Nakon množenja s konjugirano kompleksnim izrazom dobivamo

$$\begin{aligned} ID/K &= (C_1 + C_2)^2 + (C_3 - C_4)^2 + (S_1 + S_2)^2 + (S_3 - S_4)^2 + \\ &+ 2 [(C_1 + C_2) (C_3 - C_4) + (S_1 + S_2) (S_3 - S_4)] \cos \frac{\pi}{2} \frac{q^2 - t^2}{p^2} - \\ &- 2 [(C_1 + C_2) (S_3 - S_4) - (C_3 - C_4) (S_1 + S_2)] \sin \frac{\pi}{2} \frac{q^2 - t^2}{p^2} \end{aligned} \quad (18)$$

U ovom izrazu dolaze triponometrijske funkcije što pokazuje da je difrakciona slika pokrivena interferencionim linijama. Da bi odredili ekstremne vrijednosti uvodimo u (18) polukuteve. Izlazi

$$\begin{aligned} ID/K &= (C_1 + C_2 + C_3 - C_4)^2 + (S_1 + S_2 + S_3 - S_4)^2 - 4 \sin \frac{\pi}{4} \left(\frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) \\ &\left\{ [(C_1 + C_2) (C_3 - C_4) + (S_1 + S_2) (S_3 - S_4)] \sin \frac{\pi}{4} \left(\frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) + \right. \\ &\left. + [(C_1 + C_2) (S_3 - S_4) - (C_3 - C_4) (S_1 + S_2)] \cos \frac{\pi}{4} \left(\frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Najveći intenzitet nalazi se na mjestima za koje je

$$\frac{\pi}{4} \frac{q^2 - t^2}{p^2} = m\pi$$

ako je m cijeli broj. Kada se ovdje uvrste vrijednosti iz (8) izlazi

$$x = \frac{sb}{2} - m \frac{\lambda D}{as} \quad (20)$$

Intenzitet u tim mjestima iznosi

$$I_{\max} = \frac{K}{D} [(C_1 + C_2 + C_3 - C_4)^2 + (S_1 + S_2 + S_3 - S_4)^2] \quad (21)$$

Minimalni intenziteti nalaze se na mjestima za koje je

$$\frac{\pi}{4} \frac{q^2 - t^2}{p^2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

odnosno na mjestima

$$x = \frac{sb}{2} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{as} \quad (22)$$

Intenziteti u tim minimumima su

$$I_{\min} = \frac{K}{D} [(C_1 + C_2 - C_3 + C_4)^2 + (S_1 + S_2 - S_3 + S_4)^2] \quad (23)$$

Dakle, difrakcionu sliku pokriva sistem interferencionih pruga koje imaju oblik ekvidistantnih pravaca paralelnih s rubovima pukotine. Razmak između tih linija je

$$x = \frac{\lambda D}{as} \quad (24)$$

Posljednja relacija nam omogućava da odredimo indeks prelamanja prizme ili faznog profila. Naime iz (5) i (24) sledi izraz za indeks prelamanja

$$n = 1 + \frac{\lambda I}{hx} \left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

Jasno se vidi da su sve veličine poznate na osnovu geometrije ove difrakto-interferencione šeme.

Dobiveni rezultati mogu se specijalizirati za slučaj kad nema prizme, ili pak kad lijeva strana snopa svjetlosti na sl. 1 nije ograničena. U prvom slučaju treba uzimati da je $h=0$ i prema (5) je tada $s=0$. Tada iz (8) slijedi da je $q=t$ pa se formula (14) specijalizira na

$$Gu\sqrt{D} = \exp - \left(i \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{p^2}\right) [C_1 + C_3] + i [S_1 + S_3] \quad (25)$$

odnosno intenzitet

$$I = \frac{K}{D} [(C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2] \quad (26)$$

Ovo je formula za Fresnelovu difrakciju na pukotini širine $2l$, pa vidimo da specijalizacija vodi do ispravnog rezultata, [5]. Formula (26) pokazuje da tad nema interferencije, nego postoji samo difrakcija. Drugu specijalizaciju lako je provesti ako u (14) stavimo

$$Fr\left(pl + \frac{t}{p}\right) = \frac{1}{2}(1 + i)$$

kako to sledi iz osobine Fresnelovih integrala, [6].

Ova šema može se namjestiti i na drugi način. Naime, tako da se prizma okrene kako to prikazuje slika 2. U tom slučaju razmjer za izračunavanje debljine prizme, na mjestu prolaza svjetlosti treba postaviti ovako:

$$y:h = (l - \xi):l$$

pa mjesto (6) imamo

$$\delta = s(l - \xi) \quad (27)$$

Budući da je ovdje ξ negativan, treba uzeti vrijednost za

$$q = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{x}{b} + s \right)$$

Zbog člana sl pred integralom formule (11) dolazi faktor

$$\exp i \frac{\pi}{2} \left(\frac{4s}{l} - \frac{q^2}{p^2} \right)$$



Sl. 2

Kad se račun provede do kraja izlazi formula

$$ID/K + (C_1 + C_2 + C_3 - C_4)^2 + (S_1 + S_2 + S_3 - S_4)^2 - 4 \sin \frac{\pi}{4} \left(4s \frac{l}{\lambda} - \frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) \\ + [(C_1 + C_2)(C_3 - C_4) + (S_1 + S_2)(S_3 - S_4)] \sin \frac{\pi}{4} \left(2s \frac{l}{\lambda} - \frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) + \\ + [(C_1 + C_2)(S_3 - S_4) - (C_3 - C_4)(S_1 + S_2)] \cos \frac{\pi}{4} \left(2s \frac{l}{\lambda} - \frac{q^2 - t^2}{p^2} \right) \quad (28)$$

Maksimumi intenziteta interferencionih linija nalaze se na mjestima

$$x = \left(s \frac{l}{\lambda} - m \right) \frac{\lambda D}{as} - \frac{sb}{2} \quad (29)$$

Za njihove visine opet vrijedi formula (21). Razmak između interferencionih linija je (24), dakle isti kao u prethodnom slučaju. Razlika je samo u tom što u ovom slučaju interferencione linije nisu na istom mjestu kao u prvom slučaju nego su nešto pomaknute.

LITERATURA

- [1] L. I. Mandelštam, *Lekcii po optike, teorii atnasitelnosti i kvantovoi mehanike*, str. 14—21, Moskva (1972).
- [2] Dž. Gudmen, *V vedenie v Furje — otpiku* str. 109—121, Moskva (1970).
- [3] J. M. Stone, *Radiation and Optics*, str. 188—193, N.Y. (1963).
- [4] G. Bruhat, *Optique*, str. 190 Paris (1965).
- [5] F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, str. 370—73, N.Y. (1950).
- [6] J. Arsac, *Transformation de Fourier*, str. 206—8, Paris (1961).

DIFRAKSIONI I FRENELIT NE PRIZME TE HOLLE E CILA E MBULON GJYSMEN E QARJES

R. Bejtullahu, J. Moser dhe H. Spahiu

Re z i m e

Në këtë punim përcaktohet shpërndarja e fushës së difraksionit të Frenelit, në ndonjë rrafsh paralel prapa qarjes, gjysmën e së cilës e mbulon prizma e hollë. Kjo fushë është e përbër nga një sistem i vijave të interferencës të vendosura paralel me skajet e qarjes. Shprehja matematike, për largësi në mes të këtyre vijave mudëson përcaktimin e indeksit të thyerjes së prizmës apo në përgjithësi të profilin fazorë transparent. Pozita e vijave të interferencës, të cilat shtrihen në mes të dy lakoreve të modulimit difraksional, varet nga mënyra e vendosjes së prizmës në qarje.

FRESNEL DIFFRACTION IN SLIT, HALF OF WHICH IS COVERED WITH THIN PRISM

R. Bejtullahu, J. Moser and H. Spahiu

S u m m a r y

In this article is given the distribution of Fresnel's diffractive field, of classical source in some parallel plane behind the slit, half of which is covered with the thin prism. This field is covered with the system of the interferential lines that have a shape of equidistant directions parallel to the edges of the slit. Formula of the distance between these lines makes possible the determination of refraction's index of the prism or in general, refraction of the transparent phase profile. The position of the interferential lines which are situated between modulation, diffractive curves, depends on the way one places the prism in the slit.

SHPËRNDARJA E DENDËSITETIT TË RRYMËS GJATË PROCESIT TË ZBRAZJES ELEKTRIKE NË MAGNETRONIN PLANAR

Jahi Hoxha, Lutfi Istrefi dhe Ahmet Veseli

Abstrakt

Është hulumtuar plazma e hidrogjenit në magnetronin planar. Në bazë të rezultateve spektroskopike për dendësitë e grimcave neutrale dhe matjeve elektrike, është llogaritur shpërndarja e dendësitë të rrymës elektrike. Për konditat e shtypjeve 50 90 e 130. Pa dhe të induksionit magnetik 0,09 e 0,36 T, është vlerësuar varshmëria e rrymës jonike nga numri i neutraleve dhe induksioni magnetik.

TEORIA E LËVIZJES SË GRIMCAVE ELEKTRIKE NËN NDIKIMIN E FUSHAVE TË JASHTME MAGNETIKE DHE ELEKTRIKE ($\vec{B}$ DHE $\vec{E}$)

Metoda orbitale në fizikën e plazmës aplikohet për studimin e lëvizjes së grimcës elektrike nën ndikimin e fushave të jashtme të përcaktuara. Veçori e kësaj metode është se nuk përfillë efektin e bashkësisë së grimcave tjera elektrike, andaj aplikimi i sajë është i kufizuar vetëm për plazmën me dendësitë të vogël¹.

Lëvizja e grimcës me masë m_α dhe elektricitet e_α , nën ndikimin e fushave të jashtme $\vec{E}$ dhe $\vec{B}$, përshkruhet² me ekuacionin:

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = e_\alpha [\vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t) + F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)] \quad (1)$$

ku $F_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ paraqet rezultatën e të gjitha forcave të natyrës joelektromagnetike. Në qoftë se vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{B}$ janë të pandryshuashëm, ndërsa anëtari i fundit është i parërfillshëm, ekuacioni i mëparshëm do të ketë formën:

$$\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (2)$$

ku anëtari i parë i shumës paraqet lëvizjen rrethore të grimcës, me frekuencë rrethore $\omega_a = \frac{e_a B}{m_a}$, rreth vijave të forcës të fushës magnetike, ndërsa anëtari i dytë, për forca shumë të vogla, mund të merret si faktor perturbacioni në lëvizjen rrethore ciklotronike. Në qoftë se shprehja e fundit projektohet në komponentet e lëvizjes, në drejtim paralel dhe prependicular me vektorin $\vec{B}$ fitojmë:

$$\frac{dv_{a\parallel}}{dt} = \frac{e_a \vec{E}_{\parallel}}{m_a} \quad (3)$$

$$\frac{dv_{a\perp}}{dt} = \frac{e_a}{m_a} (\vec{v}_{a\perp} \times \vec{B} + \vec{E}_{\perp}) \quad (4)$$

Ekuacioni (3) paraqet çvendosjen e grimcës nën ndikimin e forcës së jashtë $e_a \vec{E}_{\parallel}$ në drejtim të vijave të forcës të fushës magnetike, ndërsa ekuacioni (4) përveç lëvizjes ciklotronike përmbanë edhe çvendosjen e grimcës në drejtim prependicular me atë të fushës magnetike. Duke pasë parasyshë se vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{B}$ janë konstant për komponenten e shpejtësisë prependikulare mund të shkruhet shprehja:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}'_{\perp} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (5)$$

e cila i plotëson konditat e ekuacionit (4). Anëtari i parë i ekuacionit (5) paraqet shpejtësinë e lëvizjes ciklotronike, kurse anëtari i dytë paraqet shpejtësinë e çvendosjes së grimcës në drejtimin prependicular me vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{B}$ respektivisht shpejtësinë driftore.

Rasti më i përshtatshëm paraqitet kur drejtimet e fushave të jashtme janë prependikulare, $\vec{E} \perp \vec{B}$, andaj rrjedhë se:

$$V_d = \frac{E}{B} \quad (6)$$

Për shqurtimin e lëvizjes së grimcave elektrike, në prezencën e neutraleve, gjithqyshë duhet marrë në konsiderim edhe anëtarin e tretë të shumës në ekuacionin (1). Në qoftëse vektori $\vec{E}$ është me orientim të boshtit X , ndërsa $\vec{B}$ me orientim të boshtit Y dhe vlerat e tyre janë të pandryshuara, nga ekuacioni (1) rrjedhë se:

$$m_a \frac{dv_{ax}}{dt} = e_a (E_x - v_{ax} B) + F_{ax} \quad (7)$$

$$m_\alpha \frac{dv_{\alpha y}}{dt} = -e_\alpha v_\alpha \cdot B + F_{\alpha y} \quad (8)$$

$$m_\alpha \frac{dv_{\alpha z}}{dt} = 0 \quad (8a)$$

ku $F_\alpha = -m_\alpha v_\alpha v_{\alpha n}$ është forca e fërkimit si rredhim i goditjeve ndërmjet grimcave të elektrizuara dhe neutraleve.

Në rastet kur dendësiteti i plazmës është i vogël arihet një gjendje stacionare, në të cilën forcat e veprimit të jashtëm ekuilibrohen me gradientin e shtypjes në drejtim të komponentës normale³. Në kondita të tilla gazi elektronik dhe jonik përafërsisht janë homogjen, rrjedhja e tyre stacionare, andaj nga ekuacionet (7) e (8) rrjedhë se:

$$0 = -e_\alpha E_x + e_\alpha v_{\alpha x} \cdot B - m_\alpha v_{\alpha x} \cdot \bar{v}_{\alpha n} \quad (9)$$

$$0 = -e_\alpha v_{\alpha y} B - m_\alpha v_{\alpha y} \bar{v}_{\alpha n} \quad (10)$$

ku $\bar{v}_{\alpha n}$ është frekuenca mesatare e goditjeve të grimcave elektrike me neutralet e gazit. Nga ekuacionet e fundit fitohen shprehjet për komponentet e shpejtësisë së shvendosjes së grimcave elektrike për konditat kur kemi në konsiderim edhe dendësitetin e atomeve-molekuleve të gazit neutral:

$$v_{\alpha x} = \frac{\mu_{\alpha n}}{1 + (w_\alpha \tau_{\alpha n})^2} \cdot E_x \quad (11)$$

$$v_{\alpha y} = \frac{\mu_{\alpha n} w_\alpha \tau_{\alpha n}}{1 + (w_\alpha \tau_{\alpha n})^2} \cdot E_x \quad (12)$$

ku $\mu_{\alpha n} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \cdot v_{\alpha n}}$ është levizshmëria e grimcave elektrike në mungesë të induksionit magnetik, $\vec{B}$.

Është e ditur se rryma elektrike fitohet nga shvendosja e grimcave elektrike, andaj në bazë të ekuacioneve të fundit me lehtësi fitohen shprehjet për dendësitetin e rrymave elektrike në drejtimet përkatëse:

$$j_x = \sum_\alpha \frac{e_\alpha n_\alpha \mu_{\alpha n}}{1 + (w_\alpha \tau_{\alpha n})^2} E_x \quad (13)$$

$$j_y = \sum_\alpha \frac{e_\alpha n_\alpha \mu_{\alpha n} (w_\alpha \tau_{\alpha n})}{1 + (w_\alpha \tau_{\alpha n})^2} \quad (14)$$

Nga ekuacionet e fundit rrjedhë se përveç komponentës themelore të rrymës elektrike, j_x , në drejtim të fushës së jashtme elektrike, shfaqet edhe komponenta perpendikulare e rrymës, j_y , e njohur si rryma ex Hall-it.

REZULTATET DHE DISKUTIMI

Në konditat e veprimit të fushave të jashtme në drejtimet perpendikulare, $\vec{E} \perp \vec{B}$, është hulumtuar zbrazja elektrike në gazin e hidrogjenit në magnetronin planar. Katoda gjendet në anodë, e kjo e fundit është vënë në kontakt me tokësimin. Distanca anodë-katodë është $D = 3 \times 10^{-3}$ m. Përshkrimi detalj i magnetronit është dhënë në rcf. (4).

Për intensitetin e rrymës $I = 0,25$ A, është matur tensioni në katode e njëkohësisht me vetëshkrues janë regjistruar profilet e vijës spektrale H_β , në kondita të ndryshme të zbrazjes elektrike.

Analiza detaje e profileve të vijës spektrale H_β vanë në dukje se, këto të dhëna krijojnë kushte optimale që të përcaktohet dendësiteti i grimcave neutrale (atomeve-molekulave) të gazit, në zbrazjen magnetronike. Rezultatet e dendësitetit të neutraleve⁴ dhe përmbajtëja e ekuacioneve (13) e (14) imponojnë shqyrtimin e shpërndarjes së dendësitetit të rrymës elektrike në kondita të reja të dendësitetit të gazit në zbrazjen magnetronike. Me këtë rast komponentet e dendësitetit të rrymave elektrike janë llogaritur për shtypjet e gazit 50, 90 e 130 Pa dhe induksion magnetik 0,09 e 0,36T.

Logaritjet janë zbatuar me dy aproksimime të vlerave të prerjeve terthore për goditjet e grimcave: a) duke pasqyruar parasysh që, prerja terthore për bartjen e ngarkesës elektrike të joneve shumë pak ndryshon në intervalin e energjive të problemit që shqyrtohet⁵, në rastin konkret është marrë si e pandryshuar⁶, 6×10^{-21} m². b) Me që në konditat e eksperimentit në fjalë numri i molekulave është dominant ndaj atij të atomeve, fakt ky që e dëshmojnë spektrogramet e fituara, në konsiderim është marrë prerja tërthore totale e goditjeve të elektronit me molekulat e hidrogjenit⁷.

Për shkak se influenca e induksionit magnetik në elektrone është shumë e madhe, ndërsa gati e papërfillshme në jone, shpejtësia e elektroneve ndërmjet dy goditjeve të njëpasnjëshme është llogaritur sipas ekuacionit (6), kurse e joneve sipas⁷ dkuacionit:

$$v_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{eE\lambda_i}{m_i}} \quad (15)$$

ku E paraqet vlerën mesatare të fushës elektrike λ_i gjatësinë e rrugës së lirë ndërmjet dy goditjeve të njëpasnjëshme të joneve me neutralet, ndërsa m_i masën en joneve.

Rezultatet e llogaritjeve janë paraqitur në tabelat I dhe II. Vlerat e fituara për dendësitetin e rrymës elektrike vejnë në dukje se magnetroni planar paraqet një burim të zbrazjes elektrike me karakteristika tjera nga burimet kovencionale (gypat për zbrazje elektrike, harqet, etj.).

Në qoftëse vështrojmë rezultatet e dendësitetit të rrymës elektrike mund të konstatojmë se: a) komponenta themelore të rrymë, j_x , kryesisht është e kthyer nga lëvizja e joneve pozitive në drejtim të veprimit të

TABFLA I

P (Pa)	B (T)	N (m ⁻³) $\times 10^{21}$	v_e^d (m/s) $\times 10^5$	v_f^d (m/s) $\times 10^6$	λ_e (m) $\times 10^{-3}$	λ_f (m) $\times 10^{-3}$	w_e (s ⁻¹) $\times 10^{10}$	w_i (s ⁻¹) $\times 10^6$	$w_e \tau_e$	$w_i \tau_i$	n_i (m ⁻³) $\times 10^{15}$
130 Pa	0,09 T	2,69	9,8	3,45	2,8	0,56	1,6	4,3	45	0,07	3,33
	0,36 T	0,72	3,15	7,58	10,56	2,11	6,33	17,2	2128	0,48	5,14
90 Pa	0,09 T	1,89	10,74	4,31	4,0	0,80	1,6	4,3	59,6	0,08	2,9
	0,36 T	0,50	3,24	9,17	15,15	3,0	6,33	17,2	2960	0,56	5,06
60 Pa	0,09 T	1,08	12,6	6,17	7,0	1,4	1,6	4,3	89	0,097	2,18
	0,36 T	0,29	3,6	12,8	26,4	5,28	6,33	17,2	4642	0,71	4,8

TABELA II.

		μ_{ix} m^2/Vs	μ_{iy} m^2/Vs	μ_{ex} m^2/Vs	μ_{ey} m/Vs	j_{ix} A/m^2	j_{iy} A/m^2	j_{ex} A/m^2	j_{ey} A/m^2
130 Pa	0,09 T	0,74	0,051	0,25	11,2	46,70	3,22	15,8	707
130 Pa	0,36 T	1,08	0,517	13×10^{-4}	2,76	62,4	30,0	0,075	159,5
90 Pa	0,09 T	0,88	0,07	0,184	10,97	51,7	4,1	10,08	645
90 Pa	0,36 T	1,19	0,67	0,0009	2,76	62,4	35,0	0,06	145
50 Pa	0,09 T	1,075	0,105	0,124	11,0	57,7	5,5	6,46	573
50 Pa	0,36 T	1,31	0,93	0,0006	2,78	62,4	44,3	0,03	132

fushës elektrike, $\vec{E}$. Kontributi i elektroneve në këtë komponent të rrymës është 10—30% për fushën magnetike 0,09 T, ndësa i papërfilshëm është për induksionin prej 0,36 T. b) komponenta e rrymës elektrike në drejtimin perpendikular me fushën elektrike formohet kryesisht nga levizija e elektroneve me shpejtësinë driftore v_d . Kontributi i joneve në këtë komponent është i vogël, mirëpo ai rritet me smadhimin e induksionit magnetik, $\vec{B}$. c) kontributi i joneve në përbërjen e rrymës elektrike smadhohet me rritjen e induksionit magnetik, ndërsa zvogëlohet me rritjen e shtypjes së gazit.

Rezultatet spektroskopike tregojnë se dendësiteti i neutraleve zvogëlohet me rritjen e induksionit magnetik, kurse nga tabela II vërehet se rryma jonike smadhohet me rritjen e B . Nga këto të dhëna mund të konkludohet se shkaktare e zvogëlimit të numrit të grimcave neutrale në zbrazjen magnetronike është rryma jonike. Ngrohja e gazit në dhomën e zbrazjes elektrike varet prej intensitetit të rrymës elektrike, e posaçërisht prej rrymës jonike. Për shkak të rritjes së temperaturës së gazit, respektivisht shtypjes, një numër grimcash neutrale (atome ose mo-

lekula)largothen nga dhoma e zbrazjes, kalojnë në rezervuarin e gazit të ftohët. Numëri i neutrleve në magnetron zvogëlohet.

Nga analiza e të gjitha rezultateve mund të nxjerrim edhe këtë përfundim se, dendësiteti i rrymës elektrike të krijuar nga çvendosja e joneve është në përpjestim të drejtë me intensitetin e fushës magnetike, $j_1 \propto B$, kurse në përpjestim të zhdrejtë me numërin e neutrleve të gazit në magnetron, $j_1 \propto \frac{1}{N}$.

LITERATURA

- [1] L. Spitzer, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers, New York (1962)
- [2] J. L. Delcroix, *Introduction to the Theory of Gases*, Interscience Publishers, New York (1960)
- [3] M. Mitchner, Ch. H. Kryger, *Partially Ionized Gases*, New York — London — Sydney — Toronto, John Wiley (1973)
- [4] J. Hoxha, *Dopplerovo širenje Balmerove linije H β u magnetronskom izboju u vodiku*, Zagreb 1981 (magistarski rad)
- [5] P. Laborie, J. M. Rocard, J. A. Rees, *Sections efficaces électronique coefficients*, Dunod Paris (1968)
- [6] E. W. McDaniel, E. A. Mason, *The Mobility and Diffusion of Ions in Gases*, New York—London—Sydney—Toronto John Wiley and Sons (1973)
- [7] Engelhardt G., Phelps A. V., *Phys. Rev.* 131, 3115 (1963) and Phelps A. V., *Rev. Mod. Phys.*, 40, 399 (1968)
- [8] A. V. Engel, *Jonizovani gasovi*, Beograd (1970) (përkthim nga anglishtja)

RASPODELA GUSTOÇE STRUJE U TOKU IZBOJNOG PROCESA U PLANARNOM MAGNETRONU

Jahi Hoxha, Lutfi Istrefi i Ahmet Veseli

Sažetak

Izračunata je gustoća struje za konkretne eksperimentalne uvjete u izboju vodika u planarnom magnetronu. Račun je zasnovan na eksperimentalnim rezultatima o gustoći neutrala u izboju i električnim mjerenjima, a sproveden je pomoću orbitalne metode za ispitivanje plazme.

Rezultati pokazuju da osnovnu komponentu (u pravcu električnog polja) čini ionska struja. Doprinos elektrona ovoj komponenti je 10—30% za $B=0,09$ T, a zanemativ je pri $B=0,36$ T. Normalna komponenta elektronske struje (u smjeru okomitom na E) je oko 40 puta veća od osnovne, uz 130 Pa i 0,09 T. dok pri 50 Pa i 0,36 T je oko 4000 puta veća od osnovne komponente struje sastavljene od elektrona. Međutim, apsolutna vrijednost elektronske struje opada sa povećanjem magnetske indukcije, B. Gustoća ionske struje raste sa povećanjem B. Tako na pr. gustoća normalne komponente ionske struje je 3—5,5 A/m² uz 0,09 T dok, 30—44 A/m² pri $B=0,36$ T. Prema tome proizilazi da raspodjela gustoće struje, pored ostalog, u velikoj mjeri ovisi o magnetskoj indukciji B i o gustoći neutrala u izboju. Procjenjuje se da gustoća ionske struje je proporcionalna magnetskoj indukciji, dok obrnuto je proporcionalna gustoći neutrala u izboju.

DISTRIBUTION OF CURRENT DENSITIES IN PLANAR MAGNETRONS DISCHARGE

Jahi Hoxha, Lutfi Istrefi and Ahmet Veseli

Summary

In this paper is calculated current's density of hydrogen discharge in planar magnetron at concrete condition. We use the orbital method of plasma investigation. Calculations are based on experimental results for density of neutrals and on electrical measurements.

Calculation show that basic component of current is ion current. The contribution of electrons in this component is 10—30% at 0,09 and very small at 0,36 T. The normal component of electronic current is a factor of 40 then basic at 130 Pa and 0,09 T, so a factor of 4000 at 50 Pa and 0,36 T. The absolute value of the current is decreased for greater B. We found that density of normal ionic current is 3—5,5 A/m² for 0,09 T and 30—44 A/m² for 0,36 T. Measurement showed that current density distribution is a function of B and neutrals densities. The density of ionic current is proportional to induction and inverse proportional to neutrals density.

DIAGNOSTIKA E PLAZMËS „Z — PINÇ“ ME KONCENTRIM TË MADH ELEKTRONESH

L. Istrefi

Abstract

Në punim është paraqitë metoda dhe rezultatet e diagnostikës së burimit të plazmës „Z — pinç“ me dimensione; gjatësi 56 cm dhe diametër 2,6 cm, në të cilin janë matë profilet e disa vijave spektrale të Ar II, Ar III në plazmën me përbërje $N_2:Ar:He=60\%:20\%:20\%$, si dhe profilet e vijave të disa multi pleteve të N II në plazmën me përbërje $He:N_2:CO_2=75,56\%:18,1\%:6,34\%$.

Koncentrimi i elektroneve është përcaktuar nga profili i Shtarkut i vijave spektrale Ar II 484,7 nm dhe He I 388,89 nm në rastin e matjes së profileve të vijave të aronit dhe u fituan vlerat $Ne=4,45 \cdot 10^{23} m^{-3}$ nga vija e argonit, përkatesisht $Ne=4,8 \cdot 10^{23} m^{-3}$ nga vija e HeI. Në rastin e matjes së profilet të vijave të azotit koncentrimi i elektroneve u përcaktua nga vija spektrale He II 468,6 nm dhe u fitua vlera $Ne=4,66 \cdot 10^{23} m^{-3}$.

Temperatura e përcaktuar nga profili i Doplerit të vijave të argonit është 30.000 K — 33.000 K, ndërsa nga vijat e azotit 32.000 K — 35.000 K. Temperatura u përcaktua edhe nga drejtëza e Bolcmanit e fituar nga nëntë vija spektrale të Ar II dhe është 31.900 K; gjithashtu në rastin e azotit nga drejtëza e Bolcmanit e gjashtë vijave të N II u fitua temperatura 32.800 K.

Mund të përfundohet se parametrat e plazmës të përcaktuar me dy metoda të ndryshme përputhen mirë.

HYRJE

Gjendja fizike e plazmës përshkruhet me anë të parametrave të gjendjes: temperaturën (T), dendësisë së elektroneve (Ne) dhe koncentrimin e elementeve në përbërjen e sajë. Përcaktimi i parametrave të plazmës, i njohur si diagnostikë e plazmës, është i domosdoshëm për çdo burim plazme që përdoret për matje spektroskopike. Temperatura dhe koncentrimi i elektroneve në plazmë varen kryesisht nga rryma e shkarkesës. Diagnostika e burimeve të plazmës me koncentime të mëdha elektronesh ($Ne > 10^{22} m^{-3}$) shpeshherë vështirësohet për shkak të efekteve sekondare, simetrisë së burimit, kontinuumit të lartë të plazmës, e të tjera.

Gjithnjë është më mirë që parametrat e plazmës të përcaktohen me metoda të pavarura, në mënyrë që gabimi i bërë në përcaktimin e një madhësie të mos ndikojë në vlerën e madhësisë që duhet të përcaktojmë. Shpeshherë një gjë e tillë është e pamundur. Metodë më e sigurtë në përcaktimin e koncentrimite të elektroneve është interferometria laserike e plazmës. Në këtë rast kjo metodë nuk dha rezultate pasi intensiteti i kontinuumit ishte më i lartë se maksimumet e shiritave interferues së rrezes laserike ($He-Ne \lambda = 632,8 \text{ nm}$) me plazmën.

Temperatura e lartë e plazmës mund të caktohet me metoda të ndryshme (1,5) varësisht nga lloji i burimit, mundësitë eksperimentale e të tjera.

Në punim janë paraqitë rezultatet e diagnostikës së burimit të plazmës „Z pinç“ me të cilin janë matë parametrat e zgjerimit të Shtarkut të disa vijave spektrale të Ar II, Ar III dhe N II.

Ekspimenti është përshkruar hollësisht në ref. (5).

REZULTATET DHE DISKUTIMI I TYRE

1. Matja e koncentrimin të elektroneve nga profili i Shtarkut i vijave spektrale

Gjysmëgjërësia e shtarkut e vijave spektrale është shumë e ndjeshme në koncentrim të elektroneve në plazmë. Në mbështetje të këtij fakti, dendësia e elektroneve në plazmë mund të përcaktohet duke matë gjysmëgjërësinë e shtarkut.

Gjatë eksperimentit me qëllim të matjes së parametrave të zgjerimit të Shtarkut të vijave spektrale të Ar II, Ar III, dhe N II, u përdoren dy lloje përzierjesh gazore në plazmën „Z-pinç“.

a) Përzierja $N_2:Ar:He = 60\%:20\%:20\%$, dhe

b) Përzierja për laser- CO_2 e përbërë

nga $He:N_2:CO = 75,56\%:18,1\%:6,34\%$.

Në rastin e parë dendësia elektronike u përcaktua në bazë të profilet të Shtarkut të vijave Ar II, Multiplet 6, $484,78 \text{ nm}$ dhe He I $388,89 \text{ nm}$ të rekomanduara edhe nga literatura, pasi për të dyja ekziston llogaritje komplete (2) si dhe mjaft të dhëna eksperimentale të gjysmëgjërësisë (3, 4). Vija He $388,89 \text{ nm}$, përkrah saktëia krahasohet me vijën H_β të hidrogjenit dhe është shfrytëzuar për këtë qëllim në shumë punime (1, 2, 3, 4).

Duke krahasuar gjysmëgjërësinë eksperimentale të vijës Ar II $484,78 \text{ nm}$, $W_{\text{exp}} = 0,163 \text{ nm}$ me atë teorike (2), u përcaktua dendësia elektronike $N_e = 4,6 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$.

Në rastin e vijës spektrale të He I $388,89 \text{ nm}$ gjysmëgjërësia e plotë W_m e Shtarkut përbëhet prej komponentës elektronike W_e , e cila është rezultat i goditjes së emitorit me elektronet dhe komponentës jonike w_j .

$$W_m = W_e + w_j \quad [1]$$

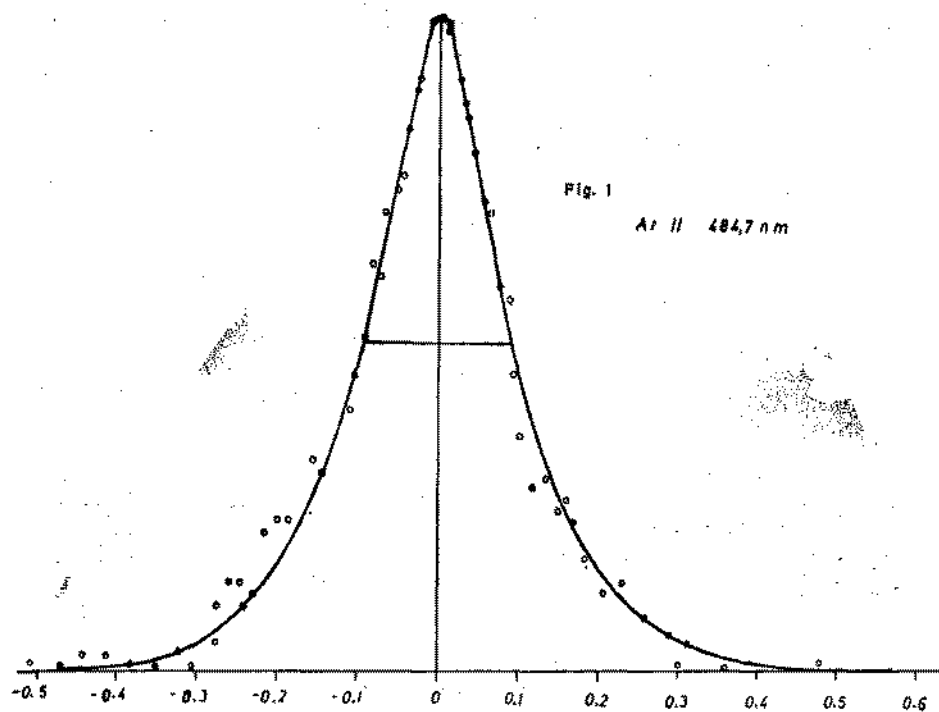


Fig. 1.

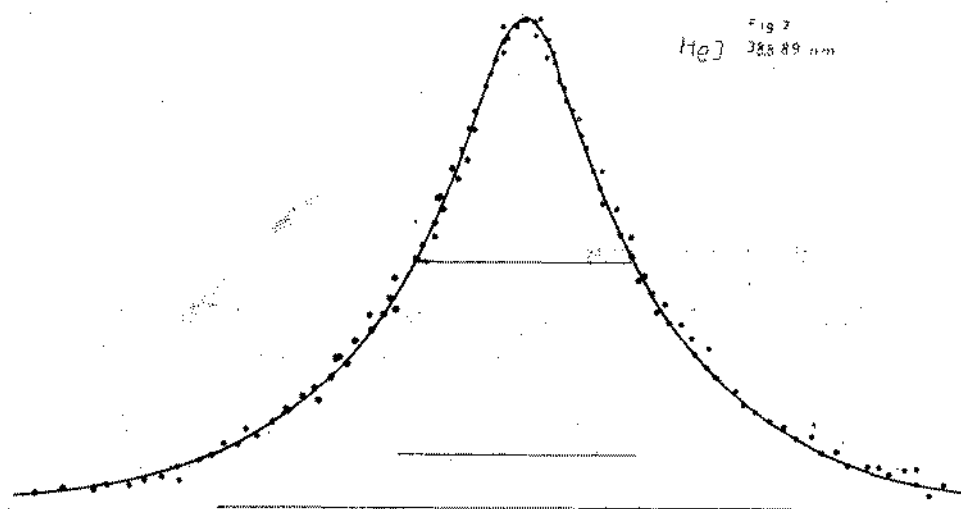


Fig. 2.

Në literaturë (2, 4) është zhvilluar metoda e ndarjes së komponenteve w_e dhe w_i nga gjysmëgjërësia eksperimentale sipas formulës, nga ref. (1),

$$w_{th} \approx [1 + 1,75 \cdot 10^{-5} N^{1/4} A (1 - 0,068 Ne^{1/6} T^{-1/2})] \cdot 10^{16} w_{Ne}$$

ku w_{th} — është gjysmëgjërësia teorike A — parametri i zgjerimit jonik nga ref. (2), dhe w — gjysmëgjërësia. Pasi temperatura e plazmës është matë me metodë tjetër të pavarur, është bërë paraqitja grafike $w=f(Ne)$ si në fig. 3, ku janë dhënë varshmëritë funksionale të gjysmëgjërësive (w_i), teorike (w_{th}), dhe elektronike nga dendësia elektronike (Ne).

Nga grafiku janë përcaktuar kontributet e zgjerimit elektronik $w_e = 10,42, nm$ dhe jonik $w_i = 0,19 nm$. Duke krahasuar gjysmëgjërësinë elektronike w_e dhe vlerën teorike w_{th} për temperaturën e dhënë $T = 31\,900\,K$, u gjetë dendësia e elektronike $Ne = 4,45 \cdot 10^{23} m^{-3}$.

Gjatë matjes së profilit të vijave $N\ II$ është përdorë përzierja gazore e laserit CO_2 e cila përmban helium. Dendësia elektronike u përcaktua nga profili i Shtarkut i vijës spektrale $He\ II\ 468,6\ nm$, profili eksperimental i së cilës është paraqitë në fig. 4. Koncentrimi elektronik i plazmës në funksion të gjysmëgjërësisë së plotë dhe temperaturës të kjo vijë spektrale sipas ref. (7) ipet me formulën

$$Ne = 1,82 \cdot 10^{16} \Delta\lambda_{1/2} (T_e)^{1/2} \quad [2]$$

ku $\Delta\lambda$ — është gjysmëgjërësia e shprehur në angstromë, Ne në (cm^{-3}) dhe T_e në (eV) . Nga gjysmëgjërësia e kësaj vize $\Delta\lambda = 1,25\ nm$ në temperaturë $T = 32800\ K$, u gjetë se dendësia elektronike e plazmës është $Ne = 4,45 \cdot 10^{17} cm^{-3}$.

Varësia e gjysmëgjërësisë së vijës spektrale $He\ II\ 468,6\ nm$, nga tensioni i shkarkesës elektrike, përkatësisht nga koncentrimi elektronik, pasi ky i fundit varet nga tensioni i shkarkesës, për tension $4\ kV$ është paraqitë në fig. 5.

2. Matja e temperaturës

Temperatura e plazmës mund të përcaktohet nga profili i Doplerit i vizës spektrale (1, 3, 4, 5). Kjo metodë është e suksesshme të plazmat me temperaturë të lartë.

Në bazë të dekonvolumit të profileve eksperimentale (6), fitohet gjysmëgjërësia eksperimentale e Gausit, e cila shprehet me formulën.

$$\Delta\lambda_{1/2}^G)^2 = (\Delta\lambda_{1/2}^D)^2 + (\Delta\lambda_{1/2}^{ins})^2 \quad (3)$$

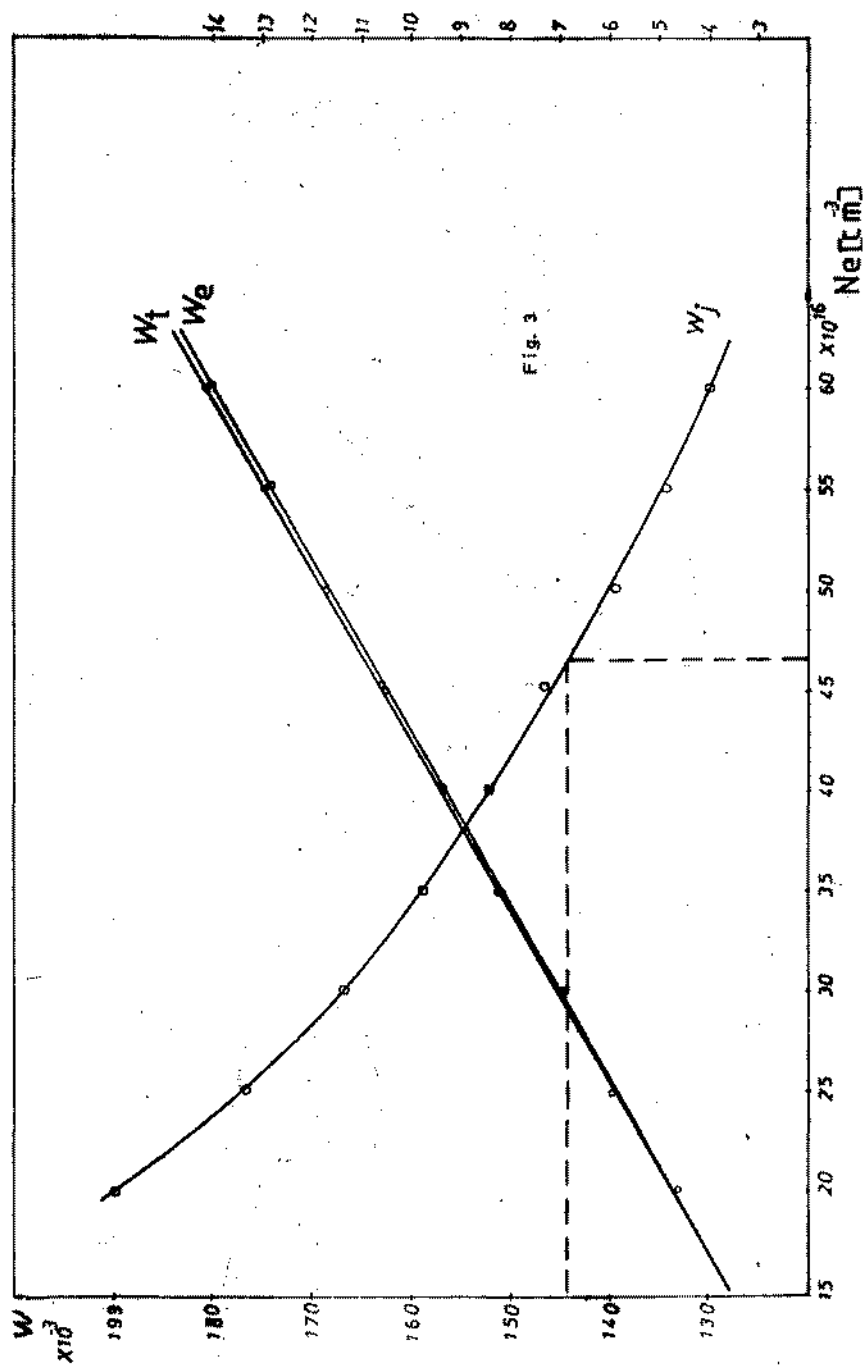


Fig. 3

Fig. 3.

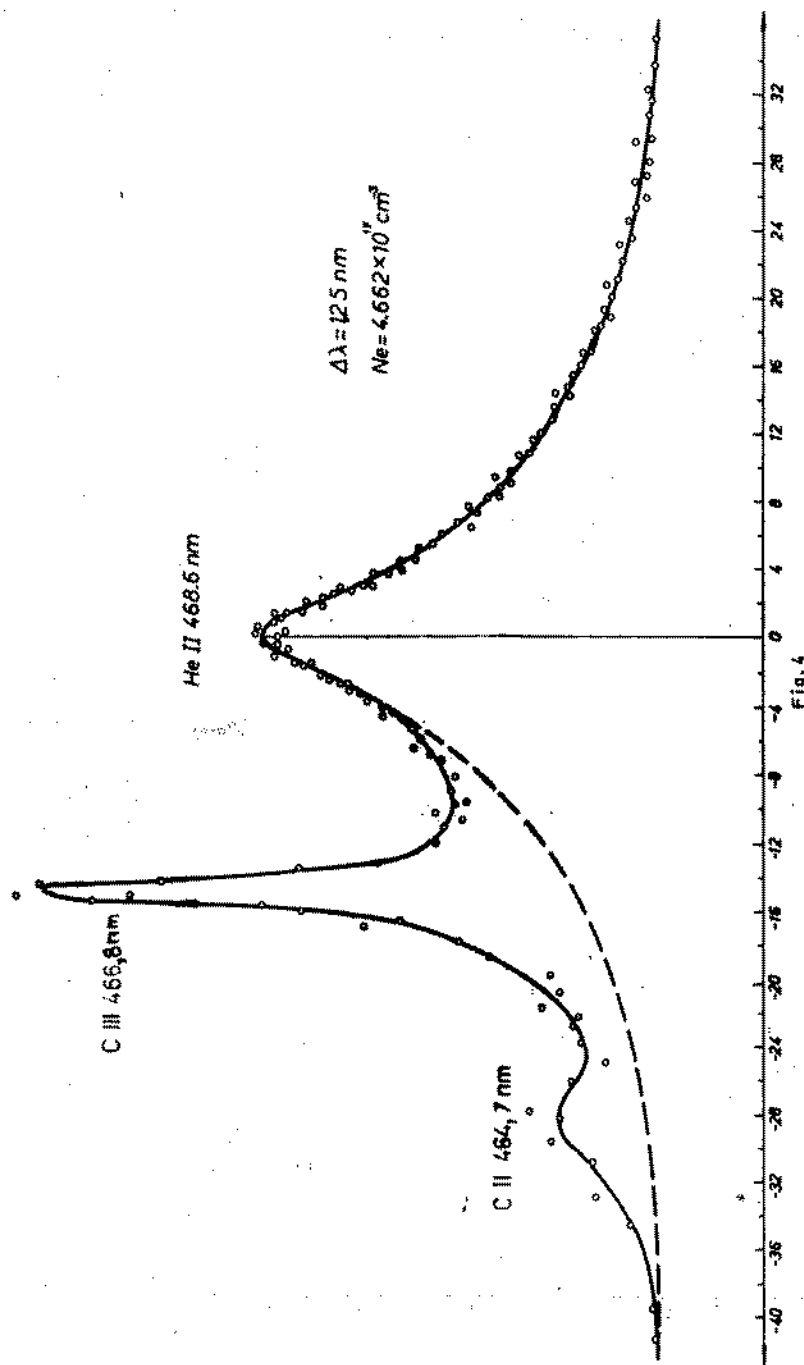


Fig. 4.

ku $\Delta\lambda_{1/2}^D$ — është gjysmëgjërësia e Doplerit kurse $\Delta\lambda_{1/2}^{ins}$ — gjysmëgjërësia e profilin instrumental. Gjysmëgjërësia eksperimentale e aparatit spektral ishte $0,01 \text{ nm}$ (5). Duke shfrytëuar shprehjen për gjysmëgjërësinë e Doplerit

$$\Delta\lambda_{1/2}^D = 7,16 \cdot 10^{-7} \lambda_0 \left[\frac{T}{\eta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

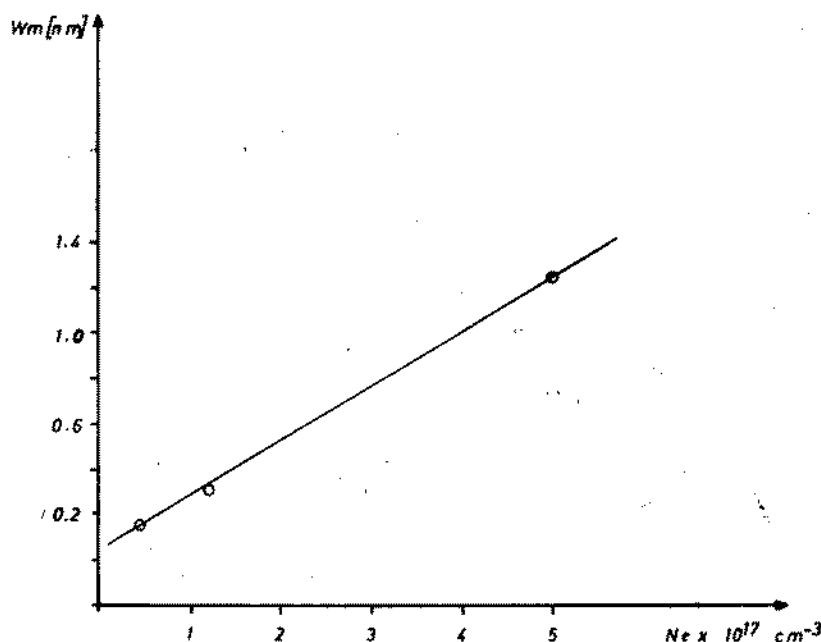


Fig. 5.

gjejmë shprehjen e temperaturës

$$T = 1,95 \cdot 10^{12} \frac{(\Delta\lambda_{1/2}^G)^2 - (\Delta\lambda_{1/2}^{ins})^2}{\lambda_0^2} \quad (5)$$

Gjysmëgjërësitë eksperimentale të Doplerit të vijave të $Ar \text{ II}$ janë $0,014 \text{ nm}$ ndërsa të $N \text{ II}$ $0,015 \text{ nm}$ ndërsa të $N \text{ II}$ $0,015 \text{ nm} - 0,016 \text{ nm}$ (5). Nga gjysmëgjërësitë e Doplerit në rastin e vijave të $Ar \text{ II}$ u fituan temperatura të plazmës $30\,000 \text{ K} - 30\,000 \text{ K}$, ndërsa te ato të $N \text{ II}$ u fituan temperatura $32\,000 \text{ K} - 35\,000 \text{ K}$.

Temperatura u përcaktua gjithashtu edhe sipas metodës së intensiteteve relative të vijave spektrale. Duke u nisur nga intensiteti i vijës spektrale gjejmë raportin e intensiteteve (5) të dy vijave spektrale

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \text{konst.} - \frac{0,4343}{kT} (E_1 - E_2) \quad (6)$$

Duke shpënë në ordinatë $\log \frac{I_1}{I_2}$ ndërsa në abshisë $\Delta E = E_1 - E_2$ fitohet drejtëza e Bolcmanit nga e cila gjejmë temperaturën

$$T = \frac{0,4343}{k \lg \alpha} \quad (7)$$

Këndi α përcaktohet nga fig. 6 dhe 7

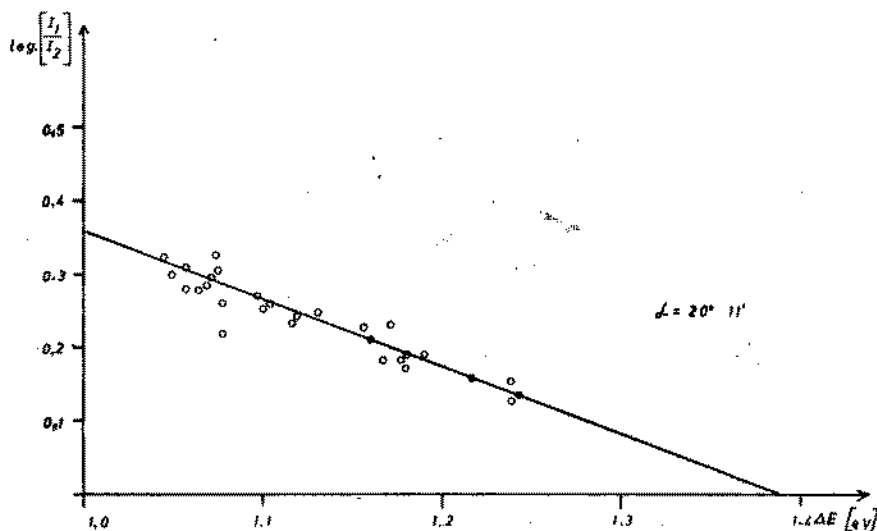


Fig. 6.

Temperatura u përcaktua nga raporti i intensiteteve të vijave të Ar II: 394,6 nm, 363,9 nm, 346,4 nm, 380,3 nm, 373,78 nm, 386,85 nm, 427,75 nm, 457,94 nm dhe 460,96 nm. Drejtëza e Bolcmanit është paraqitë në fig. 6. Temperatura e fituar është 31 900 K.

Në mënyrë të ngjashme duke krahasuar intensitetet e vijave spektrale të N II 339,50 nm, 444,70 nm, 480,33 nm, 404,13 nm, 402,61 nm dhe 409,73 nm, nga drejtëza e Bolcmanit në fig. 7 u përcaktua temperatura 32 800 K.

Saktësia e rezultateve të dendësisë elektronike është e dëshirueshme, gjë që e vërteton edhe fakti se nga vijat e ndryshme spektrale janë fituar vlera përafërsisht të njëjta.

Temperatura e fituar sipas metodës së intensiteteve relative paraqet vlerë mesatare, ndërsa ajo e fituar sipas profilin të Doplerit ndryshon nga një vijë spektrale në tjetrën. Këtu qëndron shkak i mospërputhjes së rezultateve të fituara sipas metodave të ndryshme.

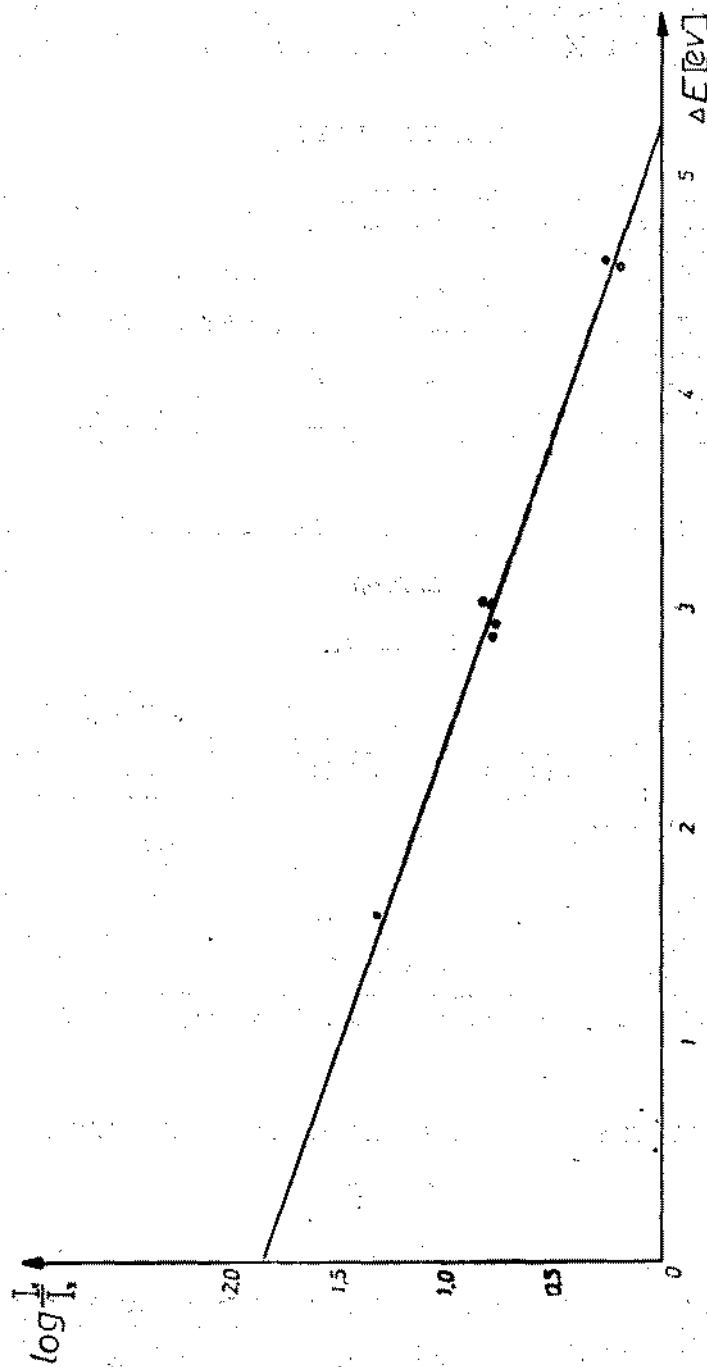


Fig. 7.

Gabimi në përcaktimin e temperaturës sipas profilin të Doplerit vlerësohet në afër 10%. Sipas metodës së intenzititive relative ky gabim është afër 5%.

REFERENCAT

- [1] H. R. Griem, »Plasma Spectroscopy«, Mc Graw Hill, New York, (1964).
- [2] H. R. Griem, »Spectral Line Broadening in Plasmas«, Academic Press, New York and London, (1974).
- [3] N. Konjević and J. R. Roberts, »Physical and Chemical Reference Data«, Vol. 5,2, NBS, Washington, (1976).
- [4] N. Konjević and W. L. Wiese, »Physical and Chemical Reference Data«, Vol. 5, 2, NBS, Washington. (1976).
- [5] L. Istrefi, »Doktorska disertacija, Prishtina, (1981).
- [6] J. T. Davies and J. M. Vaughan, »Astroph. J. 1302, (1963).
- [7] L. A. Jones, E. Kallne and D. B. Thomson, »JQsRT, Vol. 17 (1977).

DIAGNOSTICS OF Z-PINCHED PLASMA OF LARGE ELECTRON DENSITIES

L. Istrefi

Summary

This work contains the results of a Z-pinch plasma diagnostics. The plasma source is a pyrex tube 56 cm long with diameter 2,6 cm, operated at 5 kV. The plasma source had been used for Stark profile measurements of some ArII and ArIII spectral lines in plasma containing a gas mixture $N_2 : Ar : He = 60\% : 20\% : 20\%$, and profiles of spectral lines in some N_2 multiplets in plasma containing a gas mixture, used in CO_2 laser, $He : N_2 : CO_2 = 75,56\% : 18,1\% : 6,34\%$.

Electron densities, determined from Stark profiles of ArII 484,7 nm line is $4,45 \cdot 10^{22} m^{-2}$, respectively from HeI 388,89 nm line is $4,8 \cdot 10^{22} m^{-2}$. These results are used in case of argon lines. In case of nitrogen lines profiles measurements, electron density determined from Stark profile of HeII 468,5 nm line is $4,66 \cdot 10^{22} m^{-2}$.

Temperatures determined from Dopler profile of argon lines are 30 000 K — 33 000 K while from nitrogen lines are 32 000 K — 35 000 K. Temperature determined from Boltzman plot of nine ArII lines is 31 900 K and from six NII lines is 32 800 K.

We conclude that plasma parameters determined by various procedures showed good agreements.

DIJAGNOSTIKA PLAZNE Z-PINČ VISOKE ELEKTRONSKE GUSTINE

L. Istrefi

Sažetak

Ovaj rad sadrži rezultate dijagnostike plazme Z-pinč. Izvor plazme je cev od pyrex stakla dužine 56 cm sa prečnikom od 2,6 cm u kojem se prazni napon od 5 kV iz kondenzatorske baterije od 180 F. Izvor plazme je korišćen za merenje Štarkovog profila nekih ArII i ArIII linija u plazmi koja sadrži mešavinu gasova $N_2 : Ar : He = 60\% : 20\% : 20\%$, i profile

spektralnih linija u nekim multiplima N_2 u plazmi koja sadrži mešavinu gasova koja se upotrebljava kod CO_2 lasera, sastava $He : N_2 : O_2 = 75,56\% : 18,1\% : 6,34\%$.

Elektronska gustina, određena iz Starkovog profila linije $ArII$ 484,7 nm iznosi $4,45 \cdot 10^{22} m^{-3}$, odnosno iz linije HeI 388,98 nm iznosi $4,8 \cdot 10^{22} m^{-3}$. Ovi rezultati su primenjeni u slučaju profila argonovih linija. U slučaju merenja profila azotovnih linija, elektronska gustina je određena iz Starkovog profila linije $HeII$ 468,6 nm iznosi $4,66 \cdot 10^{22} m^{-3}$.

Temperatura određena iz Doplerovog profila argonovih linija iznosi 30 000 K — 33 000 K dok iz azotovih linija iznosi 32 000 K — 35 000 K. Temperatura je takođe određena iz Bolcmanovog pravca devet $ArII$ linija i iznosi 31 900 K. Iz Bolcmanovog pravca šest VII linija dobijena je temperatura od 32 800 K.

Na osnovu dobijenih rezultata za parametre plazme može se zaključiti da rezultati dobijeni različitim postupcima pokazuju dobru saglasnost.

1. The first part of the paper discusses the importance of the study of the history of the United States. It is argued that a knowledge of the past is essential for a full understanding of the present and for the development of a sound policy for the future. The author points out that the study of history is not only a means of gaining knowledge of the past, but also a means of developing the ability to think critically and to make sound judgments.

FUNKSIONI I KORELACIONIT TË RRJETËS OPTIKE DHE PROJEKSIONIT TË SAJ

Jahja Koka

Përmbajtja

Është bërë zgjidhje teorike e korelacionit të dy rrjetave në kushtet auto-korelative. Rezultatet e fituara paraqesin bazë konkrete për shfrytëzimin e metodës korelative në hulumtimin e deformacionit.

HYRJE

Problemi i korelacionit është çështje trajtimi në tekstete e optikes dhe elektronikës. [1,2] por lakorja e korelacionit në procesin e njohjes së tipareve perdoret mjaftë vonë [3,4]. Në interpretimin e formës së funksionit të korelacionit dhe lidhmerinë matematikore të sajë me deformimin natyror të objektit, kanë mbetur probleme të hapura teorike. Ndonëse problemet teorike të rrjetave janë trajtuar në shumë punime, [5, 6] qëllimi i këtij punimi nuk është analiza teoriko-funksionale e rrjetave por shqyrtimi teorik i korelacionit të tyre si shembull eklatant për shfrytëzimin e tipareve (gjurmëve) në hulumtimin e deformimeve.

SHTRIMI TEORIK I PROBLEMIT

Jo vetëm për arsye të thjeshtësimit të problemit, por në bazë të kërkesave praktike, funksionet që korelojnë do të mirren në formën e tyre njëdimensionale. Të medojmë pra dy rrjeta të përfaktuara me funksionet $f(x)$ dhe $f(x)$ si në figurën 1.

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N \text{rect} \left(\frac{x - nc}{c/2} \right) \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N \text{rect} \left(\frac{x - nc'}{c/2} \right)$$

ku c dhe c' janë hapjet e rrjetes, respektivisht të projekcionitë sajë. Raportet e tyre mundë ti paraqesim me relacionin

$$C' = KC = C \cos \theta \quad (2)$$

ku θ është këndi në mes të rrjetës dhe planit të sajë projektues. Në figurën 1. është paraqitur rrjeta optike dhe çvendosja korelative respektivisht projekcioni i sajë.

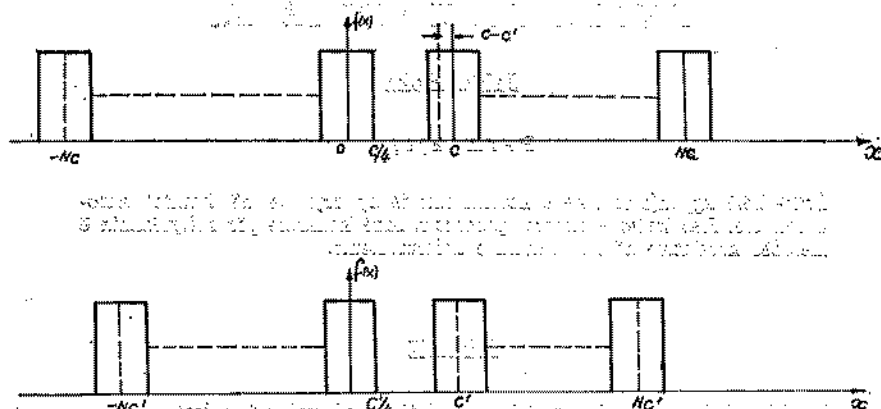


Fig. 1.

Nderkaq në figurën 2. është paraqitur këndi projektues në mes të dy rrjetave.

Me qëllim të thjeshtimit të llogarise në do të supozojmë që $N(C-C') \leq 1/4(C+C')$ dhe se nuk është vështirë që rezultati i yne të gjeneralizohet për kushtin $N(C-C') > 1/4(C+C')$. Për matjet në formë çvendosjeje, këndi, të cilin ne duhat ta masim është shumë i vogël. Se këndeji $(C-C')$ është shumë e vogël në krahasim me $(C+C')$. Në anen tjetër numri N nuk mundë të jetë shumë i madhe. Prandëj kushti $N(C-C') \leq 1/4(C+C')$ është i kënaqshëm për të shumtën e rasteve.

Në do të çfrytzojmë funksionin e ndërkorelacionit në një vijë të $f(x)$ me $f^*(x)$. Funksionin e ndërkorelacionit e paraqesim me $G(X)$ dhe e shenojmë

$$G(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{c/2}\right) + \text{rect}\left(\frac{x}{c'/2}\right) \quad (3)$$

$$= \begin{cases} C'/2 & |x| \leq 1/4(C-C') \\ 1/4(C+C') - |x| & 1/4(C-C') \leq |x| \leq 1/4(C+C') \\ 0 & |x| \geq 1/4(C+C') \end{cases}$$

Per matje konkrete ne na nevojiten disa vlera të pikave korelative; prandej ne pikerishte gjejme funksionin e korelacionit $C(x)$ per $2N+1$ pika, ku $x=nc'$ ($n=0, 1, \dots, n,$

$-1, \dots, -N$)

Fig. 2.

Pra qe te gjejme funksionin $C(x)$ shkruajme:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) f(\xi+x) d\xi \quad (4)$$

$$C(nc') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) f(\xi+nc') d\xi \quad (5)$$

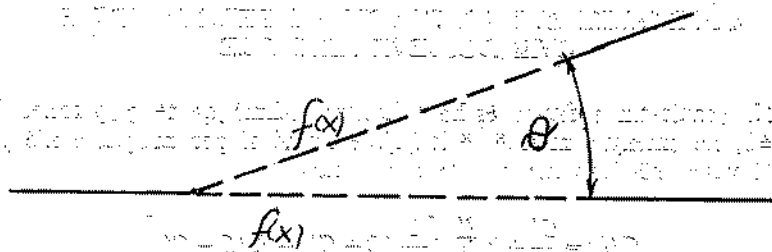


Fig. 2

Nga se $N(C-C') \leq 1/4(C+C')$, sejcila vijë numri i së ciles eshte n , në rrjete, do te mblohet (siperpunohet) me vijen koresponduese numri i së cilës është n ne ne rrjeten projektuese, kur ne llogrisim $C(0)$. Vlene te shënohet se sejcila parë e vijave ka funksion të njejte korelativ $G(x)$ dhe ka çvendosje të ndryshme. Pra ne munde ta thjeshtojme funksionin $G(x)$ për te gjitha paret dhe pastaj te bashkambledh nim qe te fitojmë vlerën korelative $C(0)$

$$C(0) = G[-N(C-C')] + G[-(N-1)(C-C')] + \dots + G[-(C-C')] + G(0) + G(C-C') + \dots + G[N(C-C')]$$

$$= \sum_{k=-N}^N G[k(C-C')] \quad (6)$$

Ne një pike të funksionit korelativ ku $X=nc'$, funksioni i korelacionit $f(x)$ do te çvendoset vleren nc' në te majtë. Prandej numri i palëve te sipërpunuara (përputhurave) do te behet $2N+1=n$, dhe vlera e korelacionit shprehet si:

$$C(nc') = \sum_{k=-N+n}^N G[k(C-C')] \quad (7)$$

duke zëvendësuar (3) në (6) fitojmë:

$$C(nc') = \begin{cases} \frac{C'}{2} + 2 \sum_{K=1}^N \frac{1}{4} (C+C') - K(C-C') & n=0 \\ \frac{C'}{2} + \sum_{K=1}^N \left[\frac{1}{4} (C+C') - K(C-C') \right] + \sum_{K=1}^{N+n} \left[\frac{1}{4} (C+C') - K(C-C') \right] & N > n > 0 \quad -N < n < 0 \\ \sum_{K=\pm n}^N \left[\frac{1}{4} (C+C') - K(C-C') \right] & 2N > n > N \\ 0 & -2 < -nN \\ & |n| > 2N \quad \dots (8) \end{cases}$$

OPTIMALIZIMI I KORELACIONIT PER MATJET E ÇVENDOSJEVE KENDORE

Në rezultatin e fituar është e konvencueshme që të çfrytëzohet kushti $n \neq 0$, në çmënyrë mundë të krijojmë mundësi për matjen e një çvendosje të vogël këndore me ane të kësaj metode

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{C'}{2} + 2 \sum_{K=1}^N \left[\frac{1}{4} (C+C') - K(C-C') \right] \\ &= \frac{C'}{2} + \frac{N}{2} (C+C') - N(N+1)(C-C') \\ &= \frac{C'}{2} (1+3N+2N^2) + \frac{C}{2} (-2N^2-N) \end{aligned} \quad (9)$$

Në anën tjetër autokorelacioni i funksionit $f(x)$ ka vlerë $C_a(0)$ në pikën $x=0$

$$C_a(0) = (2N+1) \frac{C}{2} \quad (10)$$

Në figuren 3 shifet komparacioni i funksioneve $C_a(0)$ dhe $C(0)$. Nga kjo figure shifet që maja koreluese $C(0)$ do të jetë shumë më e ulët se sa $G_0(x)$, nga se vlera e thjeshtë (elementare) do të behet e vogël kur k rritet, porë neqoftese kemi rastin e autokorelacionit, kontributi i korelacionit nga sejcila pare e pikave është konstante $G_0(x) = c/2$.

Në figuren 4 shifet që maja korelative $C(0)$ është pakë më e ulët se sa maja autokorelative, në kushtet e rrjetës se pakoduar. Prandej ne mundë të vërtetojmë faktin që rasti i koduar është më i mirë se sa i pakoduar

Te supozojmë $N=100$ kur $c=0,2$ mm, $2NC=40$ mm, e cila duket që është shumë e madhe për përdorim

$$\frac{c(0)}{Ca(0)} = \frac{\frac{\cos \theta'}{2} (1 + 3N + 2N^2) + \frac{d}{2} (2N^2 - N)}{(2N + 1) d/2} =$$

$$= \frac{(1 + 3N + 2N^2) \cos \theta - 2N^2 - N}{2N + 1} = \frac{20301 \cos \theta - 20100}{201}$$

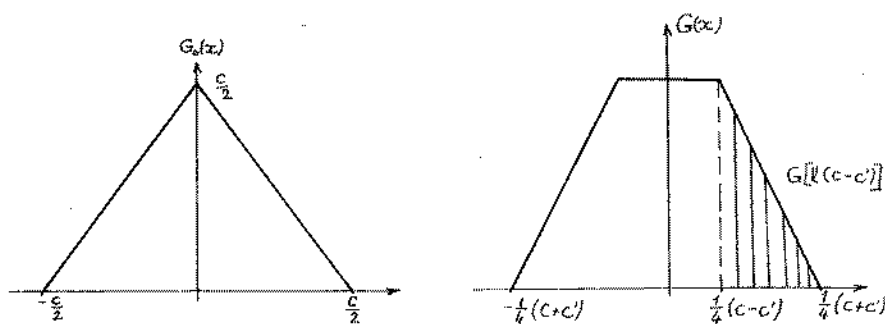


Fig. 3

Neqoftese munde të masim 1% të diferencës së funksionit (signalit dales) do të kemi llogarinë:

$$\frac{99}{100} = \frac{20301 \cos \theta - 20100}{201}$$

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\theta = 0,0014 = 45'$$

pra për këndin fitojmë $\theta = 45'$.

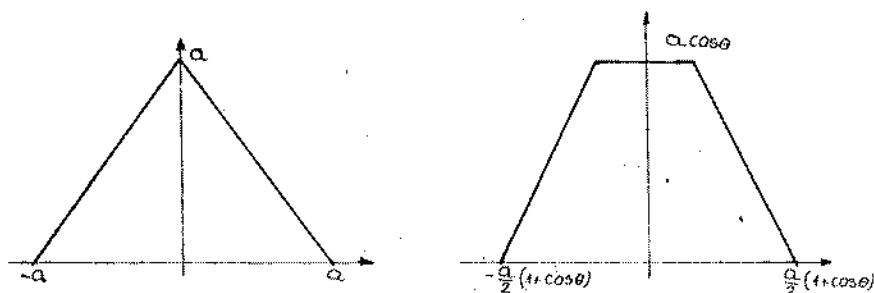


Fig. 4

Fatekeqësisht ky numër është shumë i madhe, që të përdoret nga se $\cos$ i funksionit varion dukshëm, kur është i vogël. Kur plani projektues nuk është normal mbi boshtin e kameras, $\cos$ i funksionit do varion shumë shpejt. Pra ne tentuam përdorimin e metodës projektuese ku projektori dhe kamera kanë boshtin të ndryshme optikë dhe kur boshtet nuk janë normale me planin e objektit. Si në figuren 5.

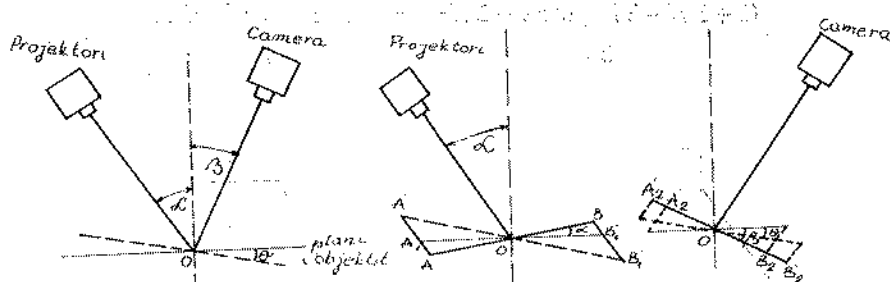


Fig. 5.

Në figuren 5 shifet gjeometria e projektimit dhe shëmbëllimit. Projektori gjendet në distancën projektuese a nga pika O e rrjetës. Kur kamera gjendet në distancën e shëmbëllimit. Këndet α dhe β janë këndet që formohen në mes të normales dhe distancës me të shkurtër në mes të kameras dhe projektorit. θ është këndi i shvendosjes (deformimit). Të supozojmë që α , β dhe θ gjenden në të njëjtin plan. Kur rrjeta gjenerohet në planin $A-B$ dhe projektohet në planin A_1-B_1 . Projektionin në fjalë e paraqesim me relacionin:

$$A_1 B_1 = AB / \cos \alpha$$

Pase çvendosjes (deformimit të mundshëm) për këndin θ kemi:

$$A_1' B_1' = AB / \cos (\alpha + \theta)$$

Ndërkaq për rastin kur bëjmë fotografimin i tyre fitojmë:

$$A_2 B_2 = A_1 B_1 \cdot \cos \beta \quad A_2' B_2' = A_1' B_1' \cos (\beta - \theta)$$

Nga figura 5, ne mund të gjejmë këndin e çvendosjes, i cili kushtëzon difference shumë të madhe në mes të $B_2 B_2'$ dhe $A_2 B_2$ ku është:

$$\begin{aligned} A_2' B_2' &= AB \frac{\cos (\beta - \theta)}{\cos (\alpha + \theta)} = A_1 B_1 \cos \frac{\cos (\beta - \theta)}{\cos (\alpha + \theta)} \\ &= A_2 B_2 \frac{\cos \beta \cos (\beta - \theta)}{\cos \beta \cos (\alpha + \theta)} \\ &= K A_2 B_2 \end{aligned}$$

Duke i krahasuar (1) dhe (2) nga ekuacionin (2) $\cos \theta$ është zëvendësuar në përmes të $\frac{\cos \alpha \cdot \cos (\beta - \theta)}{\cos \beta \cdot \cos (\alpha + \theta)}$ në ekuacionin (11), Kur θ është i vogël, $\cos \theta$ ariron dukeshem, porë

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta \cdot \cos (\beta - \theta)}{\cos \beta \cdot \cos (\alpha + \theta)} &= \frac{\cos \theta \cdot \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta}{\cos \beta \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta} \\ &\approx \frac{\cos \theta \cdot \cos \beta + \theta \sin \beta}{\cos \beta \cos \theta - \theta \sin \alpha} = \frac{1 + \theta \operatorname{tg} \beta}{1 - \theta \operatorname{tg} \alpha} \\ \frac{\cos \alpha \cdot \cos (\beta - \theta)}{\cos \beta \cdot \cos (\alpha + \theta)} - 1 &= \frac{1 + \theta \operatorname{tg} \beta}{1 - \theta \operatorname{tg} \alpha} - 1 = \frac{\theta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}{1 - \theta \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

Sipozojme $\alpha = \beta = 45^\circ$ atehere

$$\frac{\theta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \theta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\theta}{1 - \theta} \approx 2\theta$$

Ne ane tjetër $2\theta > \frac{\theta^2}{2}$ ku keni është i vogël.

Realisht shohim që keni është $2\theta \gg \frac{\theta^2}{2}$ që do të thotë që diferenca

ne mes të para dhe pas deformimit është shumë më e madhe, në rastin e projektimit për keni dhe α shëmbëllimit për keni β , se sa në rastin e projektimit dhe shëmbëllimit në mënyrë normale. Nga kalkulimet e figures 5, ne patëm fituar:

Duke shfrytëzuar $\frac{1+\theta}{1-\theta}$, zëvendësuar $\cos \theta$ në fitojmë;

$$\frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{2029899}{2039110} \approx 0,000055 \approx 10''$$

Rrespektivisht keni do të fitohet defenitivisht: Kjo do të thotë që sensitiviteti është shumë më madhe se sa përpara. Natyrisht $\alpha = \beta = 45^\circ$ është shumë i madhe që të përdoret në kushtet praktike.

PËRFUNDIM

Në përmes të llogarive teorike dhe kalkulimeve numerike në optimalizuar këtë metodë korelative për matjen e deformimeve. Nëqoftë se projektori dhe kamera janë në një distancë të kufizuar, projektimi nuk është funksion linear, prandaj rrjeta e projektuar nuk është rrjete me hapsirë të njëjta.

Në duhet të posedojmë me distancë të madhe fokale të projektorit dhe kamerës, nga se plani projektues nuk është normal në boshtin optik.

Autori i falenderohet Dr. Vito Shkalla për konsultimet e mirëseardhura gjatë zgjidhjes teorike të problemit, Ing. Mr. Wren Allond i falënderohet për testimet preliminare eksperimentale.

LITERATURA

- [1] Robert Collier et al., *Optical holography*, Academic Press, 1971, New York
- [2] Gumen *J Videnje v furie-optiku*, »Mir« 1970 (perkthim)
- [3] D. Casasent and D. Psaltis, *App. Optics*, 1976, vol 15, № 7
- [4] Casasent, Luu, *App. Optics* 1979 (vol 18, № 6)
- [5] J. KOKA, *Disertacija* dr. Prishtine, 1980.
- [6] G. Strouk, *Diffraction Gratings*, 1979

KORELACIONA FUNKSIJA OPTIČKE REŠETKE I NJEZINE PROJEKCIJE

Jahja koka

Sadržaj

Vršena je teorijsko rešenje korelacije rešetke i njene projekcije. Dobiveni rezultat predstavljaju podlogu za korišćenje korelacione metode za ispitivanje deformacije.

THE CORRELATION FUNCTION OF THE GRATING AND ITS PROJECTION

Jahja koka

Abstract

The theoretical correlation problem for grating and its projection is solved. Given results are a good base for using correlation method in deformation measurement.

SHFRYTEZIMI I NJË KONCEPTI JOKONVENCIONAL STATISTIKORË NË HULUMTIMIN E DEFORMIMIT

Jahja Koka

Përmbajtja

Në këtë punim është shtruar dhe optimalizuar metoda statistikore e hulumtimt të deformimeve. Analiza është kryer në mënyrë teorike dhe se janë definuar kushtet reale për hulumtimin e deformimit, në mënyrë eksperimentale. Rezultatet e fituara tregojnë që senzibiliteti i matjeve do të jetë shumë më i lartë për rangge të larta të momenteve.

HYRJE

Ekzistojnë metoda deterministike dhe statistikore në hulumtimin identifikues dhe të deformimeve të objekteve. Kuptimi statistikore për të cilën do të bëjmë fjalë është përpunuar nga Fukunaga etj⁽¹⁾, kurse në procesin e njohjes është shfrytëzuar nga Casasent^(2,3,4) etj. Nderkaq në hulumtimin e deformimeve në tunelin rrymues, në kuader të një projekti të NASA është shfrytëzuar nga Koka⁽⁴⁾ etj. Ndërsa në procesin e identifikimit-njohjes mjafton mesatarizimi i përgjithshëm, në hulumtimin e deformimeve është e domosdoshme evidentimi dhe matja e detajeve. Së këndejmi optimalizimi i momenteve dhe kushteve të përgjithshme statistikore duhet të kryhet në mënyrë rigoroze.

TEORIA STATISTIKORE

a) Hapsira e momenteve të gjurmave individuale

Mënyrë specifike e identifikimit të objekteve, në rastin tonë e hulumtimt të cvendosjeve është reprezentimi i figurës rrepektivisht objektit në përmes të tipareve individuale statistikore se që janë koeficientet Furie dhe momentet statistikore. Ekzaminimi i distorzionit të parametrave është më i lehtësuar po që se objekti transformohet nga një reprezehtim konvencional koordinativ në një reprezentim tjetër. Të përfaqësojmë objektin hyrës, në hapsirën tonë e tipareve (gjyremeve) individuale nëpërmes të vektorit $\vec{r}$, për intencën tonë do të jenë momentet m_{pq} .

INVARIANTET E MOMENTEVE

Meqë në kushtet eksperimentale dhe poashtu matematikore është shumë vështirë të apolikohet forma tredimensionale e objektit apo figurës së tij, ne do të përqëndrohemi në formën-prezentimin dy dimensional. Momenti e funksionit të gjeneruar në mënyrë optike të funksionit dydimensional $f(x, y)$ është:

$$M(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ux+vy)} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

Procedura formuluese për determinimin e momenteve invariante bazohet në invariantet algjebrike dhe në konceptet e funksioneve për gjenerim e momentive. Poashtu shfrytzojmë transformimin linear të funksionit $f(x, y)$ respektivisht $(x', y') \rightarrow (x, y)$.

Momenti i ri M_1 do të perzentohet nëpërmes të koordinateve (u, v) respektivisht transformimit të tyre (u, v) në (u', v') , në mënyrë fitojmë funksion të ri të momentit të gjeneruar. Një transformim i këtillë është i njohur nga matematika:

$$M_1(u', v') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (u'x' + v'y')^p f(x', y') \left| \frac{1}{|J|} \right| dx' dy'. \quad (2)$$

I shkruar në një formë tjetër relacioni (1) është:

$$M(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} m_{pq} \frac{u^p}{p!} \frac{v^q}{q!} \quad (1.2)$$

nga relacioni i fundit do të veçojmë m_{pq} meqë ka kuptim të rëndësishëm fizik. Pra momentet e shembëllimit (figurës) apo funksionit $f(x, y)$ definohe si:

$$m_{p,q} = \iint f(x, y) x^p y^q dx dy \quad (3)$$

Këto momente janë invariante përnga translacioni, zmadhimi dhe rotacioni. Duke shfrytzuar transformimin e koordinateve

$$x' = x + \alpha$$

$$y' = y + \beta$$

fitojmë shprehjet për momentet centrale:

$$m_{p-q} = \iint f(xy) (x-x_0)^p (y-y_0)^q dx dy$$

ku janë:

$$x_0 = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad y_0 = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

Këto shprehje janë invariante përnga translacioni. Nëqoft se intensiteti i figurës hyrëse ndron apo në qoftë se ndron lokacioni i objektit referent në hyrje krahas me ndrimin paraprak, momentet centrale nuk do të ndryshojnë. Transformimi zmadhues kur faktori i transformimit është a paraqitet me relacionin:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; a = \text{const}$$

Momentet e funksionit gjenerues në (1) dhe (2) mundë të shprehjen në formën (1.a). Duke i barazuar koeficientat të këtyre shprehjeve ne fitojmë momentet

$$\eta_{pq} = \frac{m_{pq}}{m_{00}' + \frac{p+q}{2}}$$

të cilat janë invariante për nga ndrimet e zmadhimit, dhe momentet:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}' + \frac{p+q}{2}}$$

të cilat janë invariante përnga ndrimet zmadhuese dhe translate.

Transformimet rrotulluese paraqiten me relacionin:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Duke përshkruar M dhe M_1 në termin të m , m dhe μ dhe μ' , konforme me (1.a), si dhe me krahasimin e koeficientave në mes të m dhe m' fitohen momentet invariante përnga rotacioni, prezantimi ρ si dhe momentet invariante absolutisht të normalizuara, prezantimi $\Phi^{(2)}$. Transformimet e fundit mendoj që janë shumë vështirë të aplikueshme në hulumtimet e deformiteteve, gjërtani ato kanë gjetë aplikim vetëm në procesin e njohjes së mostrave. Në këtë punim do të shfrytzojmë relacionin (3).

SHQYRTIM STATISTIKORE

Aplikimi i statistikës në invariantet e momentet dhe dhe konstrukcioneve të tyre është efikas në determinimin dhe eliminimin e zhurmës në të dhënat hyrëse, kjo zhurmë pothuaj se është pa evitueshme me metoda jostatistikore. Kështu që në rastin tonë rezultatet e analizës statistikore të përdorura në ndërtimin e momenteve, invarianteve të momenteve bashkë me segmentimin dhe dhe paraprocesimet algoritmike në mënyrë efektive munde të përdoren në zhurmën e cilësdo natyre qoftë ajo. Modeli hyrës përfaqson figuren optike të kapluar me zhurmë të karakterit aditiv-jodeterministik. Zhurma e kuptimit o karakterizohet me funksionin e densitetit të probabilitetit i cili është i njëjtë për të gjitha qelizat.

Momentet themelore me vlerat e pritura të momenteve të matura Em_{pq} janë të barabarta me momentet e pritura m_{pq} . Kjo saktësi është e bazuar në supozimin që qelizat konkrete të janë qeliza kufitare. Në këtë rast funksioni i densitetit të probabilitetit është funksion me shpërndarje simetrike rrethe zeros. Estimimin (llogaritjen) e momenteve mundë ta paraqesim me anën e kovariancës e cila është proporcionale me momentet m^e që përfaqësojnë figurën (shembëllimin) e cila i përgjigjet vetëm qelizës kufitare të funksionit hyrës.

$$\text{covar} [\hat{m}_{pq} \hat{m}_{rs}] = \sigma_e \sum_{k=1}^N I^{p+r}(k) = J^{q+s}(k) = \sigma_e \hat{m}_{p+r, q+s}^e$$

N -qelizat të shembëllimit kufitare shënohen me indeksat k . I dhe J përfaqësojnë koordinatat centrale të qelizës së k -te, është ekspeticioni i gabimeve në llogaritje apo estimim. Për rastin e shkallës-grey të figurës mundë të llogariten momentet. Në punimin e ardhëshëm do të paraqesim gabimin i cili përfshihet në shkallën-grey dhe në funksionin e digjitalizuar (gabimin lidhur me hapin e pikave në boshtin e ordinateve). Te gjitha kete janë baze dhe parakusht i domosdoshëm për realizimin eksperimental-optik të krijimit të momenteve si tipare karakteristike-statistikore të fytyrës së objektit që hulumtojmë gjegjësisht deformimeve të tij.

REZULTATET E FITUARA TEORIKE

Për krijimin optik të momenteve, parakusht i nevojshëm është percaktimi i funksionit të gjurmës e cila projektohet në objektin që hulumtojmë. Pra zgjedhja e maskës në krijimin e momenteve optike ka rol vendimtar. Të marrim në shqyrtim rastin e funksionit

$$f(x, y) = 1 + \cos \omega_1 x_1 + \cos \omega_2 y + \cos \omega_1 x - \cos \omega_2 y$$

Duke shfrytëzuar formulën (3) për llogaritjen e momenteve dhe duke kryer llogarite matematikore fitojmë:

$$\begin{aligned} m_{00} &= ab + \frac{b}{\omega_1} \sin \omega_1 a + \frac{a}{\omega_2} \sin \omega_2 b + \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 a \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 b \\ m_{01} &= \frac{1}{2} ab^2 + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 a + a \left[\frac{b}{\omega_2} \sin \omega_2 b + \frac{1}{\omega_2^2} \cdot (\cos \omega_1 a - 1) \right] \\ m_{02} &= \frac{ab^3}{3} + \frac{b^3}{3} \cdot \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 a + a \left[\frac{b^2}{\omega_2} \sin \omega_2 b + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b}{\omega_2^2} \cos \omega_2 b - \frac{2}{\omega_2^2} \cdot \sin \omega_2 b \right] + \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 a \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{b^2}{\omega_2} \sin \omega_2 b + \frac{2b}{\omega_2^2} \cdot \cos \omega_2 b - \frac{2}{\omega_2^3} \sin \omega_2 b \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{03} = & \frac{1}{4} ab^4 + \frac{b^4}{4\omega_1} \sin \omega_1 a + a \left[\frac{b^3}{\omega^2} \cdot \sin \omega_2 b + \frac{3b^2}{\omega_2^2} \cdot \cos \omega_2 b - \right. \\
& \left. - \frac{6b}{\omega_2^2} \cdot \sin \omega_2 b - \frac{6}{\omega_2^4} (\cos \omega_2 b - 1) \right] + \frac{\sin \omega_1 a}{\omega_1} \left[b^3/\omega_2 \cdot \sin \omega_2 b + \right. \\
& \left. + 3b^2/\omega_2^2 \cos \omega_2 b - 6b/\omega_2^3 \cdot \sin \omega_2 b - \frac{6b}{\omega_2^4} (\cos \omega_2 b - 1) \right] \\
m_{12} = & 1/b \cdot a^2 \cdot b^3 + 1/3 \cdot b^3 [a/\omega_1 \cdot \sin \omega_1 a + 1/\omega_1^2 (\cos \omega_1 a - 1)] + \\
& + 1/2 [b^2/\omega_2 \sin \omega_2 a + 2b/\omega_2^2 \cdot \cos \omega_2 b - 2/\omega_2^3 \sin \omega_2 b] + \\
& + [b^2/\omega_2 \sin \omega_2 b + 2b/\omega_2^2 \cos \omega_2 b - 2/\omega_2^3 \cdot \sin \omega_2 b] \cdot [a/\omega_1 \cdot \sin \omega_1 a + \\
& + 1/\omega_1^2 (\cos \omega_1 a - 1)]
\end{aligned}$$

KORIŠĆENJE JEDNOG STATISTIČKOG POJMA ZA ISPITIVAJNA DEFORMACIJA

Janja Koka

Sadržaj

U ovom radu postavljena je i optimalizirana statistička metoda za ispitivnja deformacija. Analiza je vršenateoretski, pa su definisani realni uslovi za ispitivanje deformacija. Dobiveni rezultat pokazuju da osetljivost je zavisna od reda dobivenih momenata.

A UNCONVENTIONAL STATISTICAL CONCEPT FOR DEFORMATION MEASUREMENT

Janja Koka

Abstract

Theoretical and statistical method for deformation measurment is derived and optimized. Real condition for experimental investigations are defined. According to given results sensitivity of measurment is depend on order of moments.

DIFRAKCIJA NA PUKOTINI SNOPI LASERA U PRVOM MODU

J. Moser i R. Bejtullahu

Abstract

U radu se određuje raspodjela Fresnelovog difrakcionog polja u nekoj paralelnoj ravnini iza pukotine, koja je osvetljena snopom lasera prvog moda. Upadni snop se opisuje proizvodom Hermitovih polinoma dviju varijabli stepena m i n i jednog eksponencijalnog faktora koji određuje njegove karakteristike. Rešavaju se slučajevi sledećih stepena Hermitovih polinoma: $m=0, n=1$; $m=1, n=0$ i $n=m=1$. Također se rešava problem Fresnelove difrakcije ovog snopa lasera na pravougaonom otvoru. Postavljena teorija pokazuje bitne razlike između ovog polja, polja difrakcije snopa lasera osnovnog moda i klasičnog izvora, kod slučaja difrakcije na pukotini odnosno pravougaonom otvoru.

UVOD

Svetlost lasera se od svetlosti klasičnih izvora razlikuje po raspodjeli amplitude u snopu. Dok se kod klasičnih izvora uzima da je amplituda konstantna, kod svetlosti lasera, amplituda zavisi od mjesta u snopu s obzirom na os snopa. Ta zavisnost može biti različita već prema tomu u kojem modu radi laser. Kad se takva svetlost propušta kroz usku pukotinu nastaje difrakcija. Kako je amplituda upadnog snopa promenljiva, može ta činjenica djelovati i na raspored polja difrakcije. Zato će u ovom radu biti obrađena teorija Fresnelove difrakcije snopa lasera na pukotini. Ograničit ćemo se samo na slučaj kad laser radi u prvom modu, jer teoriju osnovnog moda smo proveli u radu [1]. Pretpostavljat ćemo da se sredina pukotine nalazi na osi upadnog snopa lasera. U ravnini zapreke sa pukotinom postavljamo koordinatni sustav (ξ, η) sa osi η paralelnom rubovima pukotine i ishodištem u njenoj sredini.

OPŠTA FORMULA

Za snop svjetlosti lasera koji radi u višem modu vrijedi formula za kompleksnu amplitudu [2].

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\omega} H_m \left(\frac{\sqrt{2}\xi}{\omega} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}\eta}{\omega} \right) \cdot \exp \left[-i \frac{k}{2R} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{\omega^2} (\xi^2 + \eta^2) + i(1+m+n)\Phi \right] \quad (1)$$

Oдавде H_m i H_n Hermitovi polinomi stepena m i n . Nadalje je ω karakteristična konstanta za opadanje amplitude po zakonu Gaussove funkcije. To je ona udaljenost od osi snopa na kojoj je amplituda pala na e -ti dio one vrijednosti koju ona ima na osi snopa. U formuli (1) javlja se i veličina R koja je određena formulom [3]

$$R(\zeta) = \zeta \left(1 + \frac{\zeta_0^2}{\zeta^2} \right) \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\zeta_0^2}{\zeta^2} \right)^{-1}, \quad \zeta_0 = \frac{k}{2} \omega_0^2$$

Konačno je Φ jedna fazna konstanta čije značenje nije važno kod ovog problema.

Kod Fresnelove difrakcije za kompleksnu amplitudu treba koristiti izraz

$$g = A \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{1}{R_0} \exp(-ikR_0) d\xi d\eta \quad (3)$$

gdje je a poluširina pukotine.

Na relativno velikoj udaljenosti z od zapreke s pukotinom postavljamo paralelni ekran na kojem se posmatra difrakciono polje. U ravni ekrana uvodimo koordinatni sustav (x, y) čije su osi paralelne sa osima sustava (ξ, η) a ishodište se nalazi u tački u kojoj produženje osi upadnog snopa propada ekran. Ako se ograničimo samo srednji dio difrakcijske slike onda se dobiva približna formula

$$\frac{1}{R_0} \exp(-ikR_0) = \frac{1}{z} \exp \left\{ -ik \left[z + \frac{1}{2z} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2x\xi - 2y\eta) \right] \right\} \quad (4)$$

Uvrstimo (1) i (4) u (3) uz oznaku

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2} \quad (5)$$

pa dobivamo

$$g = \frac{A \omega_0}{z \omega} \exp i \left[(1+m+n) \Phi - k \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} H_m \left(\frac{\sqrt{2} \xi}{\omega} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left\{ - \left[\alpha + \frac{ik}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z} \right) \right] (\xi^2 + \eta^2) + \frac{ik}{2z} (2x\xi + 2y\eta) \right\} d\xi d\eta \right] \quad (6)$$

Opšte rešenje te integracije vodi na velike poteškoće i zato ćemo se ograničiti samo na prve više modove, to su oni kod kojih je stepen Hermitovih polinoma jedan.

a) Slučaj $m=0$, $n=1$

Tada presjek laserskog snopa u sredini ima horizontalnu tamnu liniju. Odgovarajuće vrijednosti Hermitovih polinoma su:

$$H_0 \left(\frac{\sqrt{2} \xi}{\omega} \right) = 1; \quad H_1 \left(\frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \right) = 2 \frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \quad (7)$$

Uz kraće oznake

$$(1+m+n) \Phi - k \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) = M \quad (8)$$

$$\frac{k}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z} \right) = \beta \quad (9)$$

$$\frac{k}{2z} = h \quad (10)$$

možemo izraz (6) pisati ovako:

$$g = \frac{A \sqrt{2} 2}{z \omega^2} \exp i M \int_{-a}^a \exp \{ - [(\alpha + i\beta) \xi^2 - 2 i h x \xi] \} d\xi \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \eta \exp \{ - [(\alpha + i\beta) \eta^2 - 2 i h y \eta] \} d\eta \quad (11)$$

Označimo integrale

$$I_1 = \int_{-a}^a \exp \{ - [(\alpha + i\beta) \xi^2 - 2 i h x \xi] \} d\xi \quad (12)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \exp \{ - [(\alpha + i\beta) \eta^2 - 2 i h y \eta] \} d\eta$$

pa možemo kraće pisati

$$g = \frac{A \sqrt{2} \omega_0}{z \omega^2} (\exp iM) I_1 I_2 \quad (13)$$

Kod izračunavanja ovih integrala treba eksponente svesti na potpune kvadrate označimo

$$p = \sqrt{\alpha + i\beta} \quad (14)$$

pa prvi integral (12) glasi

$$I_1 = \exp\left(-\frac{h^2 x^2}{p^2}\right) \int_{-a}^a \exp\left[-\left(p\xi - i\frac{hx}{p}\right)^2\right] d\xi \quad (15)$$

Preostali integral vodi na funkciju pogrešaka [4]

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt \quad (16)$$

odakle je

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \exp\left(-\frac{h^2 x^2}{p^2}\right) \left[\text{Erf}\left(pa - i\frac{hx}{p}\right) + \text{Erf}\left(pa + i\frac{hx}{p}\right) \right] \quad (17)$$

Za rešavanje drugog integrala u (12), treba također njegov eksponent svesti na potpuni kvadrat. Njegova je vrijednost

$$I_2 = \frac{ihy\sqrt{\pi}}{p^3} \exp\left(-\frac{h^2 y^2}{p^2}\right) \quad (18)$$

Kada zamjenimo (17) i (18) u (13) dobićemo vrijednost kompleksne amplitude

$$g = \frac{A \sqrt{2} \omega_0^2}{z \omega^2} \exp(iM) \cdot \frac{ihx\pi}{p^4} \exp\left[-h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{p^2}\right] \cdot \left[\text{Erf}\left(pa - i\frac{hx}{p}\right) + \text{Erf}\left(pa + i\frac{hx}{p}\right) \right] \quad (19)$$

Ovo treba množiti sa konjugirano kompleksnim izrazom da bi dobili formulu rasporeda difrakcionog polja. U tom slučaju javlja se izraz

$$\left| \exp\left[-h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{p^2}\right] \right|^2 = \exp\left[-2\alpha h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)}\right] \quad (20)$$

i konačno dobivamo

$$I_{01} = \frac{2 A^2 h^2 \omega_0^2 \pi^2}{z^2 \omega^4 (\alpha^2 + \beta^2)^2} \cdot y^2 \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \right] \cdot \left| \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right|^2 \quad (21)$$

odnosno

$$I_{01} = C_1 F_1(x) \cdot G_1(y) \quad (22)$$

gdje su:

$$C_1 = \frac{2 A^2 \omega_0^2 h^2 \pi^2}{z^2 \omega^4 (\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (23)$$

$$F_1(x) = \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{x^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \left| \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right|^2 \quad (24)$$

$$G_1(y) = y^2 \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{y^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \quad (25)$$

Iz (24) i (25) lako je uočiti Gausove opadajuće funkcije duž x odnosno duž y osi u difrakcionom polju, što nije slučaj kod klasičnih izvora.

b) Slučaj $m=1$, $n=0$

U ovom slučaju presjek laserskog snopa u sredini ima vertikalnu tamnu liniju, tj. duž osi y . Odgovarajuće vrijednosti Hermitovih polinoma su:

$$H_1 \left(\frac{\sqrt{2} \xi}{\omega} \right) = 2 \frac{\sqrt{2} \xi}{\omega}, \quad H_0 \left(\frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \right) = 1 \quad (26)$$

Tada se formula za kompleksnu amplitudu (6) može dovesti na oblik

$$g = \frac{A}{z} \frac{2\sqrt{2} \omega_0}{\omega^2} \exp(iM) \int_{-a}^a \xi \exp[-p^2 \xi^2 - 2ihx\xi] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(p^2 \eta^2 - 2ihy\eta)] d\eta \quad (27)$$

i nakon rešavanja dobićemo

$$g = \frac{A}{z} \frac{\sqrt{2} \omega_0}{\omega^2} \exp(iM) \frac{\sqrt{\pi}}{p^3} \exp \left[-h^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{p^2} \right) \right] \left\{ \exp \left[- \left(pa + i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] - \exp \left[- \left(pa - i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] + i \frac{hx}{p} \left[\operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right] \right\} \quad (28)$$

Posle množenja sa konjugirano kompleksnim izrazom, intenzitet difrakci-
onog polja može se prikazati u obliku

$$I_{10} = G_2 \cdot F_2(x) \cdot F_2(y) \quad (29)$$

gdje su:

$$G_2 = 2 \frac{A^2 \omega_0^2}{z^2 \omega^4 \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^3}} \pi \quad (30)$$

$$F_2(x) = \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{x^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \left| \exp \left[- \left(pa + i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] - \exp \left[- \left(pa - i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + i \frac{hx}{p} \sqrt{\pi} \left[\operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right] \right|^2 \quad (31)$$

$$G_2(y) = \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{y^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \quad (32)$$

Kako se vidi (31) i (32) duž x, y osi difrakciono polje opada po zakonu
Gausove funkcije.

c) Slučaj $m=1, n=1$.

U ovom slučaju presjek udarnog snopa lasera ima tamnu prugu duž
obiju koordinatnih osi. Hermitovi polinomi imaju sledeće vrijednosti:

$$H_1 \left(\frac{\sqrt{2} \xi}{\omega} \right) = 2 \frac{\sqrt{2} \xi}{\omega}, \quad H_1 \left(\frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \right) = 2 \frac{\sqrt{2} \eta}{\omega} \quad (33)$$

a kompleksna difrakciona amplituda je oblika

$$g = \frac{8 A \omega_0}{z \omega^3} \exp(iM) \int_{-a}^a \xi \exp [-(p^2 \xi^2 - 2 i h x \xi)] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \eta \exp [-(p^2 \eta^2 - \\ - 2 i h y \eta)] d\eta \quad (34)$$

odnosno odgovarajući intenzitet

$$I_{11} = 16 \frac{A^2 \omega_0^2 h^2 y^2 \pi}{z^2 \omega^6 |p^5|^2} \exp \left[-2 \alpha h^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{p^2} \right) \right] \left| \exp \left[- \left(pa + i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[- \left(pa - i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] + i \frac{hx \sqrt{\pi}}{p} \left[\operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) \right] \right|^2 \quad (35)$$

Koristeći (25) i (31) poslednju relaciju možemo pisati na sledeći način

$$I_{11} = C_3 \cdot F_2(x) \cdot G_1(y) \quad (36)$$

gde je

$$C_3 = 16 \frac{A^2 \omega_0^2 h^2 \pi}{z^2 \omega^6 \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^3}}$$

d) Slučaj $m=0$, $n=0$

Naše ćemo rezultate specijalizirati još i za slučaj kad laserski snop ima osnovni multi mod. Tada je $m=n=0$ i presjek snopa nema tamnih linija, nego mu amplituda opada kad se udaljujemo od osi snopa po zakonu jedne Gausove funkcije. U tom slučaju treba uzeti

$$H_0\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{\omega}\right) = H_0\left(\frac{\sqrt{2}\eta}{\omega}\right) = 1$$

pa se formula (6) reducira na

$$g = \frac{A \omega_0}{z \omega} \exp(iM) \int_{-a}^a \exp\left[-(p^2 \xi^2 - 2ihx\xi)\right] d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(p^2 \eta^2 - 2ihy\eta)\right] d\eta \quad (37)$$

odnosno intenzitet

$$I_{00} = G_0 F_1(x) G_2(y) \quad (38)$$

gdje je

$$C_0 = \frac{A^2 \omega_0^2 \pi^2}{4 z^2 \omega^2 (\alpha^2 + \beta^2)}$$

Difrakciono polje (38) je tretirana u radu [1]. Funkcije $F_1(x)$ i $G_2(y)$ izražene su relacijama (24) i (32). Ovaj problem detaljno se tretira u [5].

DIFRAKCIJA NA PRAVOKUTNOM OTVORU

Dobiveni rezultati lako se mogu prenijeti na slučaj kad difrakcioni otvor mjesto pukotine ima oblik pravokutnika. Neka su polovine stranica pravokutnog otvora označene sa a i b . Problem se tretira analogno sa ranijim, samo što su u drugom integralu granice od $-b$ do b . Tako za slučaj $m=0$ i $n=1$ mjesto (11) imamo formulu

$$g = \frac{A}{z} \frac{2\sqrt{2} \omega_0}{\omega^2} \exp(iM) \int_{-a}^a \exp\left[-(p^2 \xi^2 - 2ihx\xi)\right] d\xi \int_{-b}^b \eta \exp\left[-(p^2 \eta^2 - 2ihy\eta)\right] d\eta \quad (39)$$

Posle rešavanja i množenja sa njemu konjugiranom izrazom izlazi sledeća vrijednost intenziteta difrakcionog polja

$$I_{01} = \frac{A^2 \omega_0^2 \pi}{2 z^2 \omega^4 |p^3|^2} \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \left| \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right|^2 \cdot \left| \exp \left[- \left(pb + i \frac{hy}{p} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + i \frac{hy}{p} \sqrt{\pi} \left[\operatorname{Erf} \left(pb - i \frac{hy}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pb + i \frac{hy}{p} \right) \right] \right|^2$$

Prema formulama (24) i (31) vidimo da se ovaj rezultat može pisati u obliku

$$I_{01} = \frac{A^2 \omega_0^2 \pi}{2 z^2 \omega^4 \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^3}} F_1(a, x) \cdot F_2(b, y) \quad (40)$$

Analognim postupkom izlazi za mod (1, 0) formula za intenzitet

$$I_{10} = \frac{A^2 \omega_0^2 \pi}{2 z^2 \omega^4 |p^3|^2} \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{\alpha^2 + y^2} \right] \exp \left[- \left(pa + i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] - \\ - \exp \left[- \left(pa - i \frac{hx}{p} \right)^2 \right] + i \frac{hx \sqrt{\pi}}{p} \left[\operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) \right] + \\ + \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) \right|^2 \left| \operatorname{Erf} \left(pb - i \frac{hy}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pb + i \frac{hy}{p} \right) \right|^2 \quad (41)$$

što se može napisati u obliku

$$I_{10} = \frac{A^2 \omega_0^2 \pi}{2 z^2 \omega^4 |p^3|^2} F_2(a, x) F_1(b, y) \quad (42)$$

Za mod (1, 1) izlazi

$$I_{11} = 4 \frac{A^2 \omega_0^2 \pi}{z^2 \omega^6 |p^4|^2} F_2(a, x) F_2(b, y) \quad (43)$$

Konačno u slučaju da je upadna svjetlost u nultom modu izlazi

$$I_{00} = \left(\frac{A \omega_0 \pi}{4 z \omega} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \exp \left[-2 \alpha h^2 \frac{(x^2 + y^2)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \left| \operatorname{Erf} \left(pa + i \frac{hx}{p} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{Erf} \left(pa - i \frac{hx}{p} \right) \right|^2 \cdot \left| \operatorname{Erf} \left(pb + i \frac{hy}{p} \right) + \operatorname{Erf} \left(pb - i \frac{hy}{p} \right) \right|^2$$

odnosno

$$I_{00} = \left(\frac{A \omega_0 \pi}{4 z \omega} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} F_1(a, x) F_1(b, y) \quad (44)$$

Poslednja relacija takođe je dobivena u radu [5].

LITERATURA

- [1] J. Moser, Lj. Janićević, R. Bejtullahu — Diffraction by linear apertures having gaussian transmittance, MANU Skopje (1980).
[2] A. M. Gončarenko — Gausovi pučki sveta, Nauka i Tehnika, str. 17 form. (3, 35) (1977).
[3] E. F. Iščenko — Otkritie optičeskie rezonatori, str. 96 form. (4,8a), (4,8b) i (4,10), Sov. Radio, Moskva (1980).
[4] M. Abramovitz, I. C. Stegun — Handbook of mathematical functions, str. 297 form. 7.1.1. N.Y. (1970).
[5] M. Kocić — disser. Skopje (1983).

DIFRAKSIONI I MODIT TE PARE TE LASERIT NE QARJE

J. Moser dhe R. Bejtullahu

Rezime

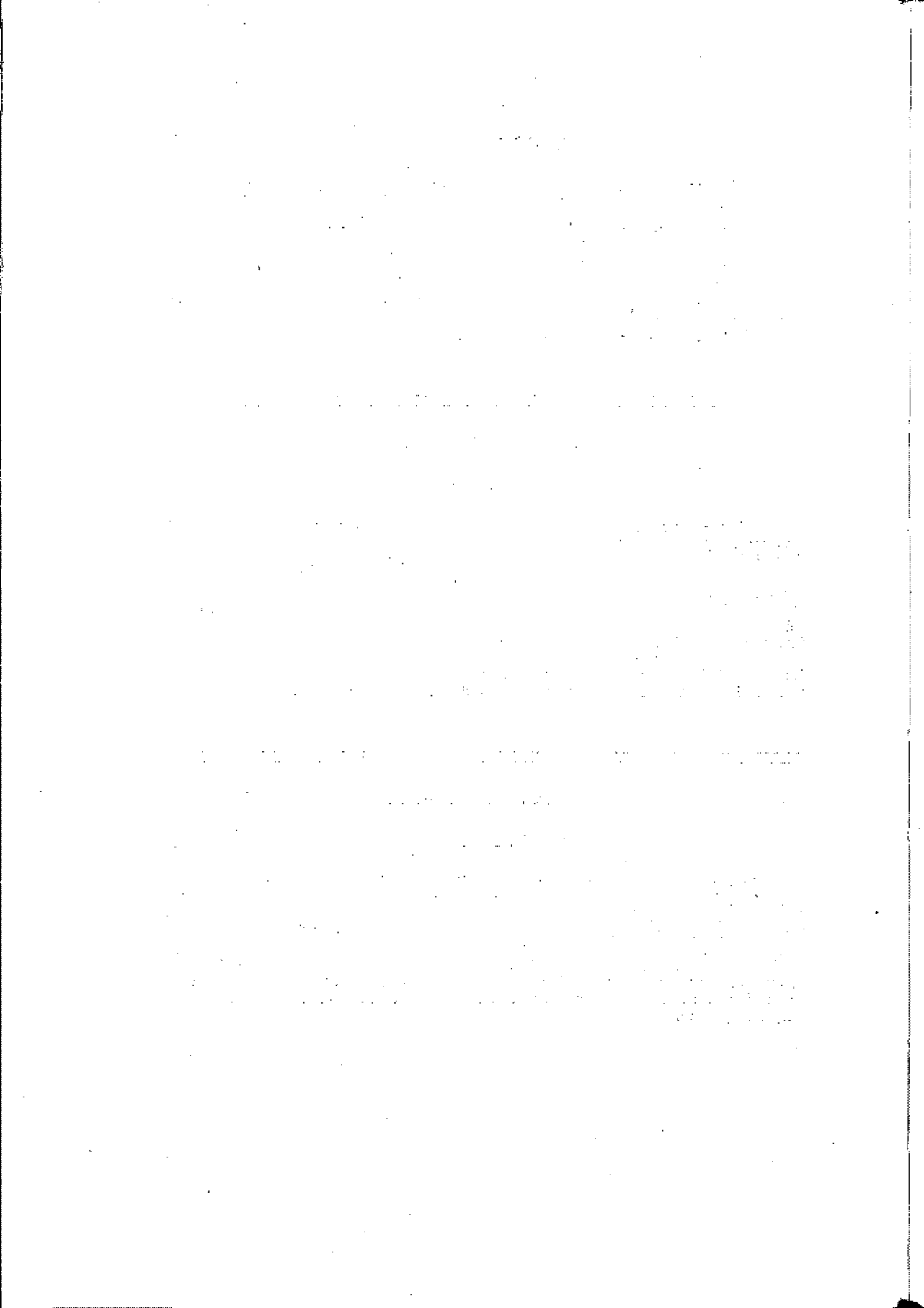
Në këtë punim shqyrtohet shpërndarja e fushës difraksionale të Fresnelit në ndonjë plan paralel me qarjen nëse kjo ndriqohet me tufë të laserit i cili punon në modin e parë. Tufa rënëse e laserit përshkruhet si prodhim i dy polinomeve të Hermitit të ndryshoreve të pamvarura dhe të një faktori eksponencial i cili i përcakton karakteristikat e saj. Trajtohen rastet kur shkalla e polinomeve është: $m=0, n=1$; $m=1, n=0$ dhe $m=n=1$. Gjithashtu shqyrtohet fusha dritësore difraksionale në hapje të formës së katërkëndshit për modet e cekura të laserit. Tregohet se ekziston një dallim karakteristik në mes të fushës së shqyrtuar, fushës së laserit në modin themelorë apo të ndonjë burimi klasik. Si karakteristikë themelore e të gjitha rasteve është rënja e intenzitetit të fushës në drejtime perpendikulare sipas funksionit të Gussit. Të gjitha fushat e shqyrtuara mund të shprehen si prodhim i dy funksioneve të cilat mvaren nga një ndryshore në planin paralel me qarjen.

DIFFRACTION IN SLIT FROM THE LASER BEAM OF THE FIRST MODE

J. Moser and R. Bejtullahu

Summary

In this article is given the distribution of Fresnel's diffractive field in some parallel plane behind the slit, which is illuminated with the beam from laser of the first mode. The falling beam is described as product of the Hermit's polynomials of two variables of m i n -level and an exponential factor which determines it's characteristics. The cases of the following levels of Hermit's polynomials are solved: $m=0, n=1$, $n=0$ and $n=m=1$. The problem of Fresnel's diffraction of this laser's beam in rectangular aperture is also solved. The formulated theory shows essential differences between this field, diffractive field of the laser's beam of the basic mode and classical source, in the case of diffraction in the slit that is rectangular aperture.



HULUMTIMI I KALIMEVE FAZORE NË SULFIDIN E BAKRIT SUPERJONIK ME METODËN E DILATIMIT TERMİK

Zahadin Shemsidini

Abstrakt

Në këtë punim është dhënë një shpjegim i hollësishëm për metodën e dilatimit termik me anën e së cilës hulumtohen kalimet fazore të materialet e ndryshme. Këtë metodë e kemi përdorur edhe të kristali i sulfidit të bakrit. Kristali i sulfidit të bakrit është sintetizuar në institutin e Fizikës në Zagreb. Po ashtu edhe matjet janë kryer në të njëjtin institut. Me metodën e dilatimit termik janë hulumtuar kalimet fazore të sulfidi i bakrit me koncentrim të ndryshëm (Cu_2S — Cu_{196}S) në intervalin e temperaturave prej 3000 .K deri 700 .K.

HYRJE

Përçuesit superjonik paraqesin një klasë të re të përçuesve jonik. Përçuesit superjonik janë materiale të ngurtë të cilët në fazën superjonike karakterizohen me përçueshmëri të madhe jonike, të rendit $1 \text{ ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$, që është përafërsisht e njëjtë me vlerën e përçueshmërisë jonike në elektrolitët e lëngët.

Përçuesit e ngurtë jonik të cilët karakterizohen me përçueshmëri të lartë jonike, posedojnë^{1,2} një ose më shumë transformime fazore. Këto transformime fazore shpeshherë janë të përcjellura me ndërrime të strukturës kristaline, të cilat janë të lidhura me kalimet fazore të rendit të parë. Te kalimet fazore të rendit të parë, në kufirin e kalimit, përçueshmëria jonike pëson kërcime të larta e të mprehta. Te kalimet fazore të rendit të dytë përçueshmëria jonike ndryshon në mënyrë kontinuale. Transformimet magnetike, kalimet rregullësi-çrregullësi, kalimet në gjendje të superpërçueshmërisë etj. janë shembuj të kalimeve fazore të rendit të dytë. Kalimet fazore në fazën superjonike zakonisht janë të rendit të parë-të përcjellura me ndryshime në strukturën kristaline si psh. Ag^1 , Ag_2S , Ag_2Se , CuBr , Cu_2S etj.

Sulfidi i bakrit bën pjesë në grupin e komponimeve të cilat i përbëjnë elementët e grupit të parë dhe të gjashtë të sistemit periodik të elementeve e që paraqiten me formulë të përgjithshme $\text{A}_2^{\text{Ib}} \text{B}^{\text{VIb}}$. Karakteristikë e këtyre komponimeve është mundësia e egzistimit të tyre në përbërje jostehiometrike.

Me Cu_{2-x}S shënojmë formulën jostehiometrike të sistemit Cu-S ku X paraqet devijimin nga përbërja stehiometrike. Karakteristikë tjetër e komponimeve $\text{A}_2^{IV}\text{B}^{VI}\text{S}$, në fazën e temperaturave të larta, është stabiliteti i tyre si dhe përçueshmëria e lartë jonike. Pra, sulfidi i bakrit dallohet për kah përçueshmëria elektronike dhe jonike.

EKSPERIMENTI

Për matjen e dilatimit termik të sulfidit të bakrit superjonik është përdorur dilatometri i tipit S.A.D.A.M.E.L., volmetri digital »DANA 5000« dhe programatori për ngrohje lineare. Shema e aparaturës është paraqit në fig. 1. Mostra e cila është përgaditur për matje, vendoset në mbajtësin e kuar-

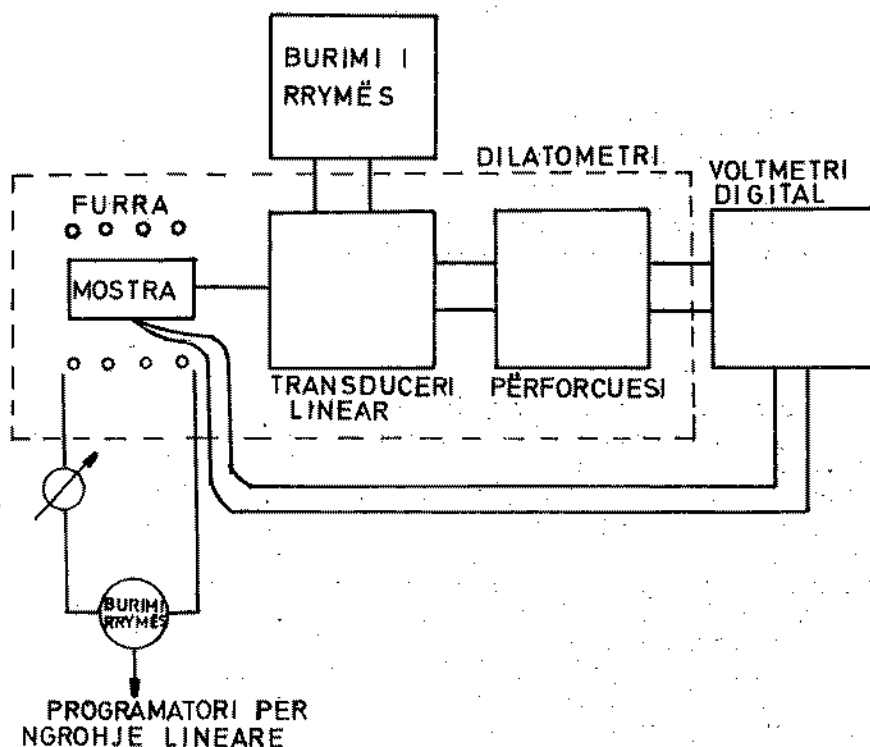


Fig. 1

cit. Në sipërfaqen e mostrës ngjitet me kujdes termoelementi bakër-konstantan. I tërë sistemi gjindet në presion prej $133,322 \cdot 10^{-6}$. Mostra ngohet me një shpejtësi të njëtrajtëshme prej 3K/min. Zgjatja e mostrës regjistrohet në transducerin linear (fig. 2) në formë të tensionit elektrik V_d . Pas përfircimit signali

dërgohet në voltemtrin digital »DANA 5000« në të cilin e lexojmë tensionin e termoelementit. Zgjatja e mostrës njehsohet në këtë mënyrë:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{V_d - V_0}{L_0 N}$$

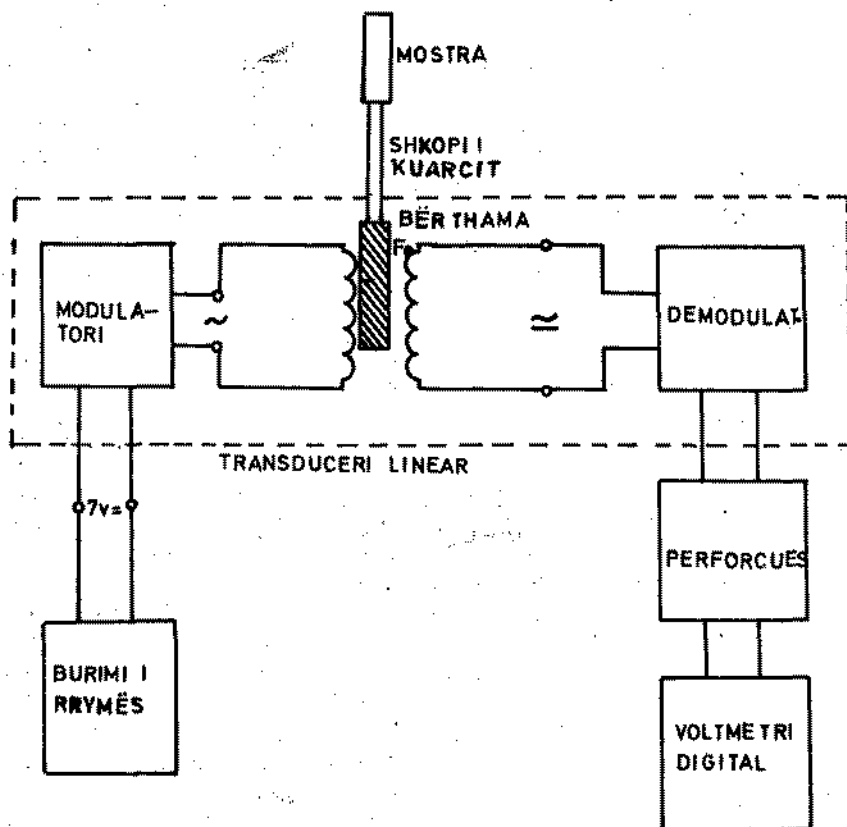


Fig. 2

ΔL — ndryshimi më i vogël i gjatësisë,

L_0 — gjatësia fillestare e mostrës

V_0 — tensioni që i përgjigjet gjatësisë së mostrës para ngrohjes

V_d — tendioni që i përgjigjet gjatësisë së mostrës me rastin e ngrohjes,

N — ndieshmëria e aparaturës, $N=210 \mu V/\mu m$

Si karakteristikë e zgjerimit termik të trupave anizotrop futët koeficienti linear i dilatatit termik që njehsohet sipas barazimit:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{d(\Delta L)}{dT}$$

REZULTATET E MATJEVE DHE ANALIZA E REZULTATEVE

Në fig. 3 dhe 4 janë paraqitur lakoret e varshmërisë së koeficientit linear të dilatimit termik nga temperatura. Pasi që në intervalin e temperaturave prej 300 K deri 353 K nuk është detektue asnjë ndryshim në dilatimin termik të mostrës, për këtë arsye të gjitha rezultatet e matjeve janë të dhënuna prej temperaturës 353 K.

Kalimi fazor në temperatura të ulta tek sulfidi i bakrit stehiometrik (Cu_2S) është paraqitur në fig. 3 me një maksimum të mprehtë. Forma e këtij maksimumi është karakteristike për kalimet fazore të rendit të parë. Me rastin e zhvendosjes nga përbërje stehiometrike, përveç një maksimumi të mprehtë, në anën e majtë, paraqitet edhe një maksimum i vogël. Gjatë zhvendosjes së mëtejshme nga përbërja stehiometrike e sulfidit të bakrit, maksimumi i parë bëhet gjithnjë më i madh ndërsa maksimumi i dytë gjithnjë zvoglohet. Kështu që tek koncentrimi $\text{Cu}_{1.97}\text{S}$ maksimumi i dytë zhduket krejtësisht. Në bazë të formës së këtyre maksimumeve përfundojmë se këto janë dy kalime fazore të rendit të parë. Temperaturat e kalimit (369 K dhe 379 K) janë në përputhje të plotë me rezultatet e fituara të autorve tjerë. Sipas të dhënave strukturale^[357] në 379 K halkociti ortorombik kalon në halkocitin heksagonal dhe në 369 K rrjeta me simetri të ulët e ashtuquajtur rrjetë Djurleite kalon në përzirje të halkocitit heksagonal dhe digenitit me temperatur të lartë.

Në temperaturë prej 453 K koeficienti linear i dilatimit termik tregon një maksimum në formë të gërmës greke lambda (λ). Forma e këtij maksimumi është karakteristike për kalimet fazore të rendit të dytë. Në lidhje me egzistimin e këtij kalimi fazor janë paraqitur mendime të ndryshme. Për herë të parë Luquet me beshkpuntorët^[4] kanë detektuar kalimin fazor rreth temperaturës 448 K, me anë të analizës diferenciale termike (ADT), që paraqet transformimin e fazës tetragonale. Me matjet tona të dilatimit termik definitivisht u vertetua egzistenca e këtij kalimi fazor.

Koeficienti linear i dilatimit termik si funksion i temperaturës tek sulfidi i bakrit me koncentrim Cu_2S dhe $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$ tregon edhe një anomali në intervalin e temperaturës 511 K — 553 K. Në bazë të matjeve të dilatimit termik^[7] mund të themi se në intervalin e përmendur të temperaturës kryhet një kalim fazor. Në hulumtimet e deritanshme të sistemit $\text{Cu} - \text{S}$ asnjë autorë nuk e përmend egzistimin e këtij kalimi fazor. Duke i vërejtur lakoret në fig. 3 dhe 4 përfundojmë se ky kalim fazor sipas formës së tij është kalim fazor rregullësi çnngullesi të sistemit të kationeve.

Në temperatura të larta të sulfidi i bakrit stehiometrik (Cu_2S) është vërejtur edhe një kalim fazor i cili është i paraqitur me një minimum të mprehtë. Forma e një minimumi të tillë është karakteristike për kalimet fazore të rendit të parë që kanë të bëjnë me ndërrimet në rrjetën kristaline. Mirpo, përveç minimumit të tillë paraqitet edhe një plato që tregon se kalimi fazor nuk është transformim fazor monotemporal.

Te mostrat jostehiometrike të sulfidit të bakrit, siç shihet nga fig. 3 dhe 4, forma e minimumit ndryshon duke filluar nga koncentrimet e larta kah koncentrimet e ulta të bakrit. Te koncentrimet e ulta të bakrit këto minimume

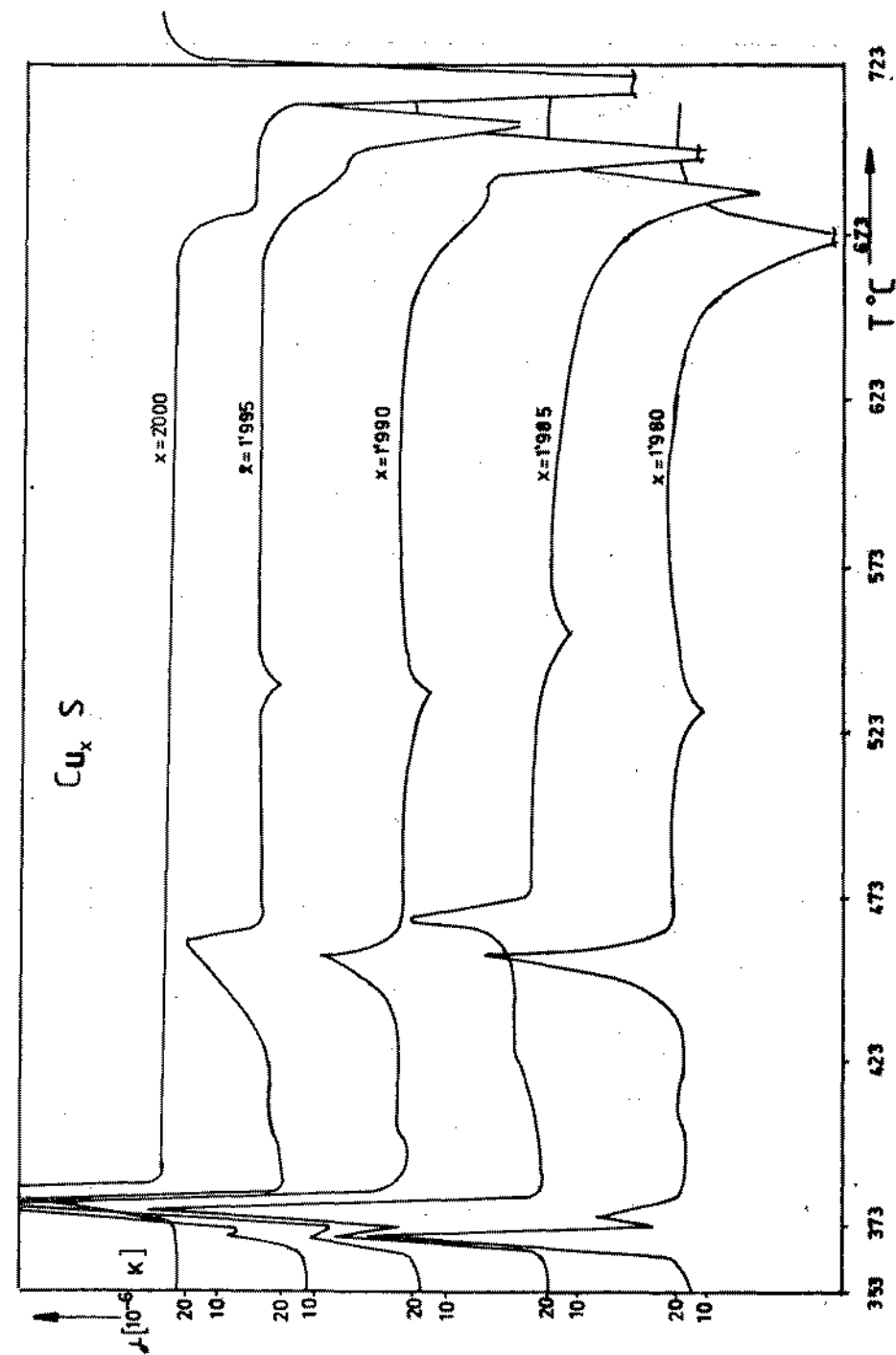


Fig. 3

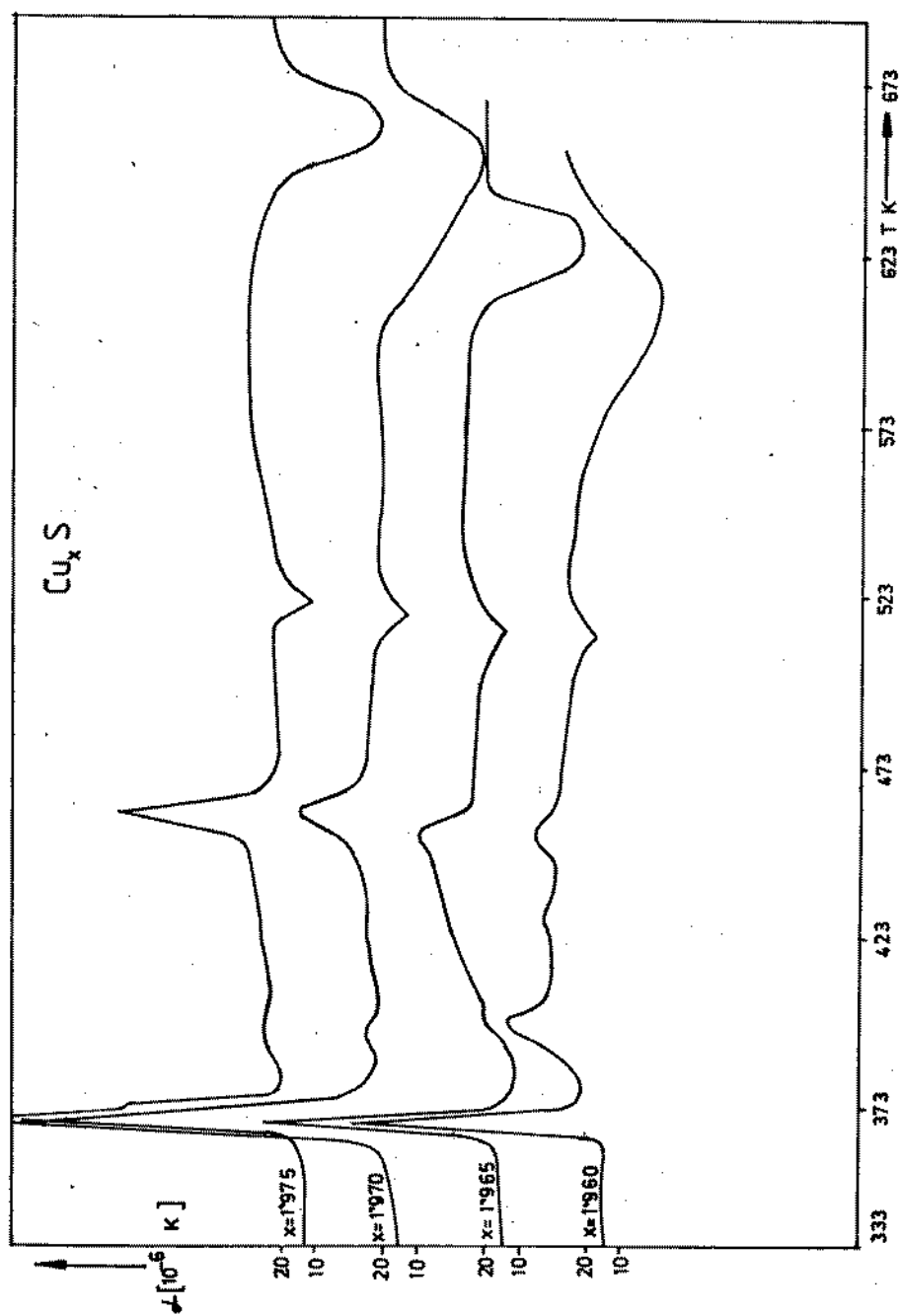


Fig. 4

janë më të gjëra. N'anën tjetër, nga lakoret në fig. 3 dhe 4 shihet se kalimi fazor nuk bëhet në të njëjtën temperaturë dhe se varët nga koncentrimi i bakrit. Sipas të dhënave strukturale^[3,5,7] kalimi fazor që zhillohet në temperatura të larta i përgjigjet transformimit të halkocitit heksagonal në halkocitin kubik faqe centruar (CFC).

Në fund shtojmë së shumica e materialeve posedojnë fazë superjonike në temperatura të larta (disa qindra Kelvin mbi temperaturën e dhomës), kështu që mundësia e aplikimit të tyre është e vogël. Prandaj, hulumtimet që po bëhen viteve të fundit janë të orientuara kah studimi i atyre faktorve që ndikojnë në uljen e temperaturës së kalimit fazor superjonik.

PERFUNDIM

Në matjet e deritanishme të madhësive elektrike, mekanike si dhe hulumtimeve Rentgene^[4,5,6] në mostrat e sulfidit të bakrit me koncentrim $\text{Cu}_2\text{S} - \text{Cu}_{1.96}\text{S}$, është treguar se në intervalin e temperaturave prej 300 K — 700 K egzistojnë katër kalime fazore. Me matjet tona të dilatimit termik është gjetur se në intervelin e temperaturave të përmendura egzistojnë pesë kalime fazore. Kalimi i ri fazor është i rendit të dytë dhe paraqet një risi në problemin e përqueshmërisë superjonike.

LITERATURA

- [1] L. M. Hansen, *Constitution of Binary Alloys*, Mc Graw-Hill, New York, 1958
- [2] W. B. Pearson, *A Handbook of Lattice Spacing and Structures of Metals and Alloys*, Pergamon Press, London, 1958
- [3] S. DJURLE, *Acta Chemica Scandin.* 12 (1958) 1415
- [4] H. Luquet, F. Guastavino, J. Bougnot and J. C. Vaisiere, *Mat. Res. Bull.* 7 (1972) 955
- [5] E. H. Roseboom, *Econ. Geology* 61 (1966) 641
- [6] Z. Shemsidini, *Magistratura*, Zagreb, 1981
- [7] H. Rau, *J. Phys., Chem. Solids* 28 (1967) 903

Zahadin Shemsedini

Summary

Upto now measurements of electric, mechanic size, as well as electronic diffraction^[4,5,6] in the patterns of cuprus sulfid with a concentration $\text{Cu}_2\text{S} - \text{Cu}_{1.96}\text{S}$ have shown that in interval temperatures between 300 K—700 K there exist four phase transitions. In our measurements of thermal expansion it has been found that at the above mentioned temperature intervals there exist five phase transitions. The new phase transition is second order and it is something new in the case of superionic conduction.

Zahadin Shemsidini

Z a k l j u č a k

U dosadašnjim mjerenjima električnih i mehaničkih veličina kao i Rentgenskih istraživanja^{4,5,6}, u uzorcima bakar sulfida koncentracije Cu_2S — $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$, pokazano je da u intervalu temperatura od 300 K—700 K postoje četiri fazna prijelaza. Našim mjerenjima termičke dilatacije pokazano je da u spomenutom intervalu temperatura postoje pet faznij prijelaza. Novi fazni prijelaz predstavlja jednu novinu u problemu superjonske provodljivosti.

MOLEKULSKA STRUKTURA, OSOBINE KRISTALA I DEFORMACIJE TELA

(didaktičko-metodski pristup)

Branko Teofilov

I. KARAKTERISTIKE KRISTALNOG STANJA (kratak uvod)

Čvrsta tela u prirodi, u većini slučajeva, imaju kristalnu strukturu (grčki -kristalos — led). Takvu strukturu imaju: metali, granitne i bazaltne stene, pesak, gips, dijamant, kamena so, i dr. Ne zaboravimo da kristalnu strukturu imaju i razne supstance organskog porekla, kao na pr. belančevine, karotin i dr.

Svedoci smo činjenice da danas, u savremenoj nauci i tehnici kristali nalaze veoma široku upotrebu u raznim oblastima: radiotehnika elektronika, automatizacija, ultrazvuk, spektroskopija, optika i dr.

Pošto se potrebe nauke i tehnike danas ne mogu zadovoljiti korišćenjem prirodnih kristala, javlja se potreba za veštačko stvaranje kristala sa unapred poznatim fizičkim i mehaničkim osobinama u zavisnosti od oblasti njihove primene. Danas i nije nikakva tajna stvaranje veštačkih kristala korunda, kvarca (koesita), dijamanta (borazona), germanijuma i dr, na osnovu poznavanja zakona kojima se kristali pokoravaju.

Poznato je da se kristali sastoje iz čestica (atoma, jona, molekula), ali u celini oni imaju takve osobine kakve nemaju pojedine čestice njihove građe. Zato kažemo da kristale nismo smatrati kao prosti zbir čestica od kojih su oni izgrađeni.

Tela koja se ne mogu javiti u kristalima, kao npr., uglj, staklo, opal, asfalt, ćilibar, vosak, i dr. zovu se AMORFNA TELA (grčki — amorfne = bez oblika). I ova tela zovemo čvrstim, međutim, po svojoj molekulskoj strukturi i nekim osobinama, oni se više približavaju veoma viskoznim tečnostima.

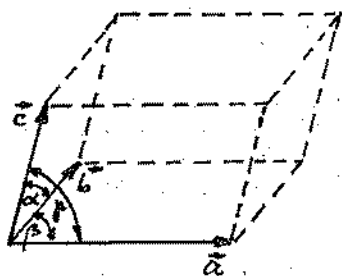
Karakteristična osobina kristalnog stanja, koje se razlikuje kako od gasovitog, tako i od tečnog, je ANIZOTROPIJA. To je zavisnost čitavog niza fizičkih (toplotnih, električnih, optičkih) i mehaničkih osobina od jednog određenog pravca u kristalu. Tela čije su osobine iste u svim pravcima zovu se IZOTROPNA. Pored gasova i, u izvesnom smislu i tečnosti, izotropna su i sva amorfna tela.

Uzrok anizotropije kristala leži u pravilnom rasporedu elementarnih čestica građe iz kojih su oni izgrađeni. Ova zakonitost i raspored čestica izražava se pomoću PROSTORNE KRISTALNE REŠETKE.

Pravilan raspored građe manifestuje se u pravilnom spoljašnjem obliku kristala. Poznato je da su oni ograničeni ravnima koje se međusobno seku po ivicama pod strogo određenim i poznatim uglovima. Cepanje — razdvajanje kristala je mnogo lakše izvršiti po određenim ravnima — ravnima cepanja, koje su paralelne ravnima kristala.

Eksperimentalnu potvrdu pravilne građe kristala dao je LAUE 1912. god. metodom difrakcije rentgenskih zraka koji prolaze kroz kristal. Pomoću ove metode koja može da se kombinuje i fotografiranjem, danas smo u stanju da u potpunosti ispitujemo kristalne strukture i dokazujemo postojanje i oblik prostorne kristalne rešetke.

Sa osobinama koje su nabrojane raspolažu MONOKRISTALI. To su pojedinačni kristalići. Međutim, u prirodi kristalne supstance se, najčešće, javljaju u obliku skupa haotično orijentiranih i međusobno povezanih monokristala koje zovemo POLIKRISTALIMA. Kod polikristala anizotropija se može pojaviti samo u granicama monokristalića, ali u celini oni ne pokazuju anizotropiju zbog haotičnog rasporeda monokristalića i uzajamne kompenzacije fizičkih i mehaničkih osobina u raznim pravcima monokristalića. Danas su poznati tehnološki postupci da, pod specijalnim uslovima kristalizacije, iz nekog rastvora možemo dobiti velike monokristale date supstance. Mono kristale nekih minerala danas susrećemo i u prirodi, kao npr., islanski kalcit-dvolomac.



Sl. 1

Pravilnost u rasporedu čestica kristala ogleda se u tome što se čestice kristala nalaze u čvorovima (mesto preseka tri ili više ravni kristala) pravilne prostorne rešetke. Ceo kristal možemo dobiti ako mnogokratno ponavljamo — premeštamo, u tri različita pravca jedan isti strukturni element koga zovemo ELEMENTARNA KRISTALNA, ČELIJA — sl. 1.

Dužine ivica a , b i c kristalne ćelije zovemo PERIODAMA IDENTIČNOSTI KRISTALA, ili KONSTANTA REŠETKE.

Iz slike vidimo da kristalna ćelija predstavlja paralelepiped konstruisan iznad vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, čije su brojne vrednosti (moduli) periode identičnosti. Ovaj paralelepiped se, pored ivica a , b i c , karakteriše i uglovima α , β i γ između ivica. Veličine a , b i c , kao i uglovi α , β i γ jednoznačno određuju elementarnu ćeliju i zovu se njeni PARAMETRI, a vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zovu se VEKTORI OSNOVNIH TRANSLACIJA.

Kristalna rešetka može imati različite oblike simetrije. Pod simetrijom kristalne rešetke podrazumevamo osobinu rešetke da se poklopi sama sa sobom posle nekih prostornih premeštaja. To su: 1) Translacija — poklapanje

same sobom pri translaciji za veličinu perioda identičnosti; 2) simetrija u odnosu na rotaciju oko ose simetrije, i 3) ogledalska simetrija u odnosu na određenu ravan — ravan simetrije. Po pravilu, kristalna rešetka raspolaže istovremeno sa nekoliko oblika simetrije. Moguće su 230 kombinacija elemenata simetrije, koje su nazvane PROSTORNE GRUPE koje se mogu svrstati u 32 klase.

Po obliku elementarne ćelije kristale delimo u 7 kristalografskih grupa: triklinična, rombična, tetragonalna, romboedrična, heksagonalna, kubična i monoklinična.

I na kraju spomenimo da, u zavisnosti od vrste (prirode) čestica koje se nalaze u čvorovima kristalne rešetke, kao i od karaktera sila uzajamnog delovanja između čestica — elemenata građe, razlikujemo 4 tipa kristalnih rešetki, odn. kristala: jonski, atomski, molekulski i metalni.

II. METODSKA RAZRADA SADRŽAJA

Ovo tematsko područje je jedno od osnovnih tematskih sadržaja MOLEKULSKE FIZIKE koja čini drugu tematsku celinu od pet tematskih celina koje, programski, obuhvataju celokupno gradivo za II razred zajedničkih osnova srednjeg usmerenog obrazovanja (ZOSUO). Ona je, uglavnom, okrenuta elementima statističke fizike, i nosi naziv FIZIKA VELIKOG BROJA MIKROČESTICA. Prema strukturi nastavnog programa iz fizike za I i II razred ZOSUO, ona čini prelaz između tematskih celina I razreda koja, sadržajno, pripadaju pojavama i zakonima MAKROFIZIKE i tematskih celina II razreda koja se odnose na pojave, pojmove i zakona MIKROFIZIKE.

Polazna zamisao molekulske fizike sastoji se u zahtevu da se, na osnovu postavki MOLEKULSKO-KINETIČKE TEORIJE (MKT), na jednostavnim primerima za sva tri agregatna stanja supstance, shvati da su pojave gasnog stanja, površinskog napona i kapilarnosti, kao i elastičnost čvrstih tela, posledica uzajamnog delovanja molekula u zavisnosti od strukture supstance.

Stiče se utisak da je područje elastičnosti, za razliku od ostalih osnovnih tema, relativno najslabije metodski obrađeno. Jedan od uzroka ovakvog shvatanja i stanja je svakako i vrlo česta promena sadržaja teme, odn. nedefinisanost njenog sadržaja u nastavnom programu, što dovodi do razrade i obrade sadržaja samo sa aspekta primene a ne i fizičkog karaktera.

Iz ovoga sledi zaključak da u osnovi tema iz ove oblasti moraju dominirati podaci o fizičkim pojavama u kristalnim telima, koje su povezane sa kretanjem molekula i njihovim uzajamnim delovanjem. To znači da se i ove pojave moraju objasniti sa stanovišta MKT o strukturi supstance i pojma unutrašnje energije. Korišćenje MKT radi objašnjenja toplotnih, elastičnih i plastičnih osobina kristala vodi ka isticanju značaja molekulske fizike u nastavnom programu. Isto tako nesmemo zanemariti i vrlo važnu činjenicu, da pojmovi i zakoni ove teme imaju veliki naučni i politehnički značaj, jer se danas široko korišćenje čvrstih tela u savremenoj industriji (mašingradnja, elektronika i dr.) definiše na osnovu različitih fizičkih i mehaničkih osobina.

Iz ovih razloga, učenici nove reformisane srednje škole moraju dobro upoznati i poznavati ove osobine jer se u njoj pripremaju za aktivno uključivanje u proizvodnji.

Na početku ove teme nastavnik je dužan da učenicima objasni da čvrsta tela nisu samo metali i kristali, već i staklo, beton, plastične mase i mnogi drugi građevinski i industrijski materijali. Međutim, pošto se fizika bavi proučavanjem samo nekih mehaničkih, toplotnih, električnih i magnetnih osobina ovih supstanci, na osnovu ponašanja i ovih osobina, ona ih deli na kristalna i amorfna tela.

Osnovna osobina čvrstih tela u pogledu primene u tehnici je njihova elastičnost.

Šta učenici treba da znaju o kristalima?

- prvo — da se karakterišu sa spoljašnjom pravilnošću oblika;
- drugo — anizotropijom i
- treće — strogo određenom tačkom topljenja.

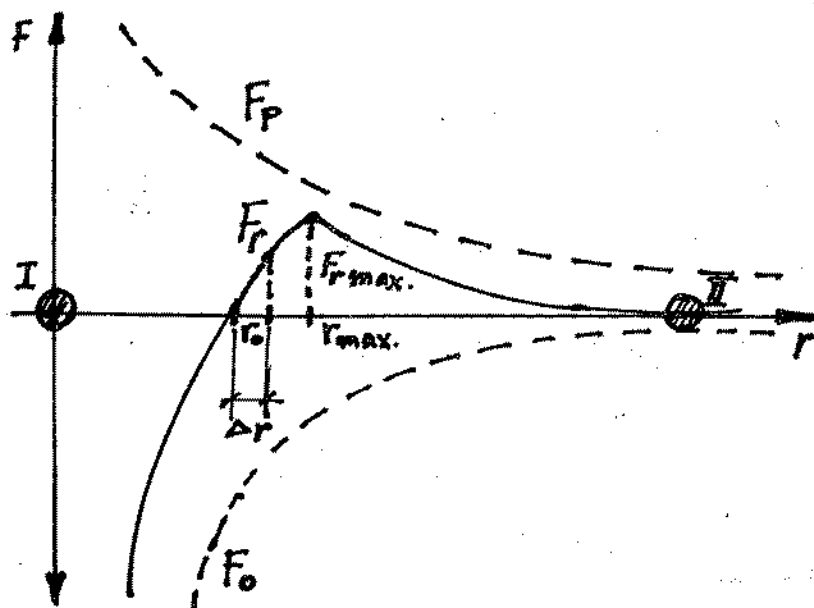
Pravilnost oblika se može pokazati korišćenjem neke kolekcije kristala a anizotropija — demonstracionim ogledima u kojima koristimo supstance poznate učenicima iz svakodnevnog života, kao npr. gips, liskun (cepanje liskuna u tanke listiće u jednoj ravni) i dr. Isto tako pri objašnjavanju razlika između kristala i amorfniha tela, obavezno je potrebno koristiti i znanja učenika iz osnovne škole o temperaturama topljenja čvrstih tela.

Proučavanje kristalnih rešetki treba započeti sa najprostijom — kubnom rešetkom NaCl, a proučavanje ostalih treba povezati sa elementima građe, koji mogu da budu: atomi, molekuli, joni. Vrlo često, šematske slike kristala koje se nalaze u udžbenicima su nerealne i dovode do pogrešnih shvatanja o razmerama čestica i rastojanjima između njih. Na taj način predstava o kompaktnom dodiru (tzv. pakovanje) ostaje tuđa učenicima, jer iz slika vide da su rastojanja između čestica mnogo veća u odnosu na dimenzije samih čestica. Zato treba naglasiti da je kristalna rešetka samo uslovan prikaz vezivanja molekula, atoma ili jona u kristalu. Da u kristalima postoji kompaktno pakovanje možemo se ubediti navođenjem eksperimentalne činjenice da slobodni prostor između čestica čini samo 26% od ukupne zapremine kristala.

Jedno od važnih pitanja koje treba znalački metodski obraditi je pitanje uzroka koji uslovljavaju pravilan raspored čestica u kristalima, a to je njihovo uzajamno delovanje. I ovde će, kao i kod drugih agregatnih stanja, vrsta i veličina sila uzajamnog delovanja između čestica kristala zavisiti od rastojanja između njih. Zato se preporučuje da se ovo pitanje obradi preko grafika privlačnih i odbojnih sila, kao i njihove rezultante, jer će preko njih učenici bolje shvatiti karakter promene ovih sila, tj. dobiti savremeno shvatanje o međumolekulskim silama. Napomenimo da je objašnjenje prirode međumolekulskih sila postalo moguće tek u 20. veku, kada je već bila poznata struktura atoma i kada se pojavila kvantna mehanika. (sl. 2)

Gornja kriva pokazuje zavisnost privlačnih (unutrašnjih—elastičnih) sila F_p od rastojanja r između čestica I i II, tj. centara molekula. Donja kriva daje grafički zavisnost odbojnih sila F_o od rastojanja r između centara molekula I i II i nosi znak »minus«. Veća strmina ove krive odgovara bržoj pro-

meni F_0 sa r u odnosu na promenu F_p . Puna kriva linija je rezultanta F_r . Vidimo da ona menja znak u tački $r=r_0$, pri prelazu od $r>r_0$ ka $r<r_0$. Tačka $r=r_0$ na ovoj krivoj liniji odgovara položaju ravnoteže molekula, jer je onda $F_r=0$. Počev od r_{max} rezultanta privlačnih sila se smanjuje dosta brzo sa porastom r , a između $r=r_0$ i $r=r_{max}$ ona raste skoro po pravoj liniji — linearno. Ispod $r<r_0$ rezultanta je odbojnih sila koja raste brže sa smanjivanjem r .



Sl. 2

Rastojanje r_0 ima prosti fizički smisao — to je ono rastojanje na kome se približavaju molekuli — čestice, kada na njih ne deluju nikakve spoljašnje sile. Ovo rastojanje približno odgovara dijametru molekula, odn. čestica.

a). Objašnjenje mehanizma elastičnih deformacija preko sila

Ako na primer, na štap dužine L_0 delujemo aksijalnim naponom σ odn. silom F , štap će se izdužiti za ΔL . Sigurno je da će se onda i rastojanje, između čestica povećati za Δr (vidi sliku) pa slobodno možemo reći da važi odnos

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta r}{r_0}$$

Ako je izduženje štapa malo ($\Delta L \ll L_0$) onda će i $\Delta r \ll r_0$, u ovom slučaju zavisnost između Δr i F koja je izazvala ovo povećanje će biti linearna (slika). Onda će linearna biti i zavisnost i između $\sigma = F/S$ i relativnog izduženja $\Delta L/L_0$, tj. za ovaj deo promene potpuno važi poznati Hukov zakon.

Kada prestane dejstvo sile deformacije F , onda će F_r elastičnih sila u telu vratiti česticu u početni položaj r_0 .

Iz slike 2 vidimo da kod većih deformacija proporcionalnost između Δr i F_r više ne postoji, i tu počinju odstupanja od Hukovog zakona. Kada je napr., $r=r_{\max}$ F_r postiže najveću vrednost kao privlačna sila. Kod još većih deformacija Δr elastične privlačne sile ne mogu da uravnoteže silu deformacije F pošto vrlo brzo opadaju, što dovodi do pojave trajnih deformacija, tj. kidanje tela.

Prilikom sabijanja tela, tj. smanjenja rastojanja ispod r_0 preovladavaju odbojne elastične sile kao povratne.

Smatram da nastavniku neće biti teško da na ovaj način, relativno pojednostavljen, objasni zavisnost međumolekulskih sila od r između čestica, što verujem omogućuje da bolje i dublje objasnimo i pojavu elastičnih sila koje vraćaju čestice u ravnoteži položaj posle prestanka dejstva sile deformacije F , kao i kidanje materijala odn. pojavu trajnih deformacija u telima.

b). Objašnjenje mehanizma elastičnih deformacija preko promene unutrašnje energije tela

Poznato je da su deformacije tela, npr. istezanje i stezanje, povezane i sa promenom unutrašnje energije tela: u oba slučaja unutrašnja energija se povećava na račun rada sile deformacije. Posle prestanka dejstva sile deformacije F telo teži da se vrati u stanje koje odgovara minimumu potencijalne energije, ako je deformacija bila elastična (vidi sl. 3 i uporedi sa sl.2). Iz ovoga možemo izvesti zaključak da elastična deformacija ima energetski karakter, što je vrlo važno za shvatanje mehanizma od strane učenika.

Zavisnost potencijalne enrgije E_p uzajamnog delovanja čestica možemo najjednostavnije prikazati pomoću grafika na sl. 3, koga iako izvodimo preko poznate veze

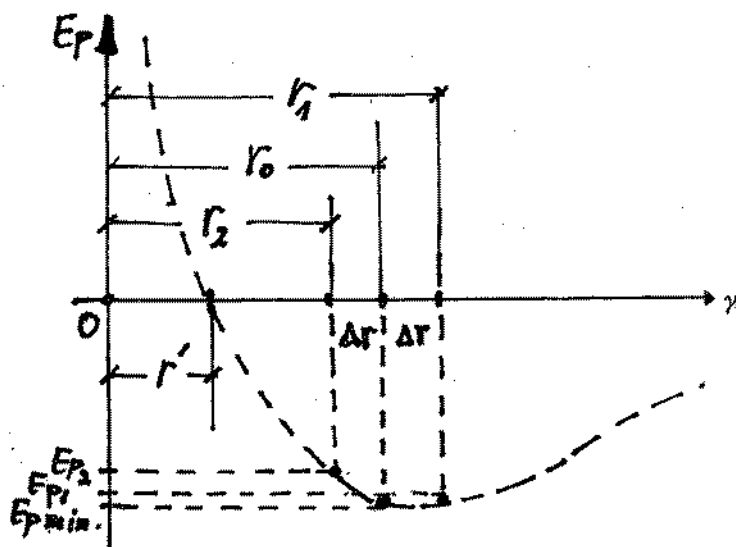
$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}; \quad E_p = \int_r^{\infty} F(r) dr$$

Vidimo da položaju ravnoteže čestica na rastojanju r_0 odgovara $E_{p\min}$. I pri povećanju (r_1) i pri smanjenju (r_2) rastojanja između čestica za Δr , E_p raste, jer trošimo rad, pri čemu je sabijanje praćeno bržim porastom unutrašnje energije E_{p2} . Kada $r \rightarrow \infty$ $E_p \rightarrow 0$ a kada $r \rightarrow r'$, ona opet postaje nula isto kao i beskonačnosti. Minimalno rastojanje $r=r'$ na koje se mogu približiti centri čestica, zove se **EFEKTIVNI DIJAMETAR ČESTICE**.

Iz ovoga možemo zaključiti da čestice ne možemo približavati neograničeno, dok pri udaljavanju to je moguće. Međutim, praktično, na nekom velikom rastojanju dolazi do razbijanja veze između čestica, tj. do kidanja tela.

Kako ova objašnjenja mehanizma povezati sa strukturom kristala? Pod normalnim uslovima gradivne čestice osciluju oko svojih ravnotežnih položaja r_0 , pa su sile koje se onda manifestuju jednake po veličini, te se uzajamno uravnotežuju. Pošto sve čestice učestvuju u toplotnom — haotičnom kretanju, rastojanja između njih će se neprekidno menjati, ali ne zbog toga

što se čestice približavaju ili udaljavaju, već zbog toga što se menjaju rastojanja između momentalnih ravnotežnih položaja oscilovanja. Iz ovoga sledi važan zaključak, da će srednje rastojanje između čestica kristala zavisiti od njegove temperature. Ovo znači da toplotno kretanje čestica u kristalu narušava kompaktno pakovanje i poremećuje pravilan raspored.



Sl. 3

Pojmove elastične i plastične deformacije, bez sumnje, moramo uvesti eksperimentalnim putem, izvođenjem poznatih demonstracionih ogleda, ali njihov mehanizam moramo objasniti sa stanovišta MKT o strukturi tela. Na primer, čestice čvrstog tela, pod normalnim uslovima, se nalaze u ravnoteži. Prilikom uzajamnog delovanja sa nekim drugim telom (interakcija) koje ga sabija, ravnoteža između čestica se menja, jer se smanjuje rastojanje između njih. Ovo dovodi do pojave odbojnih sila, koje su jače od privlačnih (vidi sl. 2), i kao rezultat ovoga javlja se jedna dopunska sila koja deluje ka ravnotežnom položaju r_0 . Ova sila se zove ELASTIČNA. Njena veličina zavisi od sile uzajamnog delovanja između čestica, tj. od hemijskog sastava tela, ili tipa kristalne rešetke. Znači, kod deformacije sabijanja i istezanja se javljaju elastične sile koje imaju atomsko-molekularno poreklo. One se suprotstavljaju spoljnim silama deformacije i, kada ove prestaju da deluju, vraćaju telo u početno stanje.

Plastične deformacije su rezultat postojanja poznatih ravni rešetke koje su paralelne ravnima kristala uzduž kojih se oni cepaju. Između ovih ravni sile privlačenja su slabije od sile privlačenja između drugih ravni. Kada sile dostignu određenu vrednost ove ravni klize jedna prema drugoj, a posle prestanka sile deformacija ne mogu da se vrate u početni položaj. Kada se napr., u kristalnom telu u tečnom stanju unesu primese, kristalna rešetka

se menja, što, prosto rečeno, otežava klizanje odgovarajućih ravni kristala i povećava otpor čvrstog tela prema telu koje vrši deformaciju. Na taj način izbegavamo mogućnost pojave plastične deformacije, i telo dobija nove mehaničke osobine. Na ovom principu, unošenjem različitih količina ugljenika C u meko gvožđe Fe, dobijamo čelik sa različitim elastičnim osobinama.

Poželjno je da se elastične i plastične deformacije objasne i energetski, pri čemu obavezno koristimo grafik za E_p na sl. 3. Kada se pri uzajamnom delovanju dva tela javi elastična deformacija, znači da se promenilo srednje rastojanje r_0 između čestica kristalne rešetke, tj., došlo je do porasta E_p čestica, pa prema tome i unutrašnje energije. Posle prestanka uzajamnog delovanja, telo koje deformisalo, vrši rad na račun potencijalne energije, odn., unutrašnje energije. Ovaj mehanički rad jednak je radu tela koje je izvršilo deformaciju, i zato telo koje se deformisalo dobija početni oblik.

Pošto plastična deformacija nastupa pri pojavi velikih sila deformacije, po prestanku ovih sila, telo koje se plastično deformisalo, ne može da obnovi ranije dimenzije i oblik, tj., ono ne može da izvrši onaj mehanički rad koji je jednak radu tela koje je izvršilo deformaciju. Znači, deo energije koju smo predali telu pretvorio se u unutrašnju energiju, što se manifestuje porastom temperature deformisanog tela.

U nastavi moramo insistirati na to da su elastične i plastične deformacije karakteristika svih tela u prirodi. Podela tela na elastična, plastična i krta je relativna, jer je bazirana na relativnoj veličini granice elastičnosti i izdržljivosti. Jedno isto telo se može ponašati kao elastično ili plastično, u zavisnosti i od nekih spoljnih uslova, kao što su: temperatura T , spoljni pritisak p na kome se telo deformiše, kao i vremena deformacije. Napr., poznato je da olovo na temperaturi od oko $0^\circ K$ postaje elastično, a čelik na visokim pritisima dobija plastične osobine.

Pojmove o različitim vrstama deformacije, kao napr., izduženje sabijanje, smicanje, uvijanje i dr. poželjno bi bilo uvesti preko odgovarajućih demonstracionih kvantitativnih oglada. Ako ne postoje uređaji za kvantitativno ispitivanje odnosa, onda treba iskoristiti univerzalni model pomoću koga se mogu demonstrirati kvalitativno sve deformacije.

LITERATURA

- [1] L. V. Radčenko, *Molekuljarnaja fizika*, Moskva 1965. g.
- [2] K. A. Putilov, *Kurs fiziki — tom I*, Moskva 1957. g.
- [3] Z. Špoter, *Toplina*, Zagreb 1977. g.
- [4] M. Karšulin, *Fizikalna kemija*, Zagreb 1962. g.
- [5] Dr. Dj. Basarić, *Metodika fizike*, Beograd 1975. g.
- [6] F. Filipović, *Metodika nastave fizike osn. škole*, Zagreb 1965. g.
- [7] S. Nicolova, *Metodika na obučeniato po fizika*, Sofija 1977. g.
- [8] grupa autora, *Fizika za II r. ZOSUO*, Beograd 1978. g.
- [9] grupa autora, *Prepodovanie fiziki i astronomii v srednjej škole*, Moskva, 1970. g.

DOBIVENI EFEKTI NAKON GRIJANJA p-CdSb DO TEMPERATURE 550 K

N. Urli i R. Maljiči

Abstrakt

U ovom je redu istraživani su efekti koji nastaju grijanjem monokristala p-CdSb u temperaturnom intervalu od tekućeg zraka do 550. K. Rendgenskim metodama ukazano je da se poslije grijanja CdSb na temperaturi 543. K stvara se površinski sloj koji ima više antimona. Prikazani su i efekti koji nastaju poslije skidanja površinski slojeva.

1. UVOD

Monokristal kadmij antimonida ima ortorombičnu kristalnu rešetku sa dimenzijama rešetke $a=0,647$ nm, $b=0,825$ nm, $c=0,853$ nm i ima 16 atoma u elementarnim ćelijama. Također se smatra da monokristal CdSb kristalizira u prostornoj grupi D_{2h}^{15} [1].

Uzroci su izrezani iz nedopiranog monokristala p—CdSb, dobivenog metodom zonskog tolenja u atmosferi argona u institutu PF AN MSSR (u Kišnjevju) [2]. Monokristali p—CdSb su pripremljeni za mjerenja sa četiri kontakta koji omogućuju električna mjerenja specifičnog otpora, Hall-ovog koeficijenta i dr. Površina kristala bila je pokrivena lakom radi zaštite pri termičkoj obradi. Mjerenja su vršena u 15 uzroka p—CdSb oblika paralelopipeda kristalografske orijentacije [001] u smjeru proticanje električne struje.

Mjerene su ovisnosti specifičnog električnog otpora i Hall-ove konstante od temperature tekućeg zraka do sobne temperature prije i nakon grijanja ovih kristala do temperature 550 K. Kristali su grijani u električnoj peći, a zatim su mjerena električna svojstva u ovisnosti od temperature.

Također I. M. Žadko, V. A. Romenov [3] u svojim radovima izučavali su pojavu termodefekte u monokristalu p—CdSb. Ispitivanja pokazuje da grijanjem p—CdSb do 373 K i zatim brzim hlađenjem dolazi do promjene vodljivosti. Ustanovljeno je da poslije prvog ciklusa grijanja i hlađenja vodljivost poraste za 30%.

U ovom radu ćemo prikazati rezultate eksperimentalnih mjerenja poslije grijanja ovih uzoraka na ne previše visokim temperaturama.

2. REZULTATI EKSPERIMENTALNIH MJERENJA NAKON GRIJANJA UZROKA

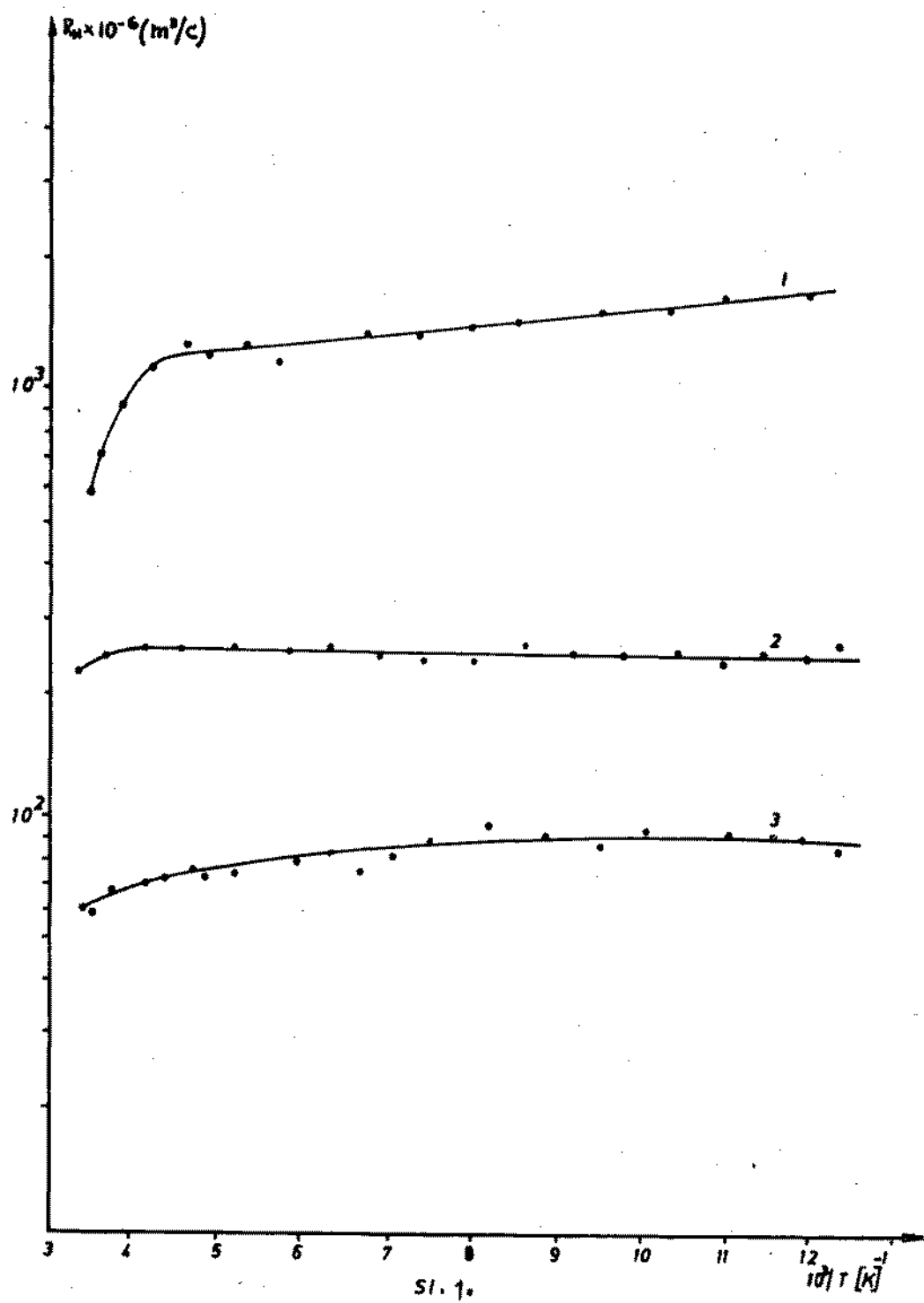
Na sl. 1. prikazani su rezultati mjerenja ovisnosti Hall-ove konstante od temperature tekućeg zraka do sobne temperature, prije i poslije grijanja ovih uzoraka. Krivulja (1) pokazuje ponašanje kristala u ovisnosti od temperature prije grijanja, krivulje (2) ovisnost mjerene veličine o temperaturi kada je kristal grijan na temperaturi 483 K i krivulja (3) kada je kristal grijan na temperaturi 543 K. Iz dobivenih krivulja vidi se da se vrijednosti Hall-ove konstante nakon grijanja na temperaturi 483 K smanji za oko pet puta, dok se za uzorak grijan na temperaturi 543 K Hall-ova konstanta smanji za 15 puta u odnosu na vrijednosti mjerene prije grijanja. Dobiveni rezultati iz mjerenja Hall-ove konstante poslije grijanja na temperaturama višim od 473 K ukazuju na promjene u strukturi kristala ili na uvođenje nekog drugog defekta.

U vezi ovog problema već je Kot M.V. u svom objavljenom članku pokazao da poslije grijanja CdSb na temperaturi 473 K dolazi do vidne promjene u svojstvima kristala (4,5]. Ovaj efekt objasnili su većom pokretljivošću atoma kadmija grijanjem na višim temperaturama uslijed čega dolazi do promjene stehiometrijskog sastava.

Rezultati mjerenja specifičnog električnog otpora u ovisnosti o temperaturi od 80 K do sobne temperature nakon grijanja kristala prikazani su na sl. 2., al. 3. i sl. 4. Na sl. 2. prikazana krivulja prikazuje specifični električni otpor prije grijanja kristala, na sl. 3. specifični električni otpor poslije grijanja kristala na temperaturi 483 K, dok na sl. 4. specifični električni otpor poslije grijanja na temperaturi 543 K. Iz tih je krivulja vidljivo da se poslije grijanja kristala na 483 K specifični otpor smanji za oko 4 puta na sobnoj temperaturi, a nakon grijanja na temperaturi 543 K za 8 puta. Također i pokretnost šupljina se smanji tokom grijanja uzoraka.

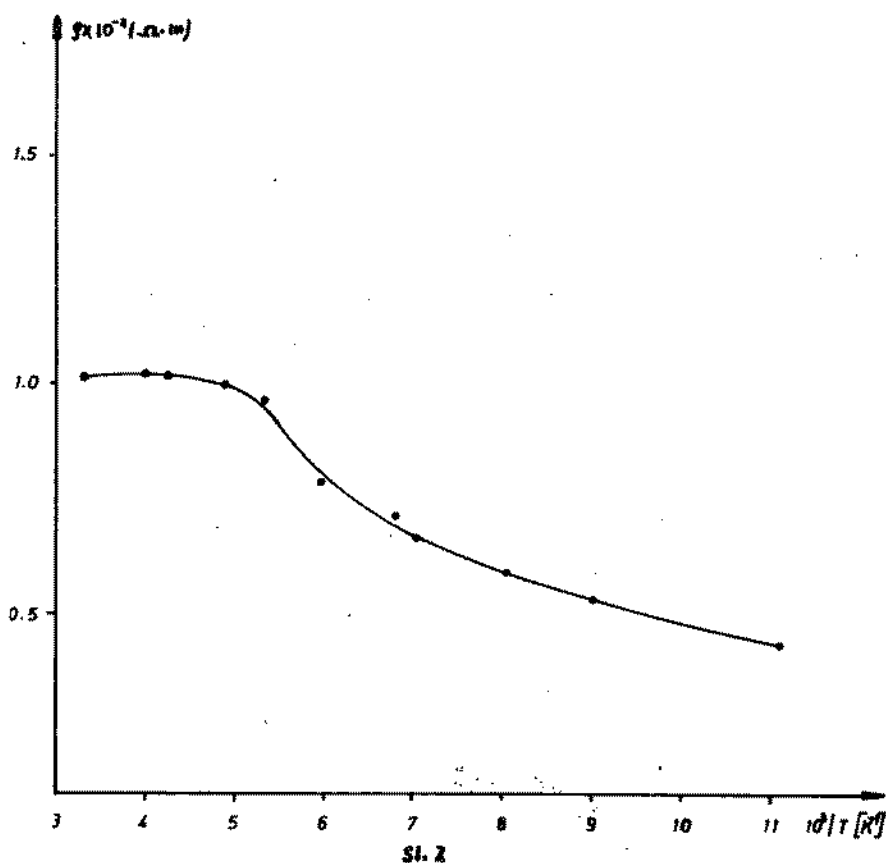
3. RENDGENSKA ANALIZA

Kako je grijanjem došlo do bitnih promjena u električnim svojstvima kristala CdSb, posumnjavši da je došlo do veće strukturne promjene, tj. do napuštanja kadmija iz kristala, u skladu s rezultatima drugih autora, bilo je od interesa odrediti sastav i strukturu kristala nakon grijanja. Rendgenskim analizama pokazano je da poslije grijanja p-CdSb na temperaturi 543 K površina kristala ne odgovara više strukturi Cd Sb. Pomoću spomenute metode konstantirano je da kod uzoraka dolazi do formiranja površinskog sloja drugčijeg od unutrašnjosti kristala. Taj sloj premda nije deblji od nekoliko nanometra ima međutim odlučan utjecaj na rezultate električnih mjerenja. Rendgenskim analizama ustanovljeno je da taj površinski sloj ima višak antimona tj. da se kadmij ispravno tokom grijanja.



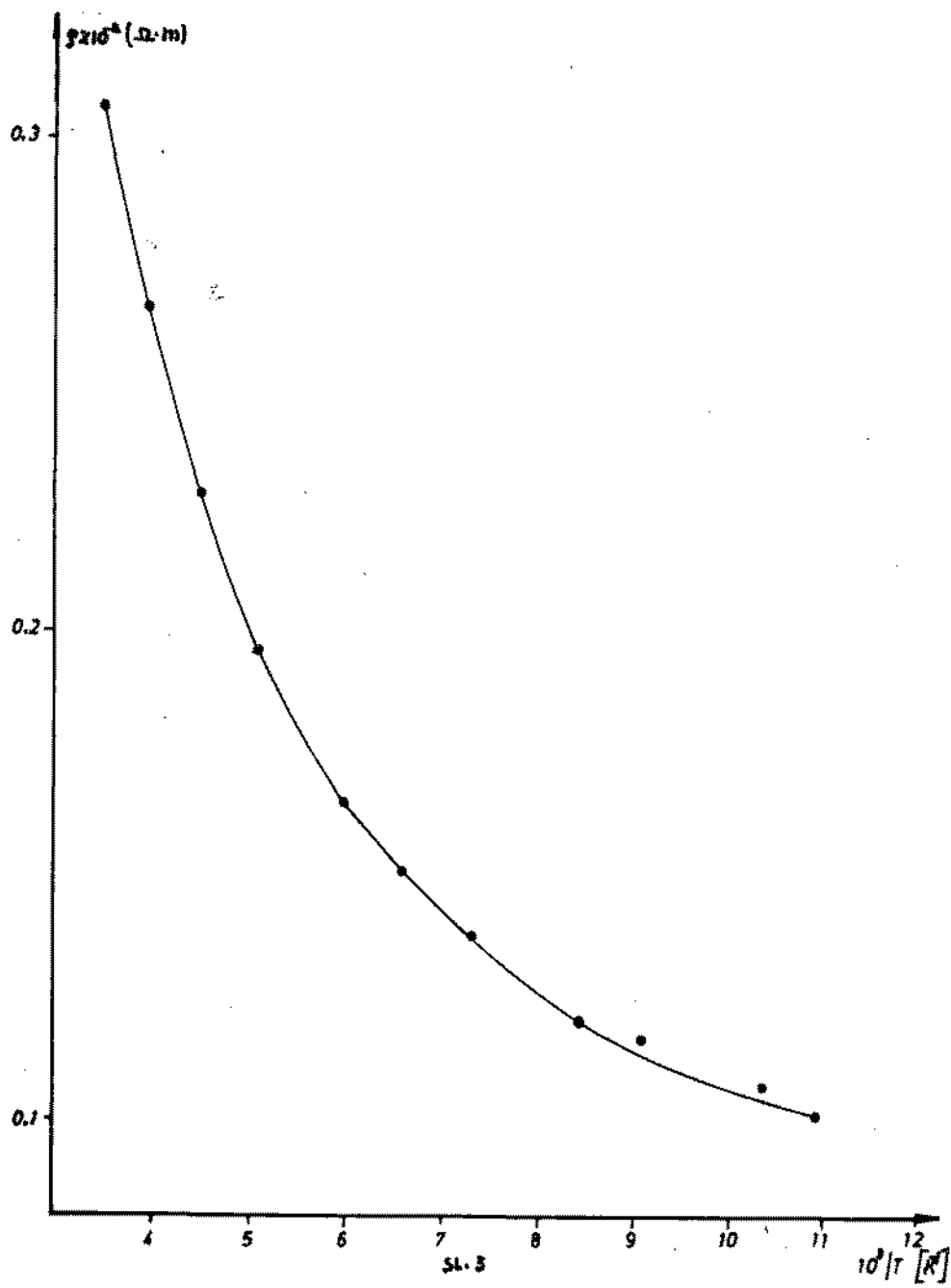
EFEKTI NAKON SKIDANJA POVRŠINSKIH SLOJEVA

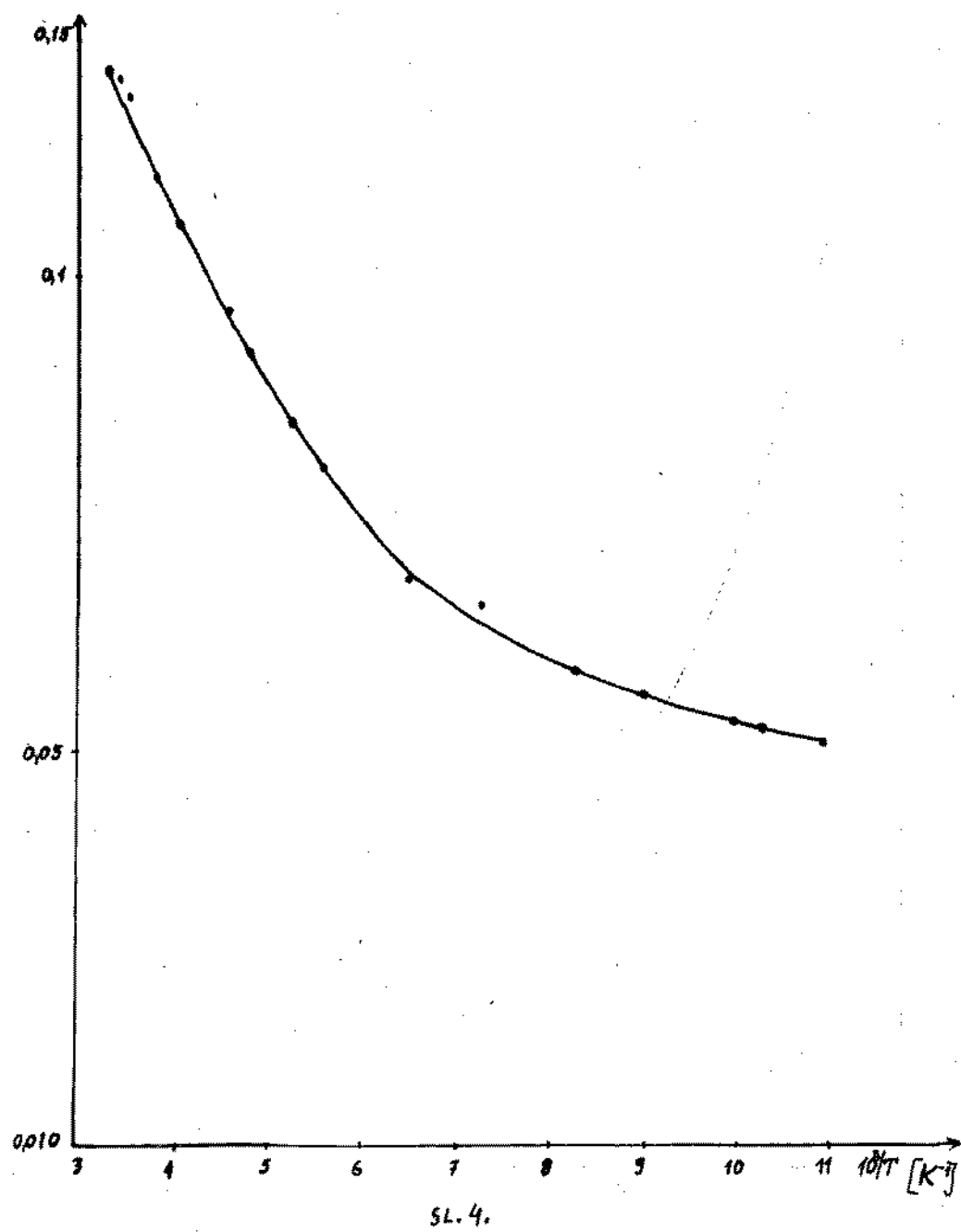
Ustanovljeno je ohrabrujući rezultat, dosada nepoznat u literaturi, da skidanjem površinskog sloja, nastale nakon grijanja na temperaturama 550 K, uzroci pokazuju skoro ista električna svojstva kao prije grijanja. Taj sloj premda nije deblji ni od 260 nm, međutim skidanjem nastaju drastične promjene u svojstvima ovog materijala. Mehaničkim brušenjem i smanjivanjem debljine grijanih kristala ispitivalo se volumno prostiranje i utjecaj pojedinih slojeva kao i posebni efekti povezani s površinskim slojevima kristala.

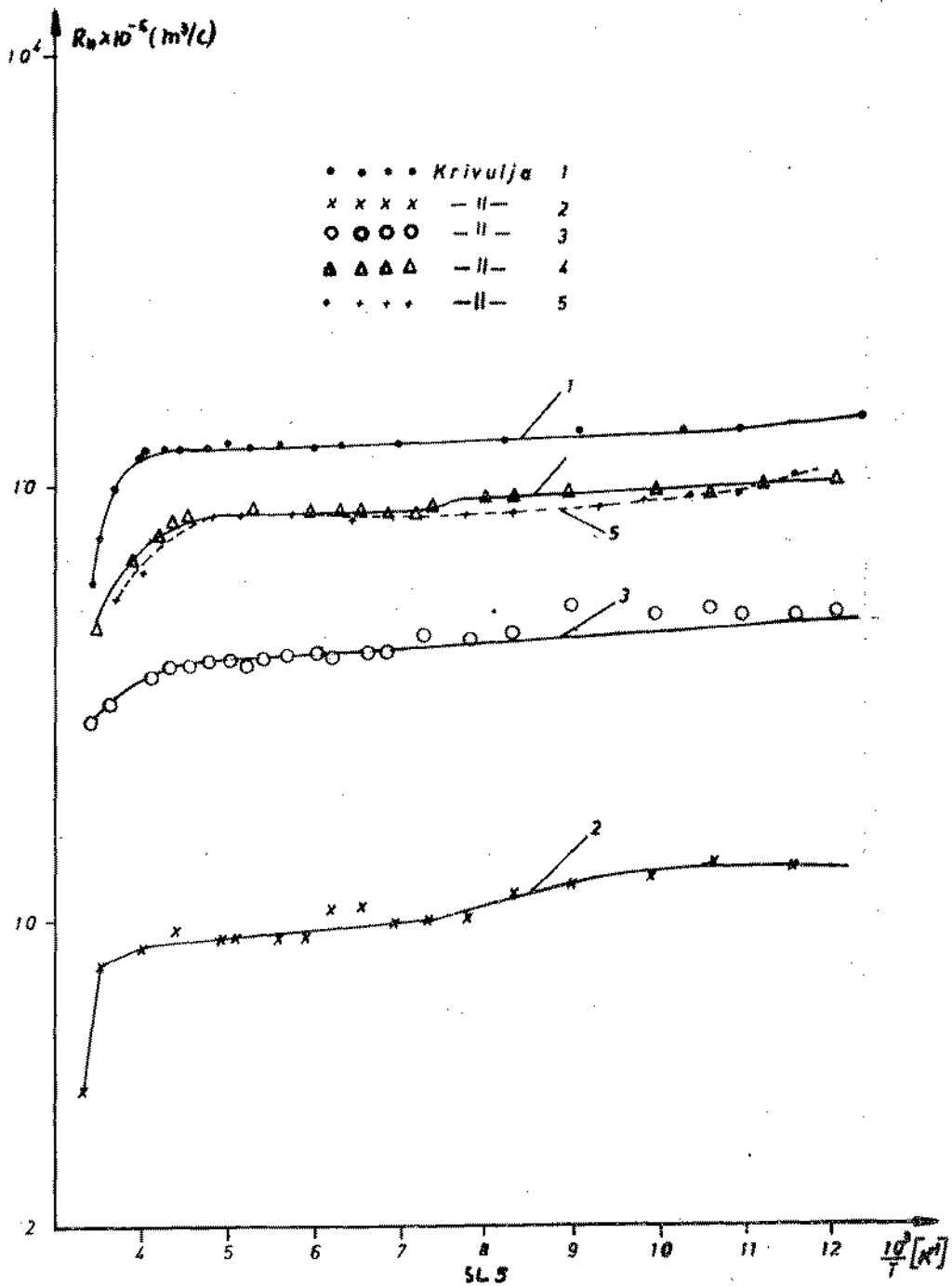


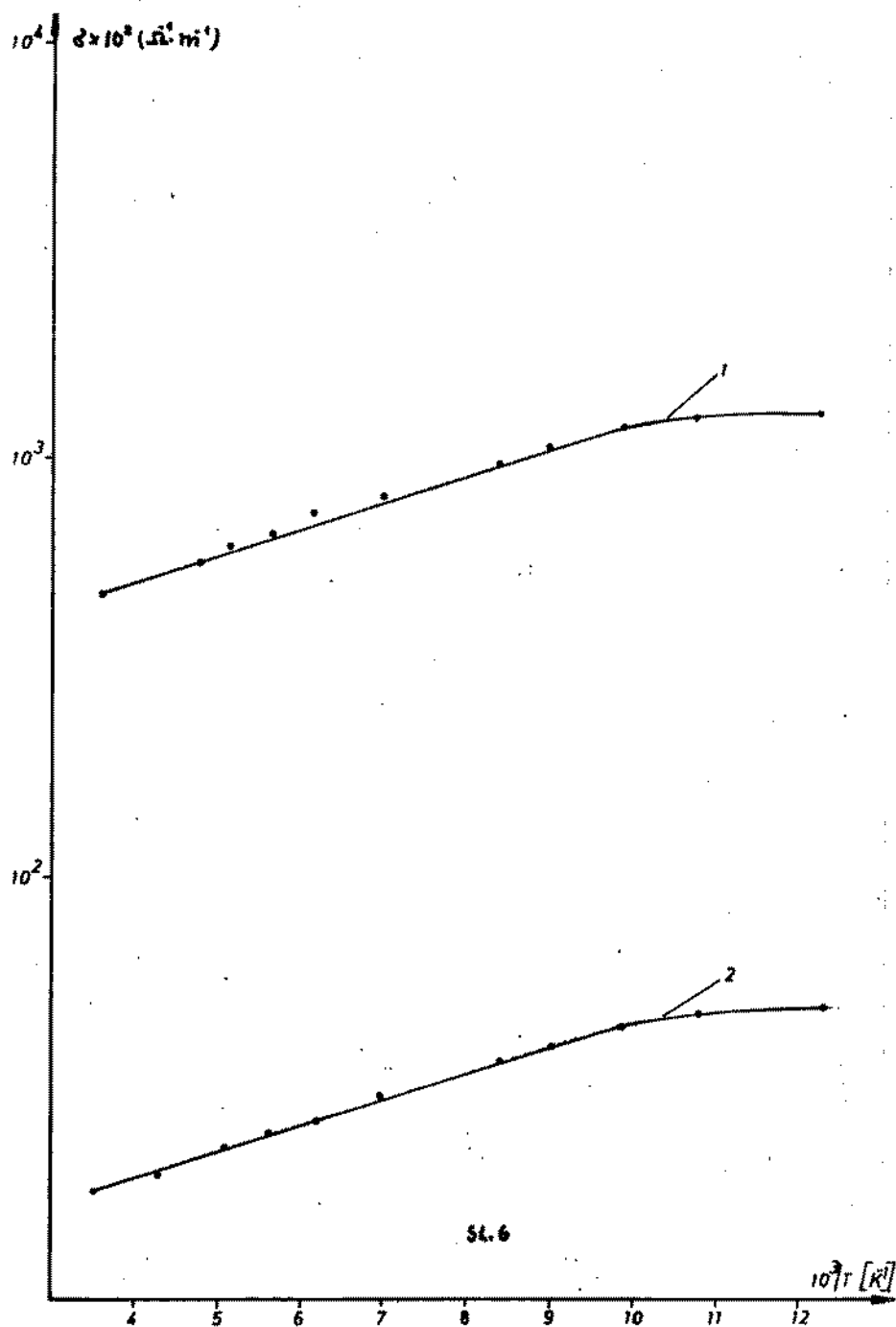
Već laganim brušenjem dolazi do njegovog potpunog skidanja a rezultati mjerenja skoro su isti kao prije grijanja. Kristali su brušeni uzastopno sve finijem praškom karborundumom.

Opisat ćemo sada redom efekte koji nastaju skidanjem tih površinskih slojeva. Skivanjem prvog sloja debljine $d=120$ nm nastaju vidne promjene









u električnim svojstvima. Tako se otpor sada već nakon skidanja prvog sloja povećava i to na sobnoj temperaturi tri puta, a koncentracija šupljina se smanjuje.

Na sl. 5. se vide vidne promjene u obliku krivulja konstanta Hall-a u niskotemperaturnom području do sobne temperature poslije skidanje prvog površinskog sloja; krivulja (3) u odnosu na krivulju (1) mjerenu prije grijanja i krivulju (2) poslije grijanja. Hall-ova konstanta poslije skidanja ovog sloja vidno se povećava što ukazuje na znatan utjecaj ovog površinskog sloja. To znači da se brušenjem površine kristala koncentracija šupljine počinje smanjivati, tako da je tri puta manja već na sobnoj temperaturi.

Daljim brušenjem površine kristala tj. skidanjem drugog površinskog sloja debljine $d=140$ nm Hall-ova konstanta još se više povećava krivulja (4) na sl. 5. U ovom slučaju koncentracija šupljina na sobnoj temperaturi je skoro za jedan red veličine manja u odnosu na krivulje (2). Daljim skidanjem površinskog sloja kristala debljine $d=120$ nm, Hall-ova konstanta više ne pokazuje znatnije promjene (krivulja 5).

Ovi rezultati pokazuje da je skidanjem površinskih slojeva debljine oko 260 nm, moguće skoro uspostaviti prvobitno stanje, analogno onome neposredno prije grijanja. Međutim ova mjerenja pokazuju još da se pravo prvobitno stanje ipak ne dobiva se i da se tu radi o defektima prisutnim u volumenu kristala.

Ovdje ćemo još pokazati i kakav ima utjecaj na električne svojstva ovaj formirani sloj na površini kristala. Ovaj površinski sloj povećava vodljivost. Tako npr. nakon grijanja na temperaturi 483 K vodljivost se povećava oko pet puta, dok grijanjem na 543 K vodljivost se povećala čak za 11 puta, već na sobnoj temperaturi, a još više na niskim temperaturama. To znači da se struja pri prolazu kroz uzorak grana tj. jedan dip ide kroz unutrašnjosti krikoji daje gotovo sav doprinos povećanju vodljivosti.

Ako se zna koje su bile vrijednosti specifične vodljivosti S_1 u ovisnosti o temperaturi prije grijanja kristala, te mjerenjem te veličine nakon grijanja na 543 K i formiranje površinskog sloja, može se izračunati vodljivost površinskog sloja, uzevši u obzir poznatu debljinu površinskog sloja od 260 nm pomoću formule:

$$\sigma_2 = \frac{S}{S_2} (\sigma - \sigma')$$

σ je ukupna vodljivost poslije grijanja uzroka na temperaturu 543 K, σ' je vodljivost unutrašnjeg kristala poslije grijanja uzroka, σ_2 vodljivost površinskog sloja. S je ukupni presjek površine kristala, dok S_2 ukupna površina presjeka površinskog sloja. Iz ove formule može se izračunati vodljivost površinskog sloja u ovisnosti o temperaturi.

U tabeli 4. su dane vrijednosti za vodljivost i koncentraciju šupljina mjerene na sobnoj temperaturi prije grijanja uzroka, za uzorak grijan na temperaturi 483 K i na temperaturi 543 K. Kako se vidi iz ove tablice, koncentracije šupljina povećava poslije grijanja kristala (npr. br. 192) na temperaturi 543 K oko 14 puta u odnosu na koncentraciji šupljine prije grijanja.

TABELA 1.

br. uz	σ_1 (293 K)	σ' (483 K)	σ (543 K)	$p \times 10^{22}$ (293 K)	$p \times 10^{22}$ (483 K)	$p \times 10^{22}$ (543 K)
147	85	314	685	1,06	2,06	7,1
192	92	321	790	1,05	2,59	1,5

U tab. 1. σ je izražena u $[\text{Om}^{-1}\text{m}^{-1}]$ dok p u $[\text{m}^{-3}]$.

Na sl. 6. su prikazane ovisnost specifične vodljivosti o temperaturi, za jedan uzorak koji je grijan na temperaturi 543 K. Krivulja (1) pokazuje vodljivost površinskog sloja, dok krivulja (2) pokazuje vodljivost unutrašnjosti kristala, kada monokristal CdSb je grijan na temperaturi 543 K. Iz ovih krivulja se vidi kolika je vodljivost površinskog sloja veća i koliko ima utjecaja taj površinski sloj na električna svojstva monokristala CdSb.

LITERATURA

- [1] Euckem A. Gelhoof G. *Verh. physik* 159, 336—338, (1927)
- [2] K. Arušanov, B. G. Ljaščenko i dr., *Vlijanje radiac. na elek-trof. svojstva CdSb*, »III vses. Kon. po Kristalohim. intermetal. soed.« 4—6 oktob. 1978, Tzis dokladov, s 192 Ivov, »Višća škola« 1978. g.
- [3] I. M. Žddko, V. A. Romanov, *Ukr. Fiz. Ž.* № 10, p 2682 (1974)
- [4] Kot M. V., Kišinevski *Gos. Universtet*, Učenje zapiski (Fiziko-Matema-tičeski), 3 (1956)
- [5] Andronik I. K. Kot M. V., *Voprosi Metalurgii i Fiziki polup.* (Trud 4-god savršenja po polup. mater.) 76—80, Izd. Akad. N. SSSR, Moskva 1961 god.
- [6] I. V. Melničuk, N. D. Rarenski, I. M. Rarenko, *Ukr. Fiz. Ž.* 18, № 9, p 1956 (1973)
- [7] R. Maljiči, *Magistarski rad*, Zagreb 1981. god.
- [8] W. J. Turner, A. S. Fischer, *Journal Physics Apliid* 32, № 10 (1961).

DOBIVENI EFEKTI NAKON GRIJANJA p-CdSb DO TEMPERATURE 550 K

N. Urli i R. Maljiči

Sažetak

Grijanjem monokristala CdSb na određenim temperaturama nastaju drastične promjene u električnim svojstvima. Termičkim obradom na nešto višim temperaturama (oko 550 K) dolazi do irverzibilnih promjena visokovodljivog površinskog sloja s manjkom kadmija u odnosu na stehiometrijski sastav. Ustanovljeno je da ukupna debljina ovog površinskog sloja iznosi oko 260 nm. Skidanjem površinskih slojeva moguće je skoro uspostaviti prvobitno stanje, analogno onome neposredno prije grijanja.

ПОПУЛАЕМЫЕ ЭФЕКТЫ ПОСЛЕ НАГРЕВАНИЯ P-Cd sb ДО ТЕМПЕРАТУРИ 555 K

Н. Ираи и Р. Молич

Резюме

Нагреванием монокристаллов Cdsb на определенной температурах наступают крупные изменения в электрические свойства. Термическая обработка до 550 K переходить до превращений изменений высокоточность верхнего слоя с маняк Cd относительный стехиометрический состав. Утверждено что совокупно толщина этого верхнего слоя выносить 260 мн. Сниманием верхнего слоя возможно политни восстановить начальное состояние, как до начальной нагрева.

METODAT E ORBITALEVE MOLEKULARE NË LLOGARITJEN E ENERGJIVE TË MOLEKULEVE BENZENOIDE

Ahmet Veseli dhe Gani Jashari

Abstrakt

Në këtë punim kemi llogaritur energjitë ER, ER (PE), ERT dhe ERT (PE) për tri molekule të ndryshme benzenoide. Analiza është krye me ndihmën e teorisë së grafave. Është vërtetuar se për përcaktimin e vetovë të strukturave të benzenit janë të rëndësishme: numri i atomeve, numri i lidhjeve dhe 1-faktori.

1. HYRJE

Pasi që molekulat të cilat kanë rëndësi në kimi dhe në lëmi tjera janë shumë kompakte për llogaritjet egzak, atëherë njerzët ishin të detyruar të gëjnë metoda të ndryshme aproksimative. Vetëm atomi i hidrogjenit mund të zgjedhet egzak, ndërsa në problemet tjera zbatohen metoda të ndryshme aproksimative. Në këtë menyre do të humbet në saktësi sepse shumë parametra përcaktohen përmes shenimeve eksperimentale. Njëra ndër metodat e tilla e cila zbatohet në sistemet e fizikës molekulare, është metoda e Hückelit për komponimet aromatike të konjuguara [1].

Gjatë shqyrtimit të vetë Hückeli veqmas i shiqon σ dhe π elektronet, përkatësisht elektronet që shkaktojnë lidhjet σ dhe π të cilat dallohen përka simetria në krahasim me rrafshin molekular që është ndërtuar nga lidhja σ . Lidhjet σ janë simetrike në krahasim me rrafshin molekular më dallim prej lidhjeve π të cilat janë antisimetrike. Kjo do me thënë se densiteti elektronik i dy elektroneve π të cilat shkaktojnë lidhjen π në rrafshin molekular është i barabartë me zero.

Teorinë e thjeshtë të Hückelit e zgjeroi Hoffmann [2] në kuptimin e shqyrtimit simultant të elektroheve valente σ dhe π . Teoria e zgjeruar e Hückelit (EHT) i bashkangjitetë teorisë së thjeshtë të Hückelit, prandaj kanë shumë gjëra të përbashkëta si për shembull forma produkte e funksionit të përgjithshëm të valës, orbitalet molekulare në formën e kombinimit linear të orbitaleve atomike etj.

Teoria e zgjeruar e Hückelit për shakk të aproksimimeve implicite ka një aplikim të kufizuar. Si rezultat i mospërfilljes së shtyrjës reciproke të elektroneve, në teorinë e zgjeruar të Hückelit fitohën vlera joreale të ngarkesës elektrike e cila mund të përmirësohet me metodën e iterimeve [6]. Në këtë rastë elementet diagonale varën nga ngarkesa elektrike formale e atomeve në molekulë.

2. METODA E HÜCKELIT PËR ORBITALET MOLEKULARE

Pasi që orbitalet π dhe σ dallohen në hapësirë, Hückeli supozoi se lëvizja e elektroneve të tipit π mund të diskutohet pavarësisht prej elektroneve të tipit σ , përkatësisht ndikimi i elektroneve të tipit σ mund të vendoset në konstanta empirike. Aproksimimi i tillë π është në harmoni me përvojën empirike e cila tregon pjesmarrjen e elektroneve π në shumicën e vetive fizike. Për një ndarje të tillë të elektroneve duhet plotësuar tri kondita:

1) Funkcioni i valës i të gjitha elektroneve valente N mund të shkruhet në formën

$$\psi = A(\Sigma)(\Pi) \quad (1)$$

ku (Σ) është funksioni antisimetrik i elektroneve σ ($1, 2, 3, \dots, n_\sigma$), kurse (Π) është funksioni antisimetrik i elektroneve π ($n_\pi, 1, \dots, N$). Në mes këtyre dy funksioneve nuk ka mbulim, prandaj vlenë barazimi

$$\int (\Sigma)(\Pi) d\tau = 0 \quad (2)$$

1) Funksioni (Σ) dhe (Π) janë në veqanti të normuara në 1.

2) Funksioni (Σ) dhe (Π) si dhe kombinimet e tyre ndertojnë determinantën e orto-normuar të Slaterit. Secila determinantë është e ndertuar nga funksionet njëelektronike të orto-normuara.

Në aproksimin e thjeshtë të Hückelit në tërësi ignorohet funksioni (Σ) , përkatësisht elektronet e lidhjes σ si dhe elektronet e shtresave të brendshme (p. sh. elektronet $1s$). Ekuacioni i Schrodingerit për një elektron do të jetë

$$(H_i - H_i) \psi_i = 0 \quad (3)$$

ku H_i është hamiltonijani efektiv njëelektronik, kurse funksioni ψ_i përshkruan lëvizjen mesatare të një elektroni. Sistemi shumëelektronik përcakton disa ekuacione të ngjashme njëelektronike. Pas zgjedhjes të të gjitha ekuacioneve të tilla mund të konstruktohet funksioni i përgjithshëm i valës për sistemin e shqyrtuar duke u paraqitur si produkt thjeshtë i orbitaleve molekulare ψ_i të elektroneve individuale. Funksioni i përgjithshëm i valës për M orbitale molekulare të spinit që janë të nevojshme për N elektrone mund të paraqitet me relacionin

$$\psi_{\text{tot}}(1, 2, \dots, N) = \psi_1(1) \bar{\psi}_1(2) \psi_2(3) \bar{\psi}_2(4) \dots \psi_M(N-1) \bar{\psi}_M(N) \quad (4)$$

i cili për formën e fundëme të funksionit (Π) antisimetrizohet, çka edhe përputhet me parimin e Paulit. Në këtë metodë disa funksione të valës aproksimo-

hën përmes kombinimit linear të funksioneve valore të atomit të lirë [3,4]. Pasi që elektroni është në afërsi të ndonjë bërthame atomike e cila ndikon në te, atëherë mund të mos përfillet ndikimi i elektroneve tjerë në atom. Kjo d.m.th. se në afërsi të ndonjë bërthame atomike, orbitala molekulare mund të shqyrtohet sikurse edhe orbitala atomike, prandaj mund të shqyrtohet sikurse edhe orbitala atomike, prandaj mund ta paraqesim si kombinim linear të orbitaleve atomike:

$$\psi_I = \sum_{\mu} C_{\mu I} \varphi_{\mu} \quad (4a)$$

Që të arrihet kombinimi efektiv i orbitaleve atomike duhet plotësuar konditat [5]: energjitë e orbitaleve atomike duhet të kenë vlera afërsisht të barabarta, mjergulat e ngarkesave elektrike të orbitaleve atomike duhet të mbulohën sa më shumë dhe se orbitalet atomike duhet të kenë simetri të njëjtë në krahasim me elementet e simetrisë së molekulës.

Koeficientet $C_{\mu I}$ që paraqitën në orbitalet molekulare (4) përcaktohen nga kondita që energjia e orbitaleve molekulare Ψ_I të jet minimale. Energjia e grimcave (e përgjithshme) të pavarura llogaritet me formulën:

$$E_{\text{tot}} = \sum_I N_I E_I \quad (5)$$

ku N_I është numri i elektroneve që e plotësojnë orbitalën molekulare Ψ_I me energji E_I . Një minimizim i tillë i çdo energjie orbitale na jep vlerën minimale të energjisë së përgjithshme E_{tot} .

Duke shfrytëzuar teoremën e variacionit dhe duke bërë derivimin e energjive orbitale në krahasim me C_I si dhe duke marrë parasysh faktin se për shkak të minimumit duhet të merret vlera $E/C_I = 0$ për secilin koeficient C_I , arrijmë gjerë te ekuacionet homogjene lineare.

$$\sum_{\mu} C_{I\mu} (H_{\mu\nu} - ES_{\mu\nu}) = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

ku janë

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \int \varphi_{\mu} \hat{H} \varphi_{\nu} d\nu \\ S_{\mu\nu} &= \int \varphi_{\mu} \varphi_{\nu} d\nu \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

elementet e matricës dhe integralet e mbulimit. Ekuacioni (6) posedon zgjidhje jotriviale nëse knaqën determinantat sekulare:

$$|H_{\mu\nu} - ES_{\mu\nu}| = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, N \quad (8)$$

e cila mund të zhvillohet në polinom të rendit N dhe për energjitë orbitale posedon zgjidhjet $E_1, E_2, \dots, E_N$.

Në teorinë e Hückelit numri i orbitaleve atomike është i kufizuar në orbitale të tipit $2p$ për secilin atom, të cilat janë perpendikulare me rrafshin molekular. Zakonisht shenohen si orbitale p_z . Hamiltonianin e përgjithshëm

e shenojmë në formën e hamiltonianeve efektive të orbitaleve molekulare të veçqanta:

$$H(1, 2, \dots, N) = \sum_{i=1}^N H^{\text{ef}}(i) \quad (9)$$

kurse elementet e matricës të cilët paraqitën në determinanten sekulare (8) janë të formës:

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu\mu} &= \int p_{z\mu}(1) H_{\mu\mu}^{\text{ef}} p_{z\mu}(1) dv \\ H_{\mu\nu} &= \int p_{z\mu}(1) H_{\mu\nu}^{\text{ef}} p_{z\nu}(1) dv \\ S_{\mu\nu} &= \int p_{z\mu}(1) p_{z\nu}(1) dv \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hückeli vendosi një seri të aproksimimeve të cilat dukshëm e thjeshtojnë determinantën sekulare (8): 1) Elementet e matricës $H_{\mu\mu}$ i quajti integrale të Kulonit, të cilat shenohën me α dhe në mes veti janë të barbartë, 2) Elementet e matricës $H_{\mu\nu}$ janë integrale të ndrrimit ose rezonancës dhe janë të barabartë me zero kur atomi A dhe B, nuk janë fqinjë të drejtëpërdrejtë, ndërsa janë të barabartë me β për qfardo çift të atomeve fqinje të karbonit, 3) Integralet e mbulimit $S_{\mu\nu}$ janë të barabartë me zero, me përjashtim të rastit kur është $\mu=\nu$ (për të njëjtin atom) kur e kanë vlerën një, sepse ajo paraqet konditën e normimit të orbitalës π . Pra matrica e mbulimit është matricë e njësisë.

3. TEORIA E ZGJERUAR E HÜCKELIT

Grumbulli bazë i terisë së zgjeruar të Hückelit është e ndertuar nga orbitalet atomike të Slaterit [7] për elektronet valente. Në këtë rast grupet karbu-hidrogjen përmbajnë orbitalet 2s dhe 2p të karbonit dhe 1s të hidrogjenit. Orbitalet atomike të Slaterit paraqesin funksione aproksimative të valës së elektroneve në atom, pjesa radiale e së cilës ka formë mjaft të thjeshtë:

$$r^{(n^*-r)} \exp\left(-\frac{Z^* r}{n^*}\right) \quad (11)$$

ku n^* është numri kuantik efektiv kurse Z^* paraqet ngarkesën efektive për ngarkesën reale të bërthamës $Z^*=Z-S$. Vlerat e numrit kuantik efektiv n^* dhe të konstantës S përcaktohen përmes këtyre rregullave [5]: a) Vlera n^* në krahasim me numrin kuantik kryesor n është paraqitur përmes tabelës:

n	1	2	3	4	5	6
n^*	1	2	3	3,7	4	4,2

b) Që të përcaktohen konstantat e ekranizimit, elektronet janë ndarë në grupe: 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d etj. c) Konstanta e ekranimimit për grupet e

veçanta përcaktohet nga këto kontribute: $S=0$ për të gjitha elektronet e grupit më të lartë nga ato që i shqyrtojmë, $S=0,35$ për secilin elektron në të njëjtën grupë përveç grupës $1s$ ku vlera e konstantës së ekranizimit është $0,30$ dhe në rast se orbitalja e shqyrtuar është s ose p atëherë konstanta e ekranizimit e merr vlerën $0,85$ për secilin elektron të grupës vijuese më të ultë dhe $1,0$ për elektronin që është në grupin më të ultë, në rast se orbitalet e shqyrtuara janë d ose f, atëherë konstanta e ekranizimit është e barabartë më $1,0$ për secilin elektron të çfardo grupe më të ultë.

Teoria e zgjeruar e Hückelit shfrytëzon hamiltonianin njëelektronik. Që të zgjidhet hamiltoniani jotrivial njëelektronik shfrytëzohën metoda të ndryshme aproksimative të cilat bazohen në shenime eksperimentale. Që të zgjidhet me sukses përdoret metoda aproksimative e ngarkesës vetkonsistente SCC (Self Consistent Charge) e cila bazohet në idenë e hamiltonianit efektiv. Kjo metodë paraqet një variantë të përmirsuar të teorisë së zgjeruar të Hückelit. Në teorinë e zgjeruar të Hückelit për elemente diagonale $H_{\mu\mu}$ duhet marr vlerat negative të potencialit jonizues të orbitaleve valente të fituara nga spektrat e atomeve ose molekulave. Këto vlera rregullohen sipas konfiguracioneve të ndryshme të atomeve. Potenciali i jonizimit në këtë gjendje »valente« të atomit quhet VSIP (Valence State Ionization Potential) [8]. Aproxsimimi i kësaj merr parasysh vetëm antarët e parë në hamiltonianin elektronik:

$$H_{\mu\mu} = \int \varphi_{\mu}(1) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_A \frac{Z_A e^2}{r_A} \right) \varphi_{\mu}(1) dv_1 \quad (12)$$

Elemente jodiagonale të matricës $H_{\mu\nu}$ mund të shëndrrohen në elemente diagonale në këtë mënyrë. Le të jenë φ_{μ}^A dhe φ_{ν}^B orbitalet në atomet A dhe B, atëherë duke marrë parasyshë aproksimumin (12) gjejmë:

$$H_{\mu\nu}^{AB} = \int \varphi_{\mu}^A(1) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z_A \cdot e^2}{r_A} + \frac{Z_B \cdot e^2}{r_B} \right) - \dots \right] \varphi_{\nu}^B(1) dv_1 \quad (13)$$

Duke shtuar dhe zbritur operatorin e energjisë kinetike nga ekuacionet (12) dhe (13) fitojmë përpjestimin:

$$H_{\mu\nu}^{AB} = (H_{\mu\mu} + H_{\nu\nu}) \frac{S_{\mu\nu}}{2} \cdot k \quad (14)$$

ku parametri k përcaktohet si përmirsim i kësaj aproksimimi [9], kurse vlera e tij e zakonshme është $1,75$. Në konstruktimin e determinantës sekulare elementi diagonal $H_{\mu\mu}$ barazohet me integralin e Koulombit dhe e ka formën

$$H_{\mu\mu} = -I_{\mu} \quad (15)$$

ndërsa elementet jo diagonale në teorinë e zgjeruar të Hückelit nuk përkufizohën njësoj, por të gjithë janë në përpjestim të drejtë me integralet e mbulimit. Në metodën SCC mbahen elementet jodiagonale të paraqitura në ekuacionin

(14), kurse në elementet diagonale të matricës është vendosur antari i cili simulon shtyerjen elektronike. Kjo arrihet duke kaluar nga shprehja për energjinë e përgjithsme në shemën HFR [10]:

$$E_n = \sum_i \left[q_i I_i(i) + \frac{1}{2} q_i (q_i - 1) \cdot \langle i|i \rangle + \sum_{j \neq i} q_j q_i \langle i|j \rangle \right] \quad (16)$$

ku janë q_i ngarkesa elektrike e orbitales i , $I(i)$ paraqet elementin diagonal H_{ii} nga (12), kurse $\langle i|i \rangle$ dhe $\langle i|j \rangle$ paraqesin integralet e shtyerjës elektronike.

Në këtë aproksimim elementet diagonale të matricës mund ti paraqesim me relacionin:

$$H_{ii}^A = -I(\mu) - q_A B_A \quad (17)$$

ku B paraqet parametrin empirik [11] për atomin A , i cili përcaktohet duke bërë krahasimën e vlerave të llogaritura dhe atyre të potencialit të jonizimit të elektroneve valente.

Pasi që të përcaktohen të gjithë elementet e ekuacionit sekular, atëherë zbatohen programe të përshtatshme për zgjidhjen e saj në makinë llogaritëse. Në këtë mënyrë fitohen vlerat e orbitaleve molekulare ψ_i si dhe energjitë e tyre E_i .

Përcaktimi i shpërndarjes së ngarkesës elektrike në teorinë e zgjeruar të Hückelit bazohet në analizën e populacionit të Millikenit [12], kurse ngarkesa elektrike në atomin A përkufizohet:

$$q_A^{\text{Mull}} = 2 \sum_i \sum_{B(B \neq A)} \sum_{\mu}^A \sum_{\nu}^B C_{i\mu} C_{i\nu} C_{\mu\nu} \quad (18)$$

ku shuma e parë shkon nëpër të gjitha orbitalet molekulare të populuara dy herë, pastaj rrjedhë shuma nëpër të gjitha orbitalet atomike në atomin A dhe në fund shuma e të gjitha orbitaleve atomike në atomin B (përveç atomit A).

4. PARAQITJA DHE DISKUTIMI I REZULTATEVE

Në bazë të orbitaleve molekulare të Hückelit kemi llogaritur stabilitetin e molekuleve, përkatësisht indeksat energjetike të quajtura ER (energija rezonante), ER(PE) (energija rezonante për një elektron), ERT (energija rezonante topologjike) dhe ERT(PE) (energija rezonante topologjike për një elektron).

Studjimi është bërë për disa molekula benzenoide.

Energjia rezonante është llogaritur sipas relacionit: $ER = E_\pi$ (molekula e konjuguar) — E_π (struktura referente) ku E_π (molekula e konjuguar) dhe E_π (struktura referente) janë energjitë elektronike të π -molekuleve dhe

struktura koresponduese referente, të cilat janë të përfituara duke zbatuar teorinë e Hückelit.

Energjia rezonante topologjike ERT ka rrjedhur nga studimi i vetive elektronike të molekulave me ndihmën e teorisë së Grafave [13]. Pikënisje për zgjidhjen e sajë është teorema e Sachsit [14] që jep shprehjen për koeficientin e polinomit karakteristik:

$$A_n = \sum_{s \in S_n} (-1)^{c(s)} \cdot 2^{r(s)} \quad (20)$$

ku S_n është shuma e të gjitha grafave të Sachsit me n atome, $c(s)$ dhe $r(s)$ janë numri total i komponenteve dhe numri total i unazave në grafën e Sachsit. Me ndihmën e grafave të Sachsit mund të definohet polinomi karakteristik:

$$P(G; X) = \sum_{n=0}^N \sum_{s \in S_n} (-1)^{c(s)} \cdot 2^{r(s)} X^{N-n} \quad (21)$$

Energjia e molekulës së konjuguar është:

$$E_\pi (\text{molekula } e \text{ konjuguar}) = \sum_{j=1}^N g_j X_j \quad (22)$$

ku X_j është rrënja e polinomit karakteristik, kurse g_j 0,1 ose 2 sipas parimit të Paulit. Ngjashëm më këtë energjia e strukturës referente do të jetë:

$$E_\pi (\text{struktura referente}) = \sum_{j=1}^N g_j X_j^{ac} \quad (23)$$

Duke i rregulluar këto, do të fitojm energjin rezonante topologjike:

$$ERT = \sum_{j=1}^N g_j (X_j - X_j^{ac}) \quad (24)$$

ku X_j është zgjidhje e polinomit karakteristik të Hückelit. Energjia rezonante topologjike mund të stabilizohet nëse merret parasysh numri i përgjithshëm i elektroneve në molekulë që arrihet deri të ERT (për elektronet $-\pi$).

$$ERT(PE) = ERT/N \quad (25)$$

që d.m.th. duke pjestuar ERT më numrin e elektroneve në molekulë.

Vlerat e energjive të molekulave të llogaritura janë paraqitura në tabelën që vijon:

TABELA 1. VLERAT E ENERGJIVE NË NJËSI β PËR DISA MOLEKULA
TE KONJUGUARA BENZENOIDE

1.

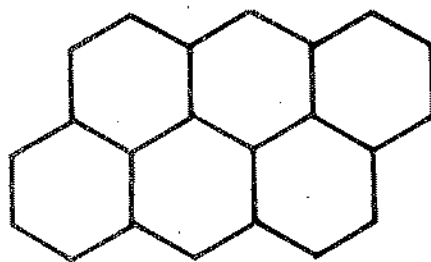


Fig. 1

Kjo molekulë është e përbër nga gjashtë unaza (heksagone), dhe 22 atome.

$$E_{Huckelt} = 31,252$$

$$E_{Additive} = 30,265$$

$$ER = 0,987$$

$$ER(PE) = 0,044$$

$$ERT = 0,766$$

$$ERT(PE) = 0,035$$

2.

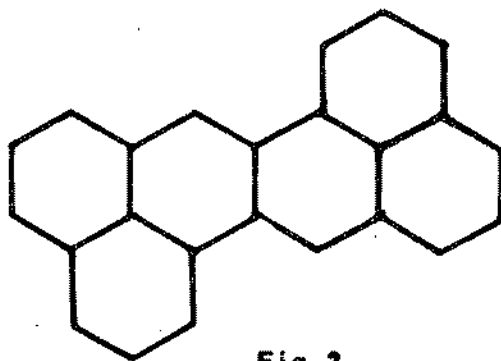


Fig. 2

$$E_{Huckelt} = 33,798$$

$$E_{Additive} = 32,802$$

$$ER = 0,996$$

$$ER(PE) = 0,041$$

$$ERT = 0,780$$

$$ERT(PE) = 0,032$$

3.

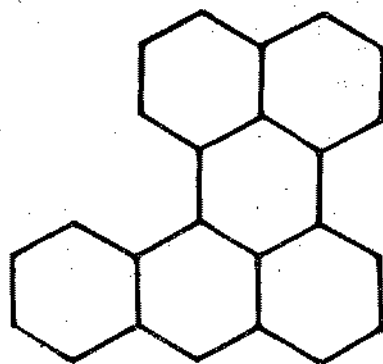


Fig. 3

$$E_{Hückel} = 33,916$$

$$E_{Additive} = 32,827$$

$$ER = 1,089$$

$$ER(PE) = 0,045$$

$$ERT = 0,839$$

$$ERT(PE) = 0,036$$

Për llogaritjen e energjive është përdorur programi i kompjuterit [15] si dhe parametrat Hess dhe Schaad [16].

Eshtë vërtetuar se energjia e Hückelit për molekulë mund të aproksimohet në bazë të karakteristikave topologjike të strukturave benzenoide: numri i lidhjeve dhe numri 1-faktori (numri i Kekules). Prandaj kemi sqaruar se 95% të energjisë totale të Hückelit aproksimohet qysh me relacionet që përbëjnë vetëm numrin e lidhjeve dhe numrin e atomeve.

LITERATURA

- [1] E. Hückel, *Z. Physik*, **70**, 204 (1931).
- [2] R. Hoffmann, *J. Chem. Phys.*, **39**, 1397, (1963).
- [3] Z. Maksić, »Kvantna kemija«, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb (1976).
- [4] N. Trinajstić, »Molekularne orbitale u kemiji«, Školska knjiga, Zagreb (1974).

- [5]. C. A. Coulson, »Valence«, Oxford University Press, Oxford (1953).
- [6]. R. Rein, N. Fukuda, H. Win, G. A. Clarke and F. E. Harris, *J. Chem. Phys.*, **45**, 4743 (1966).
- [7]. I. C. Slater, *Phys. Rev.*, **30** 57 (1930)
- [8]. J. Hinze and H. H. Joffe, *J. Amer. Chem. Soc.*, **89**, 540 (1962)
- [9]. L. C. Cusachs, *J. Chem. Phys.* **43**, S 157 (1965)
- [10]. I. C. Slater, J. B. Mann, M. M. Wilson and J. H. Wood, *Phys. Rev.*, **184**, 672 (1969).
- [11]. L. C. Cusachs, and J. W. Reynolds, *J. Chem. Phys.*, **43**, S 160 (1965).
- [12]. R. S. Mulliken, *J. Chem. Phys.*, **23**, 1833 (1955).
- [13]. I. Gutman, N. Trinajstić, *Topics Curr. Chem.* **42**, (1973) 49; *Croat. Chem. Acta* **47** (1975) 507.
- [14]. N. Sachs, *Publ. Math. (Debrecen)* **11** (1964) 119.
- [15]. B. Mohar and N. Trinajstić, *J. Comput. Chem.* **3** (1971) 305.
- [16]. B. A. Hess, Jr. and L. J. Schaad, *J. Am. Chem. Soc.* **93** (1971) 305.

MOLECULAR ORBITAL METHODS IN CALCULATION ENERGIES OF THE BENZENOIDAL MOLECULES

Ahmet Veseli and Gani Jashari

Summary

In this work we counted indices energy of RE, RE (PE), TRE, TRE (PE) for 3 different molecules, benzenoid. Analysis was carried out by means of theory of graph that.

We found that the most important characteristics for the determination of the number of atoms, the number of bonds and 1-factor.

MOLEKULARNE ORBITALNE METODE ZA RAČUNANJE ENERGIJE BENZENOIDNIH MOLEKULA

Ahmet Veseli i Gani Jashari

Sažetak

U ovom radu izračunate su energije RE, RE (PE), TRE, TRE (PE), za tri (3) različite benzenoidne molekule. Analiza je izvršena pomoću teorije grafova.

Pokazano je da za određivanje svojstava benzenoidnih struktura važne su: broj atoma, broj veza i 1-faktor.

LLOGARITJA E DISTANCËS NË MES TË KARBONIT DHE OKSIGJENIT

Ahmet Veseli, Lutfi Istrefi dhe Jahi Hoxha

Abstrakti

Është llogaritur lidhja e rendit për grupet karbonike, për tridhjetë e shtatë komponime të thjeshta karbonike duke përdorur metodën semiempirike të ngarkesës vetkonsistente SCC (Self Consistent Charge) [1]. Gjithashtu është arçitur korelimi në mes të rendit të lidhjes dhe largësisë në mes të atomeve të karbonit dhe të oksigjenit.

1. HYRJE

Që të zgjidhet ekuacioni i Schrödingerit për molekulat shumëatomike pareqite një detyrë shumë e vështirë për shkak të beshkëveprimit të një numri të madh të grimcave. Pikërisht për ate metodat aproksimative janë shumë të rëndësishme, me ndihmën e të cilave mund t'i shqyrtojmë vetitë e lidhjeve kimike në molekulë. Njëra ndër metodat e tilla është metoda e orbitaleve molekulare e Hückelit, ku nuk merret parasysh bashkëveprimi i drejtëpërdrejtë mes elektroneve σ dhe π . Kjo dukuri arsyetohet me faktin se orbitalet σ janë simetrike në krahasim me rrafshin e molekulës, kurse orbitalet π janë antisimetrike, prandaj integrali i mbulimit është zero [2]. Orbitalet molekulare π gjenden duke bërë kombinimin linear të orbitaleve atomike (KLOA) dhe mund të shprehen kështu:

$$\Psi_j = \sum C_{ij} \varphi_i \quad (1)$$

ku φ_i janë orbitalet atomike $2p_z$ të atomit i , kurse shuma bëhet nëpër të gjitha orbitalet atomike $2p_z$. Koeficientët dhe energjitë e orbitaleve të këtilla molekulare caktohen duke zgjidhur ekuacionin sekular [3]:

$$\sum_{i=1}^n C_i (H_{ij} - S_{ij} E_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

ku janë

$$\left. \begin{aligned} H_{ij} &= \langle \varphi_i | H | \varphi_j \rangle \\ S_{ij} &= \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

elementet e matricës dhe integralet e mbulimit.

2. SHPERNDARIA E NGARKESËS SE ELEKTRONEVE, DENSITETI I NGARKESËS SE ELEKTRONEVE DHE RENDI I LIDHJES

Vlera e funksionit (1) në afërsinë e atomit i si dhe në vet atomin i është e përcaktuar me shprehjen $C_{ij}\varphi_i$. Densiteti elektronik është në përpjestim të drejtë me katrorin e kësaj shprehjeje. Për ta përcaktuar shpërndarjen e ngarkesës së elektroneve, orbitalet molekulare duhet të normohen në vlerën një:

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = 1 \quad (4)$$

Duke marrë parasysh formën eksplicite të orbitaleve molekulare (ekuacioni 1) dhe kondi.ën e normimit (ekuacionin 4), gjejmë:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i^n C_{ij} \varphi_i \middle| \sum_i^n C_{ij} \varphi_i \right\rangle &= C_{1j}^2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + C_{2j}^2 \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle + \\ &+ \dots + C_{nj}^2 \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle + 2 C_{1j} C_{2j} \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle + \\ &+ 2 C_{1j} C_{3j} \langle \varphi_1 | \varphi_3 \rangle + \dots = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Integralet e mbulimit $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle$ janë të normuara dhe vlera e tyre është e barabartë me një, kurse integralet e tipit $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle$ e kanë vlerën zero, prandaj ekuacioni (4) mund të shkruhet në këtë mënyrë:

$$\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle = \sum_i C_{ij}^2 = 1 \quad (6)$$

Koeficientët C_{ij}^2 paraqesin densitetin parcial të elektroneve të përshkruara nëpërmjet funksionit të valës φ_i i cili gjendet në atomin i . Densitetin e përgjithshëm elektronik q_i në atomin i e gjejmë si shumë të kontributeve të të gjitha elektroneve në orbitalet molekulare

$$q_i = \sum_j^{\text{OccMO}} n_j C_{ij}^2 \quad (7)$$

ku n_j paraqet numrin e elektroneve në orbitalen molekulare j , kurse shuma bëhet nëpër të gjitha orbitalet molekulare të okupuara. Për sistemet e konjuguara vlerat q janë ekuivalente me numrin e përgjithshëm të elektroneve π .

Për ta vlersuar intesitetin e lidhjes elektronike π e përdorim kuptimin e lidhjes së rendit parcial p_{kl}^j , i cili përkufizohet përmes relacionit:

$$p_{kl}^j = C_{kj} C_{lj} \quad (8)$$

Sa më të mdhenj të jenë koeficientët aq më i madh do të jet densiteti elektronik në atomin k dhe l [1], prej nga rrjedhë se edhe densiteti në lidhjen k dhe l [2] do të jet më i madh [2].

Rendi i përgjithshëm i lidhjes P_{kl} gjendet duke bërë shumën e të gjitha kontributeve të cilët paraqiten në ekuacionin (8) nëpër të gjitha orbitalet molekulare të okupuara [3]:

$$P_{kl} = \sum_j^{\text{OccMO}} n_j p_{kl}^j = \sum_j^{\text{OccMO}} n_j C_{kj} C_{lj} \quad (9)$$

ku n_j paraqet numrin e elektroneve në orbitalen molekulare j.

3. METODA SEMIEMPIRIKE E NGARKESES VETKONSISTENTE

Metodat aproksimative të orbitaleve molekulare fillojnë kryesisht nga ekuacionet e Hartree-Fock-Roothanit (HFR) të fushës vetkonsistente (SCF) [4]:

$$\sum_{\mu} H_{\mu\nu}^{\text{SCF}} C_{i\mu} = \sum_{\mu} S_{\mu\nu} C_{i\mu} E_i \quad (10)$$

Në metodat semiempirike nuk përfillen shumë integrale të mbulimit, kurse të tjerët përcaktohen në mënyrë empirike ose llogariten me formula të thjeshtuara. Në atë rast më së shpeshti shfrytëzohen variantat të ndryshme të aproksimit ZDO (Zero Differential Overlap) sipas së cilit nuk përfillen integralet të cilët përmbajnë produkte të orbitaleve të ndryshme atomike të tipit $\varphi_{\mu} \varphi_{\nu}$. Mospërfillja totale ose e pjesërishtme e mbulimit diferencial të orbitaleve atomike ka pasoja të mëdha në saktësinë e rezultateve të fituara. Mënyra alternative është zgjidhja e ekuacioneve HFR duke zbatuar idenë e hamiltonianit efektiv, ku elementet e matricës $H_{\mu\nu}^{\text{SCF}}$ zëvendësohen me funksione të caktuara të cilat varen nga lloji i atomeve dhe nga mjedisi kimik. Në llogaritje merren vetëm elektronet valente, ndërsa veprimi i elektroneve të brendshëm përshkruan ekranizimin e bërthamës. Shqyrtimi eksplisit i elektroneve të brendshëm në teorinë aproksimative të molekulave është dhënë në punimet e Hartmanit dhe Zernerit [5].

Këtu zbatohet metoda e ngarkesës vetkonsistente SCC e cila bazohet në idenë e hamiltonianit efektiv dhe paraqet një variantë të teorisë së zgjeruar të Hückelit [6], ku për elemente diagonale $H_{\mu\nu}$ merren vlerat negative të potencialit të jonizimit të cilat fitohen nga spektrat e atomeve ose molekulave. Në këtë gjendje të atomit potenciali i jonizimit quhet VSIP (Valent State Ionization Potential) [7], i cili merrë parasysh vetëm se dy antarët e parë të hamiltonianit elektronik:

$$H_{\mu\mu} = \int \varphi_{\mu}(1) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_A \frac{Z_A e^2}{r_A} \right) \varphi_{\mu}(1) dV_1 \quad (11)$$

Le të jenë φ_μ^A dhe φ_ν^B orbitalet atomike në atomet A dhe B, atëherë elementet jodiagonale të matricës jepen përmes relacionit të Cusachsit [8]:

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} (H_{\mu\mu} + H_{\nu\nu}) k \quad (12)$$

ku parametri k përcaktohet si përmirsim i këtij aproksimimi dhe vlera e tij zakonisht merret 1,75.

Elementet diagonale të matricës në këtë aproksimim mund të paraqiten përmes relacionit:

$$H_{\mu\mu}^A = -I(\mu) - q_A B_A \quad (13)$$

ku B paraqet parametrin empirik [8] për atomin A i cili përcaktohet duke i krahasuar potencialet e jonizimit $I(\mu)$ të elektroneve valente për vlerat e matura dhe ato eksperimentale.

Me këtë metodë llogaritjet përsëriten për secilin atom gjerë sa ndryshimi i ngarkesave elektrike në mes iterimeve të njëpasnjëshme të arrij vlerën 0,001 brenda ndryshimit konvergjent.

4. PARAQITJA DHE DISKUTIMI I REZULTATEVE

Vlerat e llogaritura për rendin e lidhjes $P_{C=0}$ për tridhjet e shtatë molekula të grupit karbonik janë paraqitur në tabelën 1. Distanca e lidhjes në mes atomeve të karbonit dhe oksigjenit $R_{C=O}$, të shënuara në tabelën 1, janë vlera të përcaktuara në mënyrë eksperimentale. (Slihi tab. 1 e 2 në fa. 175 e 176).

Në tabelën 2 gjenden njëzet e gjashtë molekula të cilat kanë mbetur pas korelimit të rendit të lidhjes $P_{C=0}$ dhe distancës në mes të atomeve të karbonit dhe oksigjenit $R_{C=O}$. Pasi që problemi është i thjeshtësuar sepse paraqiten vetëm dy variabla, atëherë korelimi mund të bëhet sipas ekuacionit:

$$y = kx + l \quad (14)$$

ku koeficientët k dhe l paraqesin konstanta, vlerat e të cilave janë paraqitur në grafikun. Madhësitë x dhe y paraqesin vlerat e rendit të lidhjes dhe distancës në mes atomeve të karbonit dhe oksigjenit (shiko tabelën 1 dhe 2 në faqe 183 dhe 184).

Relacioni në mes të vlerave të llogaritura për rendin e lidhjes $P_{C=0}$ dhe distancës në mes atomeve të karbonit dhe oksigjenit $R_{C=O}$; është paraqitur në diagram [9]: (shiko diag. f. 185).

Sig shihet nga tabela 2 vlerat e llogaritura për distancën në mes atomeve të karbonit dhe oksigjenit përputhen shumë mirë me vlerat eksperimentale. Vlerat eksperimentale janë marrë prej shumë autorëve, të cilët i kanë llogaritur me metoda të ndryshme, prandaj edhe paraqiten dallime të vogëla në mes vlerave të llogaritura me metodën që ne e kemi përdorur. Kjo më së miri shihet nga grafikoni ku është paraqitur korelimi i rendit të lidhjes dhe distancës në mes të atomeve të karbonit dhe oksigjenit. Devijimi standard për

tridhjet e shtatë molekula është 0,0234, kurse për njëzet e gjashtë molekula është 0,0093. Pasi që kemi të bëjmë për njësi shumë të vogëla (të rendit 10^{-11}m), jemi përcaktuar për vlerën e dytë ku gabimet janë shumë më të vogëla (afro 10^{-2}nm).

Vlerat e rendit të lidhjes janë llogaritur me metodën semiempirike të ngarkesës vetkonsistente të orbitaleve molekulare SCC-MO.

TABELA 1. REND DHE DISTANCA E LIDHJES PER MOLEKULET
E NDRYSHME TE GRUPIT KARBONIK.

Molekula	P_{C-O}	$R_{C-O} (\times 10^{-11}\text{m})$
FCOF	1,2650	1,1740
HCOOH	0,8734	1,2130
CH ₃ OCOH	1,1195	1,2000
HCOH	1,1113	1,2090
HCONH ₂	1,0393	1,2430
CH ₃ COOH	1,1213	1,2150
CH ₃ COH	1,2113	1,2150
CH ₂ CHOH	1,0623	1,2120
CH ₃ COCH ₃	1,0783	1,2110
COCl ₂	1,1743	1,1800
CHFO	1,1961	1,1850
c-C ₄ H ₄ O ₂	1,0439	1,2300
c-C ₃ H ₄ O ₂	1,0731	1,1800
(CH ₃) ₂ C=C=O	1,1790	1,1790
FCOCl	1,2323	1,1620
CH ₃ CH=C=O	1,1399	1,1710
C ₄ H ₆ O	1,0791	1,2110
c-C ₃ H ₄ O	1,1243	1,1910
C ₂ H ₄ O ₂	1,1052	1,2094
c-C ₄ H ₄ O ₃	1,1623	1,1900
C ₂ H ₅ NO	1,0623	1,2190
C ₃ F ₆ O	0,9739	1,2460
C ₄ H ₄ O ₄	0,9659	1,2700
C ₅ H ₈ O	1,0703	1,2260
CH ₃ COH	1,1098	1,2070
C ₄ H ₄ O ₂	0,7084	1,2200
NH ₂ CONH ₂	0,9861	1,2780
C ₂ F ₄ O	1,0597	1,2500
C ₂ H ₃ OCl	1,2331	1,1400
C ₂ H ₃ FO	1,1934	1,1850
HCOCHO	1,0712	1,2120
CH ₃ CONH ₂	1,0980	1,2580
c-C ₄ H ₂ O ₃	1,1210	1,1950
C ₃ H ₃ F ₃ O	1,0830	1,2069
C ₆ H ₄ O ₂	1,0041	1,2300
C ₄ H ₆ O ₂	1,0477	1,2000
C ₂ H ₂ OCl ₂	1,0982	1,2100
C ₈ H ₅ NO ₂	1,0456	1,1900

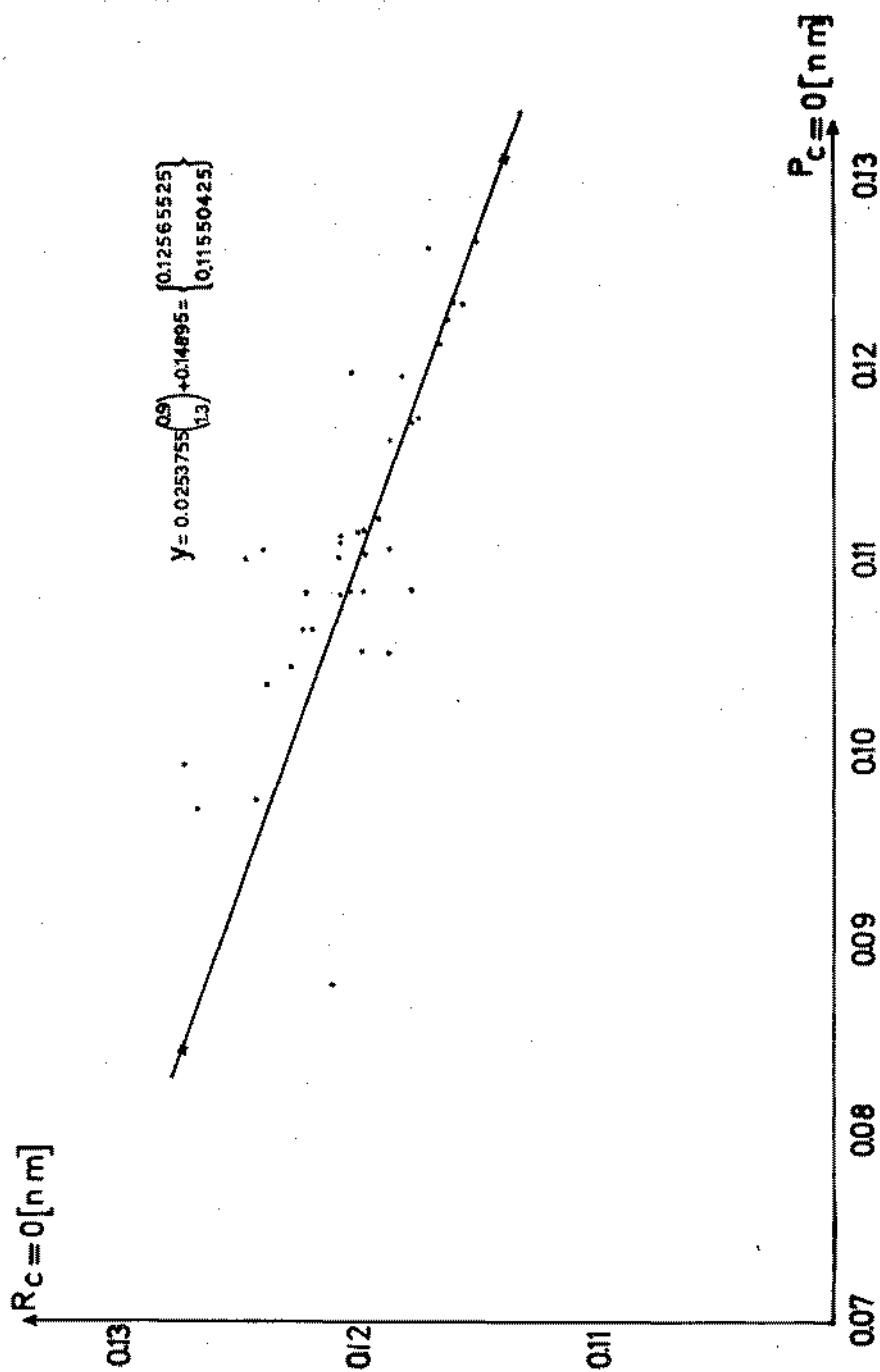
TABELA 2. D STANCA NE MES TE ATOMEVE C DHE O SI DHE RENDI
I LIDHJES PER DISA MOLEKULA ORGANIKE.

Molekula	$P_{C=O}$	$R_{C=O}(x10^{-11}m)$ vlara e llogaritur	$R_{C=O}(x 10^{-11}m)$ vlara eksper.	Ndryshimim $\Delta (x 10^{-11}m)$
FCOF	1,265	1,1639	1,174	0,0101
CH ₃ OCOH	1,1195	1,2008	1,2	0,0008
HCOH	1,1113	1,2029	1,209	0,0061
CH ₃ COOH	1,1213	1,2004	1,215	0,0146
CH ₂ CHCOH	1,0632	1,2154	1,212	0,0034
CH ₃ COCH ₃	1,0783	1,2113	1,211	0,0003
COCl ₂	1,1743	1,1869	1,18	0,0069
CHFO	1,1961	1,1814	1,185	0,0036
c-C ₄ H ₄ O ₂	1,04339	1,22	1,23	0,00997
(CH ₃) ₂ =C=CO	1,179	1,1857	1,179	0,0067
FCOCl	1,2323	1,1722	1,162	0,0102
C ₄ H ₆ O	1,0791	1,2111	1,201	0,0101
c-C ₃ H ₄ O	1,1243	1,996	1,191	0,0086
C ₂ H ₄ O ₂	1,1052	1,2045	1,2094	0,0049
c-C ₄ H ₄ O ₃	1,1623	1,18998	1,19	0,00002
C ₂ H ₃ NO	1,0623	1,2154	1,219	0,0036
C ₃ F ₆ O	0,9739	1,2378	1,246	0,0082
C ₅ H ₈ O	1,0803	1,2108	1,226	0,0152
CH ₃ COH	1,1098	1,2033	1,207	0,0037
C ₂ H ₃ FO	1,1934	1,1821	1,185	0,0029
HCOCHO	1,0712	1,2131	1,212	0,0011
c-C ₄ H ₂ O ₃	1,121	1,2005	1,195	0,0055
C ₃ H ₃ F ₃ O	1,083	1,2101	1,2069	0,0032
C ₆ H ₄ O ₂	1,0041	1,2301	1,23	0,0001
C ₂ H ₂ OCl ₂	1,0982	1,20625	1,21	0,00375
C ₈ H ₅ NO ₂	1,0456	1,2196	1,19	0,0196

Molekulat të cilat nuk janë përfshi në korelim me vlerat eksperimentale janë: HCONH₂, CH₃CH=C=O, C₄H₄O₄, C₄H₄O₂, NH₂CONH₂, C₂F₄O, C₂H₃OCl, CH₃CONH₂, C₄H₆O₂, C₃H₄O₂ dhe HCOOH.

LITERATURA

- [1] J.E. Bloor and Z.B. Maksić, *Mol. Phys.*, **22**, 351 (1971).
- [2] Z. Maksić, *Kvantna kemija*, Liber, Zagreb 1976.
- [3] A.K. Chandra, *Introductory Quantum Chemistry*, Tata McGraw-Hill, Publishing CO. LTD., New Delhi 1974.
- [4] C.C.J. Roothan, *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 69 (1951).
- [5] A. Hartman and M.C. Zerner, *Theoret. Chim. Acta*, **37**, 47 (1975); M.C. Zerner, *J. Chem. Phys.*, **39**, 1397 (1963).
- [6] A. Veseli dhe G. Jashari, *Metodat e orbitaleve molekulare ne llogaritjen e energjiave te molekulave*, në botim.
- [7] J. Hinze and H.H. Joffe, *J. Amer. Chem. Soc.*, **89**, 540 (1962).
- [8] L.C. Cusachs and J.W. Reynolds, *J. Chem. Phys.*, **43**, S 157 (1965); *J. Chem. Phys.*, **43**, S 160 (1965).
- [9] C.A. Coulson, *Valence*, 2-nd ed., Oxford University Press, Oxford 1961.



DETERMINATION OF DISTANCES BETWEEN C AND O ATOMS

A. Veseli, L. Istrefi and J. Hoxha

S y m m a r y

By a semiempirical SCC-MO method we computed the band order of thirty seven molecules of carbonic groups. The band order were correlated with interatomic distances of double C=O band and so findet $R_c=0$ values comparated with experimental datings.

The standard deviation of thirty seven molecules is 0,0234 and for twenty six others is 0,0093 wich shows a good agreement between calculated and experimental datings.

IZRAČUNAVANJE UDALJENOSTI IZMEĐU IZRAČUNAVANJE UDALJENOSTI IZMEĐU

A. Veseli, L. Istrefi i J. Hoxha

S a ž e t a k

Pomoću semienpirijske SCC-MO metode izračunat je red veze za trideset i sedam molekula karbonilnih skupina. Red veze je koreliran s međuatomskim udaljenostima dvostruke C=O veze iz koje su dobivene vrijednosti $R_c=0$, koje su usporedljive s eksperimentalnim vrijednostima.

Standardna devijacija za trideset i sedam molekula je 0,234, a za dvadeset i šest molekula koliko je ostalo u korelaciji je 0,0093, što pokazuje dobro slaganje između izračunatih eksperimentalnih podataka.

BIOLOGJI—BIJOLOGIJA

HORDEO-CARICETUM DISTANTIS Mic. 1957 U VEGETACIJI KOSOVA*

Beqir Hundozi

A b s t r a k t

Sastojine asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* Mic. 1957 na području Kosova pokrivaju relativno velike vlažne površine u okolini Prištine, Lipljana, Štimlja, Podujeva i Orahovca. Karakteristične vrste asocijacije na istraživanom području su: *Hordeum secalinum* Schreb., *Festuca pratensis* Huds., *Carex distans* L., *Carex divisa* Huds., *Inula britannica* L. i *Oenanthe silaifolia* M.B. Unutar ove asocijacije, a na osnovu diferencijalnih vrsta, izdvojili smo i opisali tri nove subasocijacije. To su: *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani*, *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisae* i *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis*.

UVOD

Višegodišnjim istraživanjima flore i vegetacije nizinskih livada Kosova, ustanovili smo da one, u okviru srednjeevropskog vegetacijskog razreda *Molinio-Arrhenatheretea* Tx. 1937 i reda *Trifolio-Hordeetalia* H-ić 1957, fitocenološki pripadaju vegetacijskoj svezi *Trifolion resupinati* Mic. 1957.

Sveza *Trifolion resupinati* Mic. je na području Kosova, a na osnovu naših dosadašnjih istraživanja, zastupljena ovim asocijacijama: *Hordeo-Caricetum distantis*, *Cynosuro-Caricetum hirtae*, *Trifolietum resupinati-balansae* i *Poëto-Trifolietum fragiferi*.

U ovom radu izveštavamo o asocijaciji *Hordeo-Caricetum distantis*.

* Ovaj rad predstavlja deo autorove disertacije, koja je pod naslovom »Vegetacija nizinskih livada na Kosovu« izrađena pod rukovodstvom prof. dra Ljudevita Ilijančica i odbranjena 1980. na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

METODE ISTRAŽIVANJA

Determinaciju florističkog materijala izvršio sam pomoću analitičkih flora i ključeva za determinaciju: Hayek (1927—1933), Hegi (1906—1935), Horvatić (edit., 1967—1974), Javorka (1934), Josifović (edit., 1970—1977), Tutin et al. (1964—1976) i dr.

Fitogeografsku analizu rasčlanjivanjem flore na florne elemente izvršio sam prema Flori SR Srbije (I—IX, 1970—1977), dok su životni oblici uzeti prema Ellenbergu (1974), Micevskom (1964) i Flora Romaniei I (1977).

Fitocenološka istraživanja vršena su po principima i metodama fitocenološke škole Zürich-Monpellier (Braun-Blanquet, 1964; Mueller-Dombois, Ellenberg, 1974).

Reakcija tla (pH) određivana je potenciometrijski u suspenziji tla u vodi u odnosu 1 : 2,5, a klasifikacija zajednica u odnosu prema reakciji je izvršena po Gračaninu (1950).

Količina humusa u tlu određivana je po metodi Kotzmanna (Stojanović, 1966).

Količina kalcijum karbonata u zemljištu određivana je volumetrijski pomoću Scheiblerovog kalcimetra (Gračanin, 1950; Steubing, 1965).

Mehanički sastav (tekstura) tla određivan je pipet metodom, a tla su svrstana prema Gračaninovoј klasifikaciji (Gračanin, Ilijančić 1977).

Dubinu podzemne vode merili smo bušenjem pedološkim svrdlom do dubine od 120 cm.

DISKUSIJA I REZULTATI

Floristički sastav asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* prikazujemo na fitocenološkoj tabeli I na osnovu 45 fitocenoloških snimaka koji potiču iz ovih lokaliteta:

Snimci 1—8. Štimlje; veliki komplekse vlažnih livada nedaleko od naselja. U sastojinama dominiraju vrste *Leucorum aestivum* i *Cirsium canum*.

Snimci 9—13. Selo Donje Dobrevu kod Prištine; livade s desne strane reke Sitnice. U sastojinama dominira *Cirsium canum* i *Hordeum secalinum* (sl. 1).

Snimci 14—18. Lipljan; livade u blizini naselja. U sastojinama dominira *Cirsium canum* i *Senecio erraticus*.

Snimci 19—33. Orahovac; livade u »Donjem Dubljanu«, livade pored sela Donje Potočane i »Ferizove livade« kod Brnjače. Gotovo u svim snimcima dominira vrsta *Hordeum secalinum* koja ovde vrlo često gradi facijes ove asocijacije.

Snimci 34—45. Podujevo; kompleks vlažnih livada pored reke Dumnice. I u ovom delu istraživanog područja dominira i gradi facijes asocijacije vrsta *Hordeum secalinum*.



Sl. 1. Sastojina asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis*. D. Dobrevu (15. VI 1979).

Asocijacija *Hordeo-Caricetum distantis* je na istraživanom području dobro karakterizirana, jer od ukupno sedam karakterističnih vrsta asocijacije, na istraživanim livadama Kosova raste ih šest, i to: *Hordeum secalinum*, *Festuca pratensis*, *Carex distans*, *Carex divisa*, *Inula britannica* i *Oenanthe silaifolia*.

Vrstu *Teucrium scordioides*, koju Micevski (1964), pored ostalih, označava karakterističnom vrstom asocijacije, na istraživanom području zasad nismo našli. Nije je našao ni Micevski (1968) kod Uroševca, a tamo nije našao niti vrste *Carex divisa* i *Inula britannica*, karakteristične za asocijaciju. *Carex divisa* nismo niti mi našli na livadama kod Uroševca, već zasad samo na livadama u okolini Orahovca.

Od karakterističnih vrsta sveze *Trifolion resupinati* i reda *Trifolio-Hordeetalia* na istraživanom području prisutne su *Trifolium resupinatum*, *Alopecurus utriculatus*, *Cirsium canum*, *Galium constrictum*, *Trifolium fragiferum*, *Poa sylvicola*, *Trifolium filiforme*, *Crepis setosa* i dr.

Od karakterističnih vrsta razreda *Molinio-Arrhenatheretea* u sastavu ove asocijacije najčešće su *Bromus racemosus*, *Trifolium*

pratense, *Potentilla reptans*, *Trifolium repens*, *Ranunculus acris* i *Prunella vulgaris*. Od pratilica su pak najčešće i s najvećom pokrovnom vrijednošću *Plantago lanceolata*, *Lolium perenne*, *Taraxacum officinale* i *Anthoxanthum odoratum*.

Analizom flornih elemenata i životnih oblika (tab. 1, 2 i sl. 2, 3) utvrdili smo da je u sastavu ove asocijacije najrasprostranjeniji evroazijski florni element (36,70%), a od životnih oblika najzastupljeniji su hemikriptofiti (69,72%), te ima zajednica hemikriptofitski karakter, ali s razmerno mnogo terofita i geofita.

Asocijacija *Hordeo-Caricetum distantis* je na istraživanom području vrlo dobro razvijena i pokriva relativno velike površine nizinskih livada u okolini Prištine, Lipljana, Stimlje, Orahovca i Podujeva (sl. 7).

U okviru asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis*, Micevski (1964) je na području Makedonije opisao tri subasocijacije: *trifolietosum cincti*, *rottboellietosum digitatae* i *trifolietosum resupinati*.

Vrste *Trifolium cinctum* i *Rottboellia digitata* na nizinskim livadama Kosova, međutim, zasad nisu nađene.

Mi smo u okviru ove asocijacije na istraživanom području, a na osnovu diferencijalnih vrsta, izdvojili i opisali tri nove subasocijacije: *cirsietosum cani*, *caricetosum divisae* i *trifolietosum filiformis*.

TABELA 1.

Florni elementi u asocijaciji *Hordeo-Caricetum distantis*

Florni element	Broj taksona	%
1. Balkanski	1	0.93
2. Cirkumpolarni	9	8.25
3. Kozmopolitski	15	13.76
4. Evropski	9	8.25
5. Srednjoevropski	11	10.09
6. Južноеvropski	5	4.59
7. Eurazijski	40	36.70
10. Pontski	3	2.75
11. Submediteranski	16	14.88

TABELA 2.

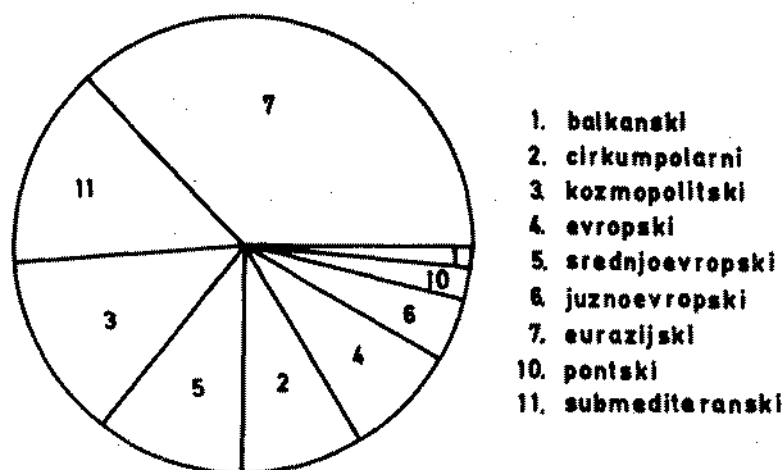
Životni oblici u asocijaciji *Hordeo-Caricetum distantis*

Životni oblik	Broj taksona	%
1. Terofiti (T)	19	17.43
2. Geofiti (G)	14	12.85
3. Hemikriptofiti (H)	76	69.72

Subas. *HORDEO-CARICETUM DISTANTIS CIRSITOSUM CANI*,
subass. nov.

Subasocijacija obuhvaća snimke 1—18 (fitoc. tab. I).

Tip imena (nomenklatorički tip) ove subasocijacije, u smislu pravila fitocenološke nomenklature (Barkman, Moravec, Rauschert, 1976), je snimak br. 2.



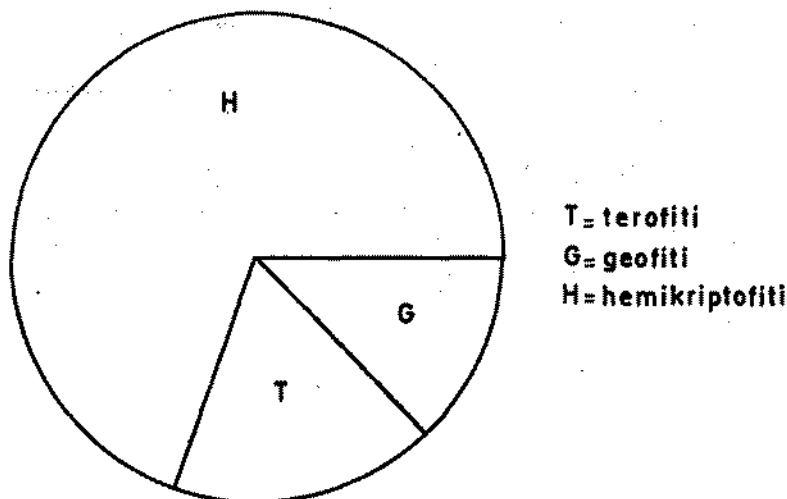
Sl. 2. Spektar flornih elemenata u asocijaciji

Hordeo-Caricetum distantis

Subasocijacija *cirsitosum cani* je najvlažnija subasocijacija i odlikuje se dominiranjem karakteristične vrste sveze, *Cirsium ca-*

num. Ta biljka ujedno i najbolje diferencira ovu subasocijaciju od drugih. Ostale diferencijalne vrste subasocijacije su *Leucosium aestivum*, *Deschampsia cespitosa*, *Centaurea jacea*, *Serratula tinctoria*, *Rhinanthus rumelicus*, *Serratula lycopifolia*, *Senecio erraticus* i *Holcus lanatus*.

Vrsta *Leucosium aestivum* je vrlo brojna naročito na livadama kod Štimlja i u mesecu maju, u tom delu područja, daje ovoj subasocijaciji vrlo lepi prolećni aspekt (sl. 4), dok njena glavna diferencijalna vrsta *Cirsium canum* daje subasocijaciji ljetnji aspekt (sl. 5).



Sl. 3. Spektar životnih oblika u asocijaciji
Hordeo-Caricetum distantis

Osim tipičnih sastojaka u kojima su gotovo svi elementi zajednice skoro podjednako raspoređeni, subasocijacija *cirsietosum cani* formira više facijesa:

Facijes vrste *Cirsium canum* (snimci 1, 5, 8, 10, 12, 14, 16 i 17) je najrasprostranjeniji facijes subasocijacije i pokriva velike površine u okolini Štimlja, Lipljana i sela Donje Dobrevo kod Prištine.

Facijes vrste *Leucosium aestivum* (sn. 2, 4, i 6), Štimlje.

Facijes vrste *Serratula lycopifolia* (sn. 3), Štimlje.

Facijes vrste *Hordeum secalinum* (sn. 13 i 18), Lipljan i D. Dobrevo.

Subasocijacija *cirsietosum cani* može se razlučiti u dve varijante: varijanta *Serratula lycopifolia* i varijanta *Senecio erraticus*.

Varijanta *Serratula lycopifolia* (sn. 1, 2, 3 i 4) razvija se na livadama u blizini Štimlja i zauzima uglavnom njihove krajne delove.

Druga varijanta *Senecio erraticus* (sn. 14, 15, 16 i 17) razvija se na livadama koje se nalaze do samog naselja Lipljan.

Ekološke karakteristike. — U doba punog razvitka subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani*, tačnije 17. VI 1975., u pojedinim njenim sastojinama podzemnu vodu smo našli



Sl. 4. Prolećni aspekt vrste *Leucorum aestivum* u sastojini subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani*. Štimlje (15. V 1971).



Sl. 5. Sastojina subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani* u letnom aspektu vrste *Cirsium canum*. Štimlje (17. VI 1971).

na dubini od 60, odnosno 50, a u nekim vlažnim sastojinama i na 30 cm, za razliku od drugih subasocijacija u kojima podzemnu vodu u ovo doba godine nismo našli niti na dubini od 120 cm. Ovakav relativno visoki nivo podzemne vode i u ovo doba godine, verovatno je jedan od glavnih ekoloških faktora koji utiče na razvitak ove subasocijacije. Tla na kojima se razvijaju sastojine ove subasocijacije su neutralna do slabo bazične reakcije (pH u vodi iznosi 7,02—7,10); prema sadržaju humusa na dubini od 0—10 cm pripadaju ona grupi jako humoznih tala (9,82%), dok su po teksturi ilovače i glinaste peskulje (tab. 3).

Prisutnost naše glavne diferencijalne vrste *Cirsium canum* i u subasocijaciji *Hordeo-Caricetum distantis rottboellietosum digitatae* Mic. iz Makedonije, povezuje međusobno ove dve subasocijacije, iako među njima postoje znatne razlike. To su: u našoj subasocijaciji nedostaje *Rottboellia digitata* i *Linum angustifolium*, inače diferencijalne vrste makedonske subasocijacije u kojoj pak nedostaju naše diferencijalne vrste: *Deschampsia cespitosa*, *Serratula tinctoria*, *Serratula lycopifolia* i *Senecio erraticus*.

Istraživanje sastojine subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani* pokrivaju velike vlažne površine kod Štimlja, Lipljana i Donjeg Dobrega (sl. 7).

Subas. HORDEO-CARICETUM DISTANTIS CARICETOSUM DIVISAE, subass. nov.

Subasocijacija obuhvaća snimke 19—33 (fitoc. tab. I).

Tip imena (nomenklatorički tip) ove subasocijacije je snimak br. 19.

Diferencijalne vrste subasocijacije *caricetosum divisae* su *Tragopogon pratensis*, *Carex divisa* i *Ranunculus neapolitanus*.

Sve tri diferencijalne vrste, *Tragopogon pratensis* koju Horvatić (1963) uzima za karakterističnu vrstu asocijacije *Arrhenatherum elatioris*, *Carex divisa* koju Micevski (1964) uzima za karakterističnu vrstu asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* i *Ranunculus neapolitanus* koja je po Horvatiću (1963) karakteristična vrsta sveze *Molinio-Hordeon secalini*, nađene su za sada skoro isključivo u sastojinama ove subasocijacije.

Vrsta *Tragopogon pratensis* pojedinim sastojinama ove zajednice daje veoma lepi prepodnevni aspekt kada su njene glavice širom otvorene.

Činjenica je, međutim, da se subasocijacija javlja uglavnom u obliku facijesa vrste *Hordeum secalinum* (sn. 19, 21, 23, 26, 27 i 30), stoga livade u ovom delu područja, vrlo često, imaju izgled prostranih žitnih polja (sl. 6).

Uočili smo ipak pojavu da *Hordeum secalinum* neke godine gotovo u potpunosti nedostaje. To su godine s vlažnim i hladnim prolećem kada *Hordeum secalinum* nije u stanju da proklija. Takva je bila godina 1975.

Česti su zatim i facijesi vrste *Carex divisa*, rasprostranjeni pokraj sela donje Potočane i na »Ferizovim livadama« kod Orahovca.

Ekološke karakteristike. — U doba punog razvitka sastojina ove subasocijacije podzemnu vodu nismo našli niti na dubini od 120 cm. Tla na kojima se razvijaju sastojine subasocijacije *caricetosum divisae* pripadaju grupi neutralnih do slabo bazičnih tala (pH u vodi 7,26); prema sadržaju humusa pripadaju ona grupi jako humoznih tala (8,32%), dok su po teksturi gline ili peskovite gline (tab. 3).



Sl. 6. Sastojina subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisae*, facijes vrste *Hordeum secalinum*. Orahovac — selo Donje Potočane (16. VI. 1973).

Sastojine subasocijacije *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisae* pokrivaju velike površine u okolini Orahovca (»Donje dubljane«, selo Donje Potočane, »Ferizove livade« kod Brnjače i dr.), sl. 7.

Subas. *HORDEO-CARICETUM DISTANTIS TRIFOLIETOSUM FILIFORMIS*, subass. nov.

Subasocijacija obuhvaća snimke 34—45 (fitoc. tab. I).

Tip imena ove subasocijacije je snimak broj 45.

Diferencijalne vrste subasocijacije su: *Trifolium filiforme*, *Alopecurus pratensis*, *Moenchia mantica*, *Narcissus radiiflorus*, *Ranunculus marginatus*, *Trifolium subterraneum*, *Filipendula vulgaris* (= *F. hexapetala*), *Phleum pratense* i *Rumex acetosa*. Prevladavaju dakle ovde elementi nešto suših staništa, te je ova subasocijacija unutar asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* relativno najsušija.

Substancija *trifolietosum filiformis* javlja se uglavnom u obliku facijesa vrste *Hordeum secalinum* (sn. 34, 35, 37, 41, 43 i 44). Vrsta *Hordeum secalinum* je ovde ujedno i dominantna vrsta, pa i ove livade imaju takođe izgled žitnih polja.

Postoje zatim i drugi facijesi, kao što su: facijes vrste *Trifolium filiforme* (sn. 36), facijes vrste *Trifolium patens* (sn. 40) i dr.

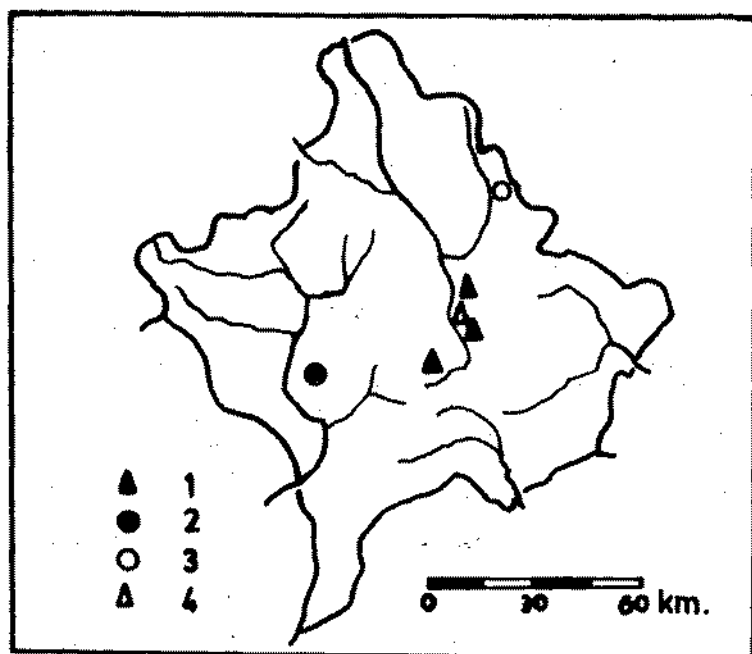
Ekološke karakteristike. — I u ovoj subasocijaciji u doba punog razvitka njenih sastojina na podzemnu vodu nismo naišli niti na dubini od 120 cm. Tla na kojima raste ova subasocijacija imaju umereno kiselu reakciju (pH u vodi 5,80); prema sadržaju humusa pripadaju ona grupi jako humoznih tala (8,36%), dok su po mehaničkom sastavu glinaste ilovače (tab. 3).

TABELA 3.

	Hordeo-Caricetum distantis		
	cirsietosum canj	caricetosum æstivæ	trifolietosum filiformis
pH u vodi	7.06	7.26	5.80
Humus ‰ (0—10 cm)	9.82	8.32	8.36
CaCO ₃ ‰ (0—10 cm)	1.52	4.49	0.20
Teksturna oznaka tla	ilovača i glinasta pjeskula	glina i pjeskovita glina	glinasta ilovača

Subsocijacija *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis* pokriva velike površine pored reke Dumnice nedaleko od Podujeva (sl. 7).

Naša subasocijacija unutar asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* pokazuje izvesne sličnosti sa subasocijacijom *trifolietosum resupinati* iz Makedonije, pre svega jer su skoro sve diferencijalne vrste makedonske subasocijacije (*Trifolium resupinatum*, *Alopecurus utriculatus*, *Ranunculus marginatus*, *Agrostis stolonifera*, *Trifolium filiforme* i *Ranunculus velutinus*) prisutne i u našoj subasocijaciji. Razlika je u tome što neke diferencijalne vrste naše subasocijacije (*Moenchia mantica*, *Alopecurus pratensis*, *Narcissus radiiflorus*, *Filipendula vulgaris* i dr.) nedostaju u subasocijaciji opisanoj u Makedoniji.



1. *Hordeo-Caricetum distantis circosetosum cani*
2. *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisae*
3. *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis*
4. Ranije nalazište asocijacije (Micevski, 1968)

Sl. 7. Nalazišta asocijacije *Hordeo-Caricetum distantis* na području Kosova.

ZAKLJUČAK

U ovom radu izveštavamo o asocijaciji *Hordeo-Caricetum distantis*. Ovu asocijaciju prvi put je opisao Micevski (1957) na nizinskim livadama Makedonije. Godine 1968. isti aytom je ovu zajednicu konstatirao i na nizinskim vlažnim livadama Kosova polja (okolina Lipljana).

Našim višegodišnjim istraživanjima flore i vegetacije nizinskih livada Kosova, ustanovili smo da je asocijacija *Hordeo-Caricetum distantis* Mic. na području Kosova široko rasprostranjena i pokriva relativno velike vlažne površine u okolini Prištine, Lipljana, Štimlja, Podujeva i Orahovca.

Asocijacija *Hordeo-Caricetum distantis* Mic. 197 je na području Kosova vrlo dobro karakterizirana, jer od ukupno sedam karakterističnih vrsta asocijacije, na istraživanom području raste ih šest, i to: *Hordeum secalinum*, *Festuca pratensis*, *Carex distans*, *Carex divisa*, *Inula britannica* i *Oenanthe silaifolia*.

U okviru ove asocijacije na području Kosova, a na osnovu diferencijalnih vrsta, izdvojili smo i opisali tri nove subasocijacije, i to: *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani*, *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisae* i *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis*.

LITERATURA

Berkman, J., J. Moravec, S. Rauschert, 1976: Code of Phytosociological Nomenclature. Vegetatio 32,3, 131—185.

Braun-Blanquet, J., 1964: Pflanzensoziologie. Dritte Aufl. Springer-Verlag, Wien — New York.

Ehrendorfer, F., (Edit.) 1973: Liste der Gefäßpflanzen Mitteleuropas, 2. Aufl. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart.

Ellenberg, H., 1974: Zeigerwerte der Gefäßpflanzen Mitteleuropas. Scripta Geobotanica 9, Verl. Erich Goltze KG, Göttingen.

Gračanin, M., 1950: Metodika ekoloških istraživanja tla. Priručnik za tipološko istraživanje i kartiranje vegetacije, 89—207. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.

Gračanin, M., Lj. Ilijanić, 1977: Uvod u ekologiju bilja. Školska knjiga, Zagreb.

Hayek, A., 1927—1933: Prodrromus Florae peninsulae Balcanicae I—III, Berlin-Dahlem.

Hegi, G., 1906—1935: Illustrierte Flora von Mitteleuropa, I—VII, München.

Horvatić, S., 1963: Vegetacijska karta otoka Paga s općim pregledom vegetacijskih jedinica Hrvatskog primorja. Prirosl. istraž. Jugosl. akad. znan. umjet. knji. 33, Acta Biol. 4, Zagreb.

Horvatić, S., (edit.) 1967—1974: Analitička flora Jugoslavije. Svezak 1, br. 1—3, Institut za botaniku Sveuč. u Zagrebu.

Hundozi, B., 1967: Vegetacija nizinskih livada između Sesveta i Dugog Sela u široj okolini Zagreba. Zbornik filozofskog fakulteta 4, 129—143, Priština.

Hundozi, B., 1980: Vegetacija nizinskih livada na Kosovu (Diss. — manuskript), Zagreb.

Ilijanić, Lj. 1962: Prilog poznavanja ekologije nekih tipova nizinskih livada Hrvatske. Acta Bot. Croat. 20/21, 95—167, Zagreb.

Ilijančić, Lj., 1969: Das Trifolion pallidi, ein neuer Verband der Ordnung Trifolio-Hordeetalia H.-i. Acta Bot. Croat. 28, 151—160, Zagreb.

Ilijanić, Lj., 1973: Allgemeiner Überblick über die wechselfeuchten Niederungswiesen Jugoslaviens im Zusammenhang mit dem klimatischen Verhältnissen. Acta Bot. Acad. Scient. Hungaricae 19 (1—4), 165—179, Budapest.

Javorka, S., 1934: Iconographia florum Hungaricae, Budapest.

Josifović, M., (edit.) 1970—1977: Flora SR Srbije, I—IX. SANU. Beograd.

Jovanović, R., 1957: Tipovi dalinskih livada Jasenice. Arh. biol. nauka, 9 (1—4), 1—14, Beograd.

Micevski, K., 1964: Tipološki istraživanja na vegetacija na nizinske livade vo Makedonija. God. zborn. na prir. mat. fak. Univ. vo Skopje 15, 3, 121—174, Skopje.

Micevski, K., 1968: Livadska vegetacija na Kosovo Polje. Gog. zborn. na Prir.-mat. fak. na Univ. vo Skopje 20 (1967), 135—146, Skopje.

Mueller-Dombois, D., H. Ellenberg 1974: *Aims and Methods of Vegetation Ecology*. John Wiley et Sons, New York-London-Sydney-Toronto.

Steubing, L., 1965: *Pflanzenökologisches Praktikum, Methoden und Geräte zur Destimmung wchtinger Standartsfaktoren*. Verl. Poul-parey, Berlin und Hamburg.

Stojanović, S., 1966: *Određivanje sadržaja humusa po metodi Kotz-manna*. Priručnik za ispitivanje zemljišta, knj. I, 44—45, Jugosl. društvo za prouč. zemljišta, Beograd.

Tutin, T., 1964—1976: *Flora Europaea*, 1—4, Cambridge.

HORDEO-CARICETUM DISTANTIS MIC, 1957 NË VEGJETACIONIN E KOSOVËS

Beqir Hundozi

R e z y m e

Duke e hulumtuar florën dhe vegjetacionin e livadheve ultësinore të lagështa të Kosovës, kemi konstatuar se ato, nga ana fitocenologjike, i takojnë aleancës *Trifolion resupinati* Mic, 1957.

Aleanca *Trifolion resupinati* në Kosovë, e në bazë të hulumtimeve tona të deritanishme, është e përfaqësuar me këto asociacione: *Hordeo-Caricetum distantis*, *Cynosuro-Caricetum hirtae*, *Trifolientum resupinati-balansae* dhe *Poëto-Trifolietum fragiferi*.

Në këte punim bëjmë fjalë rreth asociacionit *Hordeo-Caricetum distantis*.

Individët e këtij asociacioni në Kosovë mbulojnë sipërfaqe relativisht të mëdha të livadheve të lagështa të rrethinës së Prishtinës, Lipjanit, Shtimes, Podujevës e të Rahovecit.

Llojet karakteristike të asociacionit në fjalë, në teritorin e hulumtuar, janë: *Hordeum secalinum* Schreb., *Festuca pratensis* Huds., *Carex distans* L., *Carex divisa* Huds., *Inula britannica* L. dhe *Oenanthe silaifolia* M. B.

Duke bërë analizën e elementeve floristike dhe analizën e formave biologjike, kemi konstatuar se elementi floristik më i përhapuri në këte asociacion është ai evroaziatik (36,70%), e prej formave biologjike, më të përfaqësuarat janë hemikriptofitet (69,72%).

Në gjiun e asociacionit *Hordeo-Caricetum distantis*, e në bazë të llojeve diferenciale, kemi konstatuar tri subasociacione të reja. Këto janë: *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani*, *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisa* dhe *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis*.

Subas. *Hordeo-Caricetum distantis cirsietosum cani* është fitocenoze e pjesëve diçka më të lagështa të livadheve të hulumtuara dhe shquhet me dominimin e llojit *Cirsium canum*. Llojet diferenciale të këtij subasociacioni janë: *Cirsium canum*, *Leucorum aestivum*, *Deschampsia cespitosa*, *Centaurea jaceae*, *Serratula tinctoria*, *Rhinanthus rumelicus*, *Serratula lycopifolia*, *Senecio erraticus* dhe *Holcus lanatus*. Individët e këtij subasociacioni mbulojnë sipërfaqe të mëdha të livadheve të lagështa afër Shtimes, Lipjanit dhe fshatit Miradi e Poshtme të Prishtinës.

Subas. *Hordeo-Caricetum distantis caricetosum divisa* përfshinë rilevitem prej numrit 19—33 (tab. fitoc. I). Llojet diferenciale të këtij subasociacioni janë: *Tragopogon pratensis*, *Carex divisa* dhe *Ranunculus neapolitanus*. Subasociacioni në fjalë paraqitet kryesishtë si facies i llojit *Hordeum secalinum*. Individët e këtij subasociacioni mbulojnë sipërfaqe të mëdha të livadheve të lagështa të rrethinës së Rahovecit («Dublan i Poshtëm», fshati Potoçan i Poshtëm, «Livadhat e Ferizit» në Bërnjak).

Subas. *Hordeo-Caricetum distantis trifolietosum filiformis* i përfshinë rilevimet prej numrit 34—45 (tab. fitoc. I). Llojet diferenciale janë: *Trifolium filiforme*, *Alopecurus pratensis*, *Moenchia mantica*, *Narcissus radiiflorus*, *Ranunculus marginatus*, *Trifolium subterraneum*, *Filipendula vulgaris*, *Phleum pratense* dhe *Rumex acetosa*. Pra, në këte fitocenoze dominojnë llojet e vendbanimeve diçka më të thata dhe mund të themi se ky është subasociacion i pjesëve diçka më të thata të livadheve që i takojnë asociacionit *Hordeo-Caricetum distantis*. Edhe ky subasociacion paraqitet kryesishtë si facies i bimës *Hordeum secalinum*. Individët e hulumtuar të subasociacionit *trifolietosum filiformis* mbulojnë sipërfaqe të mëdha të livadheve ultësinore buzë lumit Dumnice të Podujevës.

HORDEO-CARICETUM DISTANTIS MIC. 1957 IN THE VEGETATION OF KOSOVA PROVINCE

Beqir Hundozi

S u m m a r y

By investigating the flora and vegetation of lowland meadows of Kosova, we have established that these meadows, from the phytocenologic point of view, belong to the alliance *Trifolion resupinati* Mic. 1957.

On the basis of up to now research, the alliance *Trifolion resupinati* in Kosova, is represented with these associations: *Hordeo-Caricetum distantis*, *Cynosuro-Caricetum hirtae*, *Trifolietum resupinati-balansae* and *Poëto-Trifolietum fragiferi*.

In this paper we discuss the association *Hordeo-Caricetum distantis*. Parts of this association in Kosova cover relatively huge surfaces of lowland meadows in the vicinity of Prishtina, Lipjan, Shtime, Podujeva and Rahovec.

Characteristic species of the above mentioned association are: *Hordeum secalinum* Schreb., *Festuca pratensis* Huds., *Carex distans* L., *Carex divisa* Huds., *Inula britannica* L., and *Oenanthe silaifolia* M. B.

Within the association *Hordeo-Caricetum distantis*, and on the basis of differential species, we have established there sub-association: *cirsietosum cani*, *caricetosum divisa* and *trifolietosum filiformis*.

dr. Beqir Hundozi
Fakulteti i Shkencave Mat.-Natyrore
Dega e Biologjisë
YU-38000 Prishtinë (Jugosllavi)

FITOCENOLOŠKA TABELA 1

HORDEO-CARICETUM DISTA

[illegible]

Životni oblik	Subasocijacija	CIRSIIETOSUM CANI, subass. nov.																		CARICETOSUM DIVISAE, subass. nov.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
																				ORAHOVAC																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
		ŠTILJE																		D. DOBREVO						LIPLJAN						280 - 380																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
		Lokalitet																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
		Nadmorska visina:																		Veličina snimke (m²):																		Pokrovnost (%):																		Broj snimke:																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
		520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	520	52

ENDEMIKET E KOSOVËS

Ferat Rexhepi

A b s t r a k t

Në këtë punim prezentohen 12 lloje (specie) bimore autoktone endemike të cilat rriten vetëm në treven e Kosovës. Këto janë: *Aconitum pentheri* Hay., *Dianthus scardicus* Wettst., *Bornmuellera dieckii* Degen, *Sempervivum kosanini* Praeger, *Sedum flexuosum* Wettst., *Saxifraga scardica* Gris., *Potentilla doerfleri* Wettst., *Verbascum scardicum* Bonm., *Thymus doerfleri* Bonm., *Thymus rohlenae* Vel., *Achillea alexandri-regis* Bonm. et Rud., *Centaurea albertii* Rexhepi. Për çdo lloj janë dhënë shënime të nevojshme morfologjike, tipi biologjik i bimës, koha e lulimit dhe zhvillimit të plotë, biotopi dhe përhapja e tyre në Kosovë që njëherit paraqet përhapjen e përgjithshme në natyrë.

KUSHTET TË CILAT NDIKOJNË NË RITJEN E BIMËVE ENDEMIKE

Sipërfaqja ku rritet një lloj bime e caktuar quhet areal. Disa lloje bimore kanë areal të gjërë, ndërsa disa të tjera kanë areal të gusht — prandaj ekzistojnë bimë kosmopolite dhe endemike. Bimët kosmopolite janë të përhapura kudo në planeten tonë (edhe pse në kuptimin e ngusht «kosmopolit ideal» nuk ka). Si kosmopolit zakonisht janë bimët e ulta (bakteriet, algat, këpurdhat etj.), por, edhe një numër i konsiderueshëm i bimëve të larta. P.sh. bimët që jetojnë në ambiente ujore ose në moqale (*Alisma plantago-aquatica*, *Phragmites communis*, *Lythrum salicaria*), pastaj disa bimë ruderales dhe barëra të këqia (*Urtica dioica*, *Capsella bursa pastoris*, *Cynodon dactylon*, *Taraxacum officinale* etj.).

Numri më i madh i bimëve të larta kanë areal të kufizuar dmth. janë bimë endemike të një zonë ose regjioni më të gjërë ose më të ngusht (p.sh. endemiket e Evropës, Ballkanit, Kroacisë, Serbisë etj.). Zakonisht me nocionin — bimë endemike duhet të kuptojmë specien (llojin) bimore që ka një real të kufizuar (mal, liqë, ishull, gadishull etj.) kur vendi ose regjioni gjeografik është i izoluar nga vendet e afërta me pengesa natyrore. Prandaj me

bimë endemike janë të pasur sidomos ishujt e vjetër. Kështu p.sh. në Australi nga 12.000 lloje, 9.000 janë endemike dhe rriten vetëm më treven e Australisë e askund tjetër. Po ashtu shumë endemik kanë ishujt e Filipineve, Madagaskari, Zelanda e Re etj. Gati njësoj sikur se ishujt Malet e larta shpeshherë janë të pasur me lloje endemike sidomos ato që në pikëpamje gjeologjike janë të vjera.

Areali i llojeve mund të rritet ose të zvogëlohet. Në rastin e dytë behët shumë më i vogël se në të kaluarën e lashtë: Në këtë rast kemi areal relik — respektivisht llojin relik. Varesisht nga origjina dhe mosha reliktet mund të jenë të koherave të ndryshme gjeologjike. Prandaj kemi paleoendemiket dhe neoendemiket me vjetërsi mezozoike, terciare, glaciore dhe postglaciore.

Në Siujdhesën Ballkanike (Ballkanin) nga më tepër se 6530 lloje bimore, endemike janë 1750 lloje që një numër i madh i tyre kanë karakteret relik.

Natyra e përshtatshme e Kosovës (përberja e ndryshme gjeologjike dhe pedologjike, reliefi, lartësia e lartë mbidetare, gryka të thella etj.) i ka dhuruar këtij vendi një numër të madh llojesh me karakter endemik dhe relik. Vetëm në Malet e larta të Kosovës janë më tepër se 115 endemik të Ballkanit.

Nga ana tjetër në trollin e Kosovës rritet edhe një numër i konsiderueshem llojesh bimore *autoktone endemike* që rriten vetëm në Kosovës e askund tjetër. Këto lloje përveç tjerash kanë edhe një vlerë të madhe shkencore. Gati se të gjitha këto lloje kanë areal shumë të kufizuar dhe rriten vetëm në lokalitete të caktuara p.sh. *Aconitum pentheri* rritet vetëm në Zhleb, *Burnmuellera dieckii* vetëm në Ostrovicën e mpreftë, *Achillea alexandri-regis* vetëm në Oshklakun e lartë të thepisur, *Centaurea alberti* në Devë, Golesh. Për llojet endemike të Kosovës do të shkruajmë më gjerësisht në punimin vijues.

ENDEMIKET E KOSOVËS

1. *Aconitum pentheri* Hay. (Ranunculaceae)

Bimë barishtore shumëvjeçare. Kërcelet i drejt i mbuluar me gjethet të dendura, në pjesën e sipërmë i degëzuar. Gjethet pëndore të ndara në 5—7 pjesë. Lulesat të thjeshta, të shpeshta me qime të shkurtëra gjëndërore. Lulet në bishta më të shkurtër se lulet, të drejt, lulet ngjyrë vjollcë të mbyllt. Braktet e poshtme gjasojnë me gjethet. Fillet e thekeve dhe gineceu pa qime VII.

Rritet në vende malore dhe të zonës subalpike.

Perhapja në Kosovë — Zhleb.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

2. *Dianthus scardicus* Wettst. (Caryophyllaceae)

Bime barishtore me buce të rralla. Kërcellil, 5—10 cm i gjatë me 2—3 pale gjethe të gjata afër 15 mm dhe të gjëra 2—3 mm, me tri nervura. Lulet zakonisht të vetmuara. Nenkupa (kupa e dyte) me dy luspa gati sa gjysma e kupës, në maje me tri nervura. Kupa 10—12 mm e gjatë, në pjesën e sipërme e zgjeruar. Kurora 7—8 mm e gjatë ngjyrë trendafil pak e dhëmbëzuar. VI—VII.

Rritet në vende shkembore dhe me bar të zonës subalpike dhe aplike.

Përhapja në Kosovë — Luboten, Prevalc (Malet e Sharit).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

3. *Bornmuellera dieckii* Degen. (Brassicaceae)

Bime gjysemshkurre. Getehet gjatore vezake, nga sipër të shogëta, nga poshtë me qime të rralla dykraheshe. Lulesa e degzuar, lulesa e pjekur e dendur. Lulet të bardha, theket në bazë me dhëmb të zgjeruar. Frytet forme vezake diçka të shtypur 4 mm të gjatë të shogë. VI—VII.

Në shkëmbinj serpentini të zonës malore dhe subalpike.

Përhapja në Kosovë — Ostrovićë.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

4. *Sempervivum kosanini* Praeger (Crassulaceae)

Bime barishtore shumevjeçare 15—20 cm e gjate me stolone deri 12 cm të gjate. Rozetet e mëdha 6—8 cm në diameter. Gjethet e rozetes heshtore me maje të shkurër 15—30 mm të gjata dhe 7—9 mm të gjëra, nga të dy anët me qime gjëndërore, mishnore, me buzë gjëndërore- qerpikore, të blera të mbyllta, me maje të kuqe në buzë pak a shumë të bardha. Kërcelli me qimë të dendura gjëndore. Gjethet e kërcellit lineare, me maje, mishnore, me qime gjëndërore 20—35 mm të gjata dhe 5—8 mm të gjëra. Lulesa me qime të dendura gjëndërore. Lulet gati pa bisht, 13—14 pjesëshe, të purpura. Kupa me qime gjëndërore 7—9 mm të gjate, fletzat e saj lineare-lineare heshtore gati të mprehta 4—5 mm të gjata. Fletëzat e kurores lineare 10—12 mm të gjata dhe 1 mm të gjëra, nga sipër të purpura me buze në të bardhe, nga poshtë të blerta në buzë me qime gjëndërore. Theket 6—7 mm të gjatë, fillet e thekëve në buzë diçka me qime, anteret ngjyrë të kuqe të qeltë. Karpelet 6—7 mm të gjata të blerta. Shfrylleza ngjyre si të kuqe 3—3,5 mm. VII—VIII.

Rritet në shkëmbinj gelqeror ose serpentini të zonës subalpike.

Përhapja në Kosovë — Bjeshket e Nemura (Bogićevićë, Der-vish Kom, Ploçicë).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

5. *Sedum flexuosum* Wettst. (Crassulaceae)

Bime barishtore shumëvjeçare me kercej të drej të gjate deri 4 cm dhe me pak bisqe të shkurtëra. Gjethet 5—6 mm të gjata, lineare gjatore ose gati të rrumbullaketa dhe pak kah maja të zgjeruara. Lulesa e shperndar me pak lule. Fletëzat e kupës lineare pa maje. Fletëzat e kurorës gjatore-lineare me maje pak diçka me të gjatë se të kupës, të verdha. Fara e kuqe në të murme. VI—VII.

Në vende shkëmbore sidomos gëlqerore të zonës subalpike.

Përhapja në Kosovë — Luboten, Oshlak.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

6. *Saxifraga scardica* Gris. (Saxifragaceae)

Bime barishtore shumëvjeçare, zhvillon rozetë të dendur. Kërçelli i gjatë deri 7 cm i mbuluar me qime gjëndërore. Gjethet e rozëtës gjatore 5—16 mm, me majë, me 9—15 gropëza të vogla me luspa gëlqerore. Lulesa me 3—11 lule. Kurora 2,5—3 herë më e gjatë se kupa, e bardhe ose trëndafili të qeltë. V—VIII.

Në shkëmbinj të zonës alpike.

Përhapje në Kosovë — Koritnik, Koprivnik, Nexhimat.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

7. *Potentilla doerfleri* Wettst. (Rosaceae)

Bime barishtore shumëvjeçare. Kërçelli lulor 5—25 cm i gjatë, dendur dhe dukshem i mbuluar me qime të gjata 1,5—2(2,5) mm dhe me qime gjëndërore për afërsisht të gjata 0,15—20 mm. Gjethet pëllemore, gjethezat 5,15—40 mm, vezake të dhëmbëzuara dhe të sharruara, me pak maje, me qime, ngjyre të blertë ose të bler të në të hirtë. Lule shumë. Sepalet trikëndore-heshtore. Nenkupa (kupa e dytë) e ndar në segmente linear-heshtor, për afërsisht e gjatë sa sepalet. Petalet (fletëzat e kurorës) 5—7 mm të gjata, të bardh më të shkurtëra se sepalet (fletëzat e kupës). Fillet e thekeve dendur me qime të palosura. VII—VIII.

Rritet në vende me bar të zonës alpike.

Përhapja në Kosovë — Prevalc — Bistra (Malet e Sharit).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

8. *Verbascum scardicum* Bornm. (Scrophulariaceae)

Bime dyvjeçare ose shumëvjeçare e gjatë 22—45 cm. Kërçelli i thjeshtë, cilinrik, me gjethe i kuqërremt i mbuluar me qime verdhake dhe filgjanore, me gjëndëra në bishta të gjatë, në maje me një lulesë të vetme vile. Të gjitha gjethet nga sipër verdhake

të blertatë të mbuluara me qime të degëzuara $\pm$ të thurura me gjëndëra në bishta të gjatë, nga poshtë të mbuluara me qime filgjanore dhe me qime të dendura verdhake-hirta ose ngjyrë ndryshku. Gjethet e poshtme me bishta të ngusht 1—5 cm, llapa me madhësi 5—15 cm $\times$ 1,5—7 cm, ovale-gjatore ose ovale hesh-tore, në buzë me dhëmb të cekt, në bazë formë pykë. Gjethet pak më lartë se të poshtmet të njejta me to ose pak më të ngu-shta, gjethet tjera me të vogla, pa bisht $\pm$ të ngushta-hesh-tore, me dhëmb. Boshti i luleses i mbuluar me qime të hirta ose ver-dhake filgjanore dhe me pak ose shumë gjëndëra me bishta. Grupe 2—4 lule përbejnë lulesen e ngjeshur vile. Braktet me gjëndëra nga sipër dhe nga poshtë të mbuluara me qime filgjanore. Bishtat e luleve me qime filgjanore të gjata 3—9 mm. Kupa 4,5—7 mm e gjatë, nga jashtë e ashper e mbuluar me qime dhe gjëndëra zako-nisht në bishta të gjatë. Kurora e verdhe në diametër 20—25 mm nga jashtë me qime filgjanore, nga brenda me qime qerpikore. Fillet e dy thekeve të gjatë në pjesën e sipërme të shogët, fillet e thekave të shkurtër nga të gjitha anët me qime. Anteret formë veshkore. Kapsolla 5—7 mm e gjatë eliptike e gjerë, pa maje, me qime të dendura, e gjatë sa kupa ose diç ka me ë gjatë. VII—VIII.

Në kullota (kullosa) të zonës subalpike.

Përhapja në Kosovë — Oshlak (Malet e Sharit).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

12. *Centaurea albertii* Rexhepi (Asteraceae)

Bime barishtore shumëvjeçare. Degët lulore të gjata deri 9 cm. Gjethet në bisqet sterile dhe gjethet në bazë të degëve lulore lineare-pykore, gradualisht kah maja nga pak zgjerohen, të rraf-shta, buzëve nuk janë të lakuara, të gjata 9 mm, të gjera 1,5 mm. Gjethet në pjesën e sipërme të bisqeve lulore dhe të braktet pak të zgjeruara rreth 10 mm të gjata dhe 3 mm të gjëra. Në gjethe nuk ka gjëndëra pa bisht të cilat përndryshe janë të rralla vetëm në kupe. VI—VII.

Në vende të thata, në pyje të rralla të zonës malore dhe subalpike.

Përhapja në Kosovë — Koritnik.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

10. *Thymus rohlenae* Vel. (Lamiaceae)

Bime barishtore shumëvjeçare. Kërçelli i gjatë zvarritet në tokë, rritet, pandërprerje në maje dhe mbaron me gjethe sterile në rozetë. Degët lulembajtëse zhvillohen njera pas tjetres për-gjatë kërçellit zvarritës, 4—6 cm të gjata, me qime në të dy anet e kundërta. Gjethet në degët lulembajtëse gjatore ose eliptike të

gjata 6—7 mm, të gjera 2—3 mm; në bisqet sterile të gjata 8—11 mm, të gjera 2—3 mm. Lulet të grumbulluara në krye të degëzave, të rrumbullaketa. Bishtat e luleve dhe kupa të mbuluara me qime. Kupa 3 mm, tubi i kupës nuk është i mbuluar me qime ose ka shumë pak. VI.

Rritet në kullota, livadhe të zonës malore dhe subalpike.

Përhapja në Kosovë — Oshlak, Deçan.

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

11. *Achillea alexandri-regis* Bornm. et Rud. (Asteraceae)

Bime barishtore shumëvjeçare deri 40 cm e lartë me rizomë zvarritëse. Kërçelli i ngritur, me shumë gjethë, me qime të gjata të palosura mendafshi. Gjethet e rozetes sterile gati me qime mendafshi gjatore-hershtore, pa maje gjuhesore, në buzë të sharruara ose dy herë të sharruara. Gjethet e kërçellit pa bisht gjatore pa maje ose me maje, në bazë të ngushta të plota ose thellë të ndara gati pendore, me buzë gati të gjata ose gati të sharrzuara. Lulesa vastak i thjesht ose i përberë. Bishtat e kaptinës me qime leshtake 2—3 here më të shkurtëra se kaptina. Involukrumi i shoqet ose me qime leshtake. Lulet llapore 8—10 të shendritshme me ngjyre intenzive të verdhe, të gjera vezake të përmbysta ose të rrumbullaketa, ± të ndara në tre vriguj, shumë më të shurtëra se involukrumi. VII.

Në vende me bar të zonës alpikë.

Përhapja në Kosovë — Oshlak (Malet e Sharit).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

12. *Centaurea alberti* Rexhepi (Asteraceae)

Bime barishtore shumëvjeçare me rrenjë të furishme bosh-tore. Kërçelli i drejt, cilindrik, me qime të pakta deri 150 cm i gjatë, vetëm në pjesën e sipërme diçka i degëzuar. Çdo degë mbaron me kaptinë të rrumbullaket-vezake, të gjatë 2,6—3 cm dhe të gjerë 1,8—2,6 cm. Gjethet e poshtme janë në rozetë 10—27 cm të gjata, dy herë të ndara. Segmentet 1,5—2,5 mm të gjerë, linear. Në fund të kërçellit mbesin pjesë të gjethëve të vjetra. Në pjesën e sipërme të kërçellit gjethet janë pendore, pa bisht. Kaptinat të vetmuara (1—4), shumë rralle më tepër në bishta të gjatë. Involukrumi i rrumbullaket-vezak 1,5—2 cm i gjatë dhe 1,5—2 cm i gjerë. Gjethëzat e involukrumit të blerta-verdhake 7—10 mm të gjata me pak qime, në buzë dhe në maje të murme me shtojcë trekendore-heshtore ngjyre të zezë, nga çdo anë ka nga 10—15 qerpikë të murem të mbuluar me qime të shkurtëra. Shtojca (apendix) mbaron me një qerpik formë gjembe të gjatë deri 3 mm. Lulet të purpurta, lulet skajore nuk

janë radiale. Akeni i mbuluar me qime, me i shkurtër se xhufka, i gjatë 2,5—4 mm. Xhufka 5—6 mm e bardhe. VI—VIII.

Në vende shkembore dhe me bar të zonës kodrinore deri 1000 m lartësi mbidetare, vetëm në substrate serpentine.

Përhapja në Kosovë — Devë (Gjakovë), Golesh (Prishtinë).

Përhapja e përgjithshme — Kosovë (Ju).

PËRFUNDIM

Në bazë të hulumtimëve të gjërtanishme që kemi bërë në florën dhe vegjetacionin e Kosovës dhe literaturës përkatëse që ka të bëjë me bimësin e Kosovës, mund të konkludojmë se gjer më tani janë konstatuar 12 lloje bimore *autoktone endemike* të cilat janë të përhapura vetëm në treven e Kosovës. Këto janë: *Aconitum pentheri*, *Dianthus scardicus*, *Bornmuellera dieckii*, *Sempervivum konsanini*, *Sedum flexuosum*, *Saxifraga scardica*, *Potentilla doerfleri*, *Verbascum scardicum*, *Thymus doerfleri*, *Thymus rohlenae*, *Achillea alexandri-regis* dhe *Centaurea alberti*.

Vlera shkencore e këtyre llojeve endemike është e madhe, prandaj duhet të shpallen publikisht si bimë të rralla dhe të rëndësishme si edhe të mbrohen me ligj.

L I T E R A T U R A

Domac, R. (1973): *Mala flora Hrvatske*. Školska knjiga, Zagreb.

Diklić, N., V. Nikolić (1974, 1978, 1980): *Novi podaci o nalazištu biljnih v. u SRS*. Glasnik Prir. muzeja, Beograd.

Hayek, A. (1927—1933): *Prodromus florae Peninsulae Balcanicae*, 1—3. Berlin—Dahlem.

Hegi, G. (1906—1931): *Illustrierte Flore Mittel Europa*, Wien.

Horvat, I. (1960): *Planinska vegetacija Makedonije u svijetlu suvremenih istraživanja*. Skopje.

Horvatić, S. (1963): *Vegetacijska karta otoka Paga s općim pregledom vegetacijskih jedinica hrvatskog primorja*. Prir. istraživanja knj. 33. JAZU. Zagreb.

Horvatić, S. (1967): *Analitička Flora Jugoslavije*, I, 1. Zagreb.

Jordanov, D. (ed.) (1963—1976): *Flora NR Bulgarije*. BANU, Sofia.

Josifović, M. (ed.) (1970—1977): *Flora SRS*, 1—9. SANU, Beograd.

Meusel, H. (1943): *Vergleichende Arealkunde*. Berlin—Zehlendorf.

Nikolić, V., N. Diklić (1975, 1979, 1981): *Novi podaci o nalazištu biljnih v. u SRS*. Glasnik prir. muz. Beograd.

Pančić, J. (1874): *Flora kneževine Srbije*. Beograd.

Paparisto, K. et al. (1961): *Flora e Tiranës*. Tiranë.

Pulević, V. (1976): *Dvije nove v. roda Crocus L. iz Jugoslavije*. Glas. Rep. zavoda zaš. prir. pr. m. Titograd.

Rexhepi, F. (1977): *Nove vrste u flori Srbije i Kosova*. Glasnik prir. muzeja, ser. B. knj. 32. Beograd.

Rexhepi, F. (1979): *Nove vrste u flori Srbije i Kosova*, Biotehnika, 3—4, Prishtinë.

Rexhepi, F. (1982): *Vegjetacioni i Kosovës dikur dhe sot*. Perparimi, revistë shkencore, 2—3, Prishtinë.

Rohlena, J. (1937): *Beitrag zur Flora des Gebirges Šar planina* (Šar Dag), Vesnik kral. Češke spol. n. Praha.

Stojanov, N. et al. (1966—1967): *Flora na Balgaria*. Sofia.

Tutin, T. G. et al. (1964—1976): *Flora Europaea*, 1—4. Cambridge.

Volarić, I. (1976): *Geoelement u planinskoj flori Dinare*, Triglava i Kamešnice, Acta bot. Croatica, Zagreb.

ENDEMITI KOSOVA

dr Ferat Rexhepi

R e z i m e

Autor u ovom radu je prezentirao 12 vrsta biljaka koje su autohtone i endemične i rastu samo na području Kosova i nigde drugo. To su sledeće vrste: *Aconitum pentheri* Hay., *Dianthus scardicus* Wettst., *Bornmuellera dieckii* Degen, *Sempervivum kosanini* Praeger, *Sedum flexuosum* Wettst., *Saxifraga scardica* Gris., *Potentilla doerfleri* Wettst., *Verbascum scardicolum* Bornm., *Thymus doerfleri* Ronn, *Thymus rohlena* Vel., *Achillea alexandri regis* Bornm. et Rud., *Centaurea alberti* Rexhepi. Za svaku vrstu su date potrebne morfološke karakteristike, biološki tip, vreme cvetanja i rasprostranjenja na području Kosova koja u stvari predstavlja i opšte rasprostranjenje ovih biljaka.

Naučna vrednost ovih endemičnih vrsta je velika zbog toga treba proglasiti kao retke i značajne vrste i zaštititi zakonom.

ENDEMICS OF KOSOVA

dr Ferat Rexhepi

S u m m a r y

The autor of this work has presented 12 species of plants that are autohton and endemic which grow only in the territory of Kosova and nowhere els. These are the followin species: *Aconitum pentheri* Hay., *Dianthus scardicus* Wettst., *Bornmuellera dieckii* Degen, *Sempervivum kosanini* Praeger, *Sedum flexuosum* Wettst., *Saxifraga scardica* Gris., *Potentilla doerfleri* Wettst., *Verbascum scardicolum* Bornm., *Thymus doerfleri* Ronn, *Thymus rohlena* Vel., *Achillea alexandri regis* Bornm. et Rud., *Centaurea alberti* Rexhepi. For each species are given important morphological characteristics, biological typ, time of blooming and their distribution in the territory of Kosova, that in reality represents the whole distribution of these plants.

Scientific value of these endemic species is great, for that reason they need to be preserved proclaimed as rarities of species that are worth to be protected by law.

ENDEMIKET E BALLKANIT NË FLORËN E MALEVE TË LARTA TË KOSOVËS

Ferat Rexhepi

A b s t r a k t

Në këtë punim janë prezentuar 116 lloje (specie) bimore të njohura si »Endemiket e Ballkanit« të cilat janë të përhapura në fitocenoza të ndryshme të Maleve të larta të Kosovës. Bimet e Elementit floristik të Ballkanit janë të përhapura në territoret e vendeve Ballkanike. Këtu bëjnë pjesë një numër i madh i Endemitëve të Ballkanit të cilët kanë një përhapje të ngushtë ose të kufizuar në Sinjdhesen Ballkanike. GYMNOSPERMAE (farezhveshutat) janë prezentuar me një lloj, DYCOTYLEDONEAE (dykotiledonet-dyihelboret) me 107 lloje dhe MONOCOTYLEDONEAE (Njëkotiledonet — njëthelboret) me 8 lloje. Për çdo lloj jipen shenime të biotopit (pyje, shkurra, kullosa, livadhe) subalpike ose alpike, përhapja e tyre në Kosovë dhe përhapja e përgjithshme.

HYRJE

Sikur se edhe të gjitha vendet e Evropës Juglindore, njashtu edhe Jugosllavia përkatësisht Kosova krahasuar me vendet tjera të Evropës dallohet me mbulesë bimore të bagatshme dhe të shumëllojshme. Në lidhje me këtë duhet falenderuar jo vetëm faktorëve shumë të përshtatshëm gjeografik, relëfit, përberjes gjeologjike, kushtëve klimatike, hidrografike por, edhe zhvillimit historik të vegjetacionit të Evropës në të kaluarën e afërt gjeologjike të Tokës. Për këtë rëndësi më të madhe për zhvillimin e vegjetacionit në këto vende ka pasur epoka e pleistocenit (diluviumit). Në këtë kohë vjen deri të zbritja rapide e temperaturës dhe formimi i akullnajave të cilat ndikojnë dukshëm në florën e vjetër arko-terciare të pliocenit, më se tepërmi mu në treven e Evropës. Shtresat e trasha të akullit të kohës glaciale kanë zhdukur në përmasa të mëdha në pjesën më të madhe të Evropës së Mesme vegjetacionin e vjetër dhe të pasur të pyjeve me prejardhje arko-terciare dhe në vend të tyre jashtë shtresës ose kallotës së akullit

zhvillohen në një anë vegjetacioni arktik i tundrave (të cilin akullnajat e shtyjnë kah jugu) dhe në anën tjetër vegjetacioni alpin (të cilin akullnajat e shtyjnë në vende me lartësi më të ultë mbidetare) (S. Horvatiq, 1967).

Treva e Kosovës, Jugosllavia dhe mbar Ballkani në këtë periudhë të historisë gjeologjike kanë pasur një fat më të mirë nga se kallota e akullit i përfshin shumë pak këto vise (koha e zgjatjes së akullnajave ka qenë shumë e shkurtër dhe kallota e akullit ka qenë shumë e hollë). Prandaj nga kjo shifet se shumë lloje (specie) të vjetra terciare e përjetuan tërë epokën e pleistocenit dhe mbeten si relikte terciare deri në ditët e sotshme. Në florën dhe vegjetacionin e sotshëm të Evropës Juglindore — Ballkanit një begati të veçant dhe një vlerë të madhe shkencore paraqesin grupi i bimëve që përben »Elementin floristik të Ballkanit« përkatesisht »Endemiket e Ballkanit«.

Flora e Kosovës (pasi që Kosova zë gati pjesën qendrore të Gadishullit Ballkanit) është mjaftë e pasur me lloje endemike të Ballkanit. Sidomos Malet e larta të Kosovës janë shumë të pasura me endemik. Nga tërë flora e Malevë të larta të Kosovës (sa ka më tepër se 400 lloje) më tepër se 1/4 e tyre janë të njohura si »Endemiket e Ballkanit«.

Rezultatet e hulumtimit

Pasqyra e llojeve

GYMNOSPERMAE

1. *Pinus peuce Grsb.* Në pyje halore të zonës subalpine. Malet e Sharit, Bjeshket e Nemura. Gad. Ballkanik.

DICOTYLEDONEAE (MAGNOLIATAE)

1. *Aquilegia grata* F. Maly. Në vende me bar dhe shkëmbore të zonës subalpine. Mali Mokna. Gad. Ballkanik.
2. *Aconitum pentheri* Hay. Në vende me bar të zonës malore dhe subalpine. Zhleb. Gadishulli Ballkanik.
3. *Ranunculus incomparabilis* Janka. Në kullota alpine. Prevalc, Maja e Zezë (M. e Sharit). Gadishulli Ballkanik.
4. *Dianthus scardicus* Wettst. Në vende shkëmbore dhe me bar të zonës subalpine dhe alpine. Luboten, Prevalc (M. e Sharit). Gadishulli Ballkanik.
5. *Dianthus microlepis* Boiss. Në vende shkëmbore dhe me bar të zonës subalpine dhe alpine. Dervish Kom, Bogiçević (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

6. *Dianthus integer* Vis. Në vende shkëmbore të zonës subalpike. Oshlak, Luboten (M. e Sharit), Nexhinat, Bogiçevicë, Ploçicë (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

7. *Dianthus gracilis* S.S. Në kullota malore dhe subalpike. Novo Bërdo, Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

8. *Dianthus pancicii* Vel. Në vende me bar të zonës alpike. Nexhinat (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

9. *Minuartia baldaccii* (Hal.) Mattf. ssp. *doerfleri* Hayek. Në shkëmbinj të zonës malore dhe subalpike. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

10. *Rumex balcanicus* Rech. Në vende me lagështi të zonës subalpike. Gjeravicë (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

11. *Armeria canescens* Host. Në vende shkëmbore dhe me bar të zonës malore dhe subalpike. Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

12. *Viola gracilis* S.S. Në kullota alpike. Malet e Sharit (mbi f. Brod), Gadishulli Ballkanik.

13. *Viola grisebachina* Vis Në shkëmbinj dhe kullota subalpike dhe alpike. Maja e Rusolis (B. e Nemura), Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

14. *Viola orphanidis* Boiss. Në kullota dhe livadhe subalpike dhe alpike. Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

15. *Viola speciosa* Pant. Në shkëmbinj dhe kullota alpike. Greben, Zhleb (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

16. *Erysimum pectinatum* Bory et Chaub. Në kullota subalpike. Luboten, Koritnik, B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

17. *Barbarea balcana* Pančić. Në vende me lagështi, pranë burimeve malore dhe subalpike. Kurvala, Bistrica e Loçani (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

18. *Barbarea longirostris* Vel. Në vende me lagështirë të zonës subalpike. Dovodenica, Liqeni i Jazhincës (Malet e Sharit). Gadishulli Ballkanik.

19. *Arabis constricta* Gris. Prane burimeve alpike. Gjeravicë, Nexhinat, B. e Lumbardhit, Koprivnik. Gadishulli Ballkanik.

20. *Bornmuellera dieckii* Degen. Në kullota malore dhe subalpike në serpent. Ostrovicë. Gadishulli Ballkanik.

21. *Draba compacta* Schott. Në kullota alpike. B. e Lumbardhit, Gjeravicë (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

22. *Draba scardica* (Gris.) Deg. et Dörf. Në kullota alpike. var. *leiocarpa* O.E. Gjeravicë, B. e Lumbardhit. var. *scardica*. Dervish Kom, Maja e Rusolis, Bogiçevicë, Koprivnik (B. e Nemura), Koritnik. var. *rechingeri* O.E. Gjeravicë. Gad. Ballkanik.

23. *Draba parnassica* Boiss. et Heldr. Në shkëmbinj të zonës alpike Dervish Kom, Bogiçevicë (B. e Nemura). Gad. Ballkanik.

24. *Draba doerfleri* Wettst. Në kullota dhe shkëmbinj alpiq. Kurvala, Bogiçevicë (B. e Nemura). Gad. Ballkanik.

25. *Draba korabensis* Kümm. et Deg. Në kullota dhe shkëmbinj alpiq. Marjash, Nexhinat, Gjeravicë (B. e Nemura), Maja e Zezë, Piribreg (M. e Sharit). Gad. Ballkanik.

26. *Thlaspi microphyllum* Boiss. et Orph. Në kullota alpiqe. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

27. *Thlaspi bellidifolium* Griseb. Në kullota alpiqe. Luboten, Koritnik, Kurvala. Gadishulli Ballkanik.

28. *Thlaspi cuneifolium* Griseb. Në kullota alpiqe. Nexhinat, D. Kom, Bogiçevicë, Kurvala (B. e Nemura) Gad. Ballkanik.

29. *Euphorbia montenegrina* (Bald.) K. Maly. var. *bertiscea* Rech fil. Kurvala (B. e Nemura). Në kullota subalpiqe. G.B.

30. *Geum coccineum* S.S. Në kullota dhe vende me lagështi të zonës subalpiqe. M. e Sharit, B. e Nemura. G. Ballkanik.

31. *Geum bulgaricum* Panč. Në vende me lagështi të zonës subalpiqe. Zhleb, Koprivnik (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

32. *Geum reptans* L. Në vende shkëmbore të zonës alpiqe. Liqejt e Livadicës, Maja e Zezë. Gadishulli Ballkanik.

33. *Potentilla montenegrina* Pant. Në kullota subalpiqe. Nexhinat (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

34. *Potentilla speciosa* Willd. Në shkëmbinj dhe vende me bar të zonës subalpiqe. B. e Nemura, Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

35. *Potentilla doerfleri* Wettst. Në kullota alpiqe. Prevalc-Bistra (M. e Sharit). Gadishulli Ballkanik.

36. *Crataegus heldreichii* Boiss. Në pyje, shkurra subalpiqe. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

37. *Sempervivum kosaninii* Praeger. Në shkëmbinj gëlqeror ose serpentini të zonës subalpiqe. Bogiçevicë, Dervish Kom, Ploçicë (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

38. *Sempervivum macedonicum* Praeger. Në vende shkëmbore të zonës subalpiqe. Gjeravicë, Dervish Kom). Gad. Ballkanik.

39. *Sedum flexuosum* Wettst. Në vende shkëmbore sidomos shkëmbinj gëlqeror të zonës subalpiqe. Luboten, Oshlak (M. e Sharit). Gadishulli Ballkanik.

40. *Saxifraga sempervivum* C. Koch. Në shkëmbinj të zonës alpiqe. Gjeravicë (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

41. *Saxifraga grisebachii* Deg. et Dörf. Në shkëmbinj të zonës subalpiqe. Oshlak. Gadishulli Ballkanik.

42. *Saxifraga scardica* Gris. Në shkëmbinj të zonës alpiqe. Koritnik, Nexhinat, Koprivnik (B. e Nemura). Gad. Ballkanik.

43. *Saxifraga marginata* Sternb. Në kullota subalpiqe. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

44. *Astragalus fialae* Degen. Në shkëmbinj të zonës alpiqe. Bjeshket e Lumbardhit (B. e Nemura) Gad. Ballkanik.

45. *Trifolium wettsteinii* Dörf. Në kullota alpike. Pashtrik, Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

46. *Anthyllis aurea* Welden. Në shkëmbinj gëlqeror të zonës subalpike dhe alpike. Koritnik, Oshlak, Luboten. G. Ball.

47. *Anthyllis vitellina* Vel. Në kullota subalpike dhe alpike. Piribreg (M. e Sharit). Gadishulli Ballkanik.

48. *Genista depressa* M. Bieb. Në kullota malore, subalpike dhe alpike. M. e Sharit, B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

49. *Onobrychis scardica* (Grsb.) Hal. M. e Sharit, B. e Nemura. Në kullota subalpike dhe alpike. Gad. Ballkanik.

50. *Onobrychis pindicola* Hausskn. Në shkëmbinj të zonës subalpike. Pashtrik. Gadishulli Ballkanik.

51. *Acer heldreichii* Oprh. Në ahishte malore dhe subalpike, në pyje të arnenit, harmoqit etj. kryesisht në shkëmbinj gëlqeror. M. e Sharit, B. e Nemura. G. B.

52. *Geranium subcaulescens* Hayek. Në kullota subalpike dhe alpike. Piribreg, Shtepia e Stojkut (M. e Sharit). G. Ball.

53. *Bupleurum sibthorpiatum* S.S. Në shkëmbinj të zonës subalpike dhe alpike. Oshtro Kople. Gadishulli Ballkanik.

54. *Bupleurum karglii* Vis. Në shkëmbinj të zonës subalpike. Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

55. *Carum rupestre* Boiss. et Heldr. Në shkëmbinj të zonës subalpike. B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

56. *Pancicia serbica* Vis. Në kullota, livadhe subalpike. Oshlak Gadishulli Ballkanik.

57. *Ligusticum albanicum* Jav. Në kullota alpike. Bjeshket e Nemura, Gadishulli Ballkanik.

58. *Rhamnus orbiculatus* Bornm. Në vende shkëmbore të pyjeve morale dhe subalpike. Koritnik. Gad. Ballkanik.

59. *Gentianella crispata* (Vis.) Holub. Në kullota, pyje subalpike. Bjeshket e Nemura.

60. *Gentianella bulgarica* (Velen) Holub. var. *albanica* (Jav.) Dunjić. Në livadhe, kullota subalpike dhe alpike. B. e Lumbardhit, M. e Sharit. Gadishulli Ballkanik.

61. *Asperula doefleri* Wettst. Në vende shkëmbore të zonës alpike. Luboten, Zhleb (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

62. *Valeriana pancicii* Hal. et Bald. Në shkëmbinj të zonës subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gadish. Ballkanik.

63. *Valeriana bertisceae* Panč. Në vende shkëmbore dhe me bar të zonës subalpike dhe alpike. Koritnik. Gad. Ballk.

64. *Cephalaria pastricensis* Dörf. et Hayk. Në vende me bar, pyje, shkurra të zonës subalpike. B. e Lumbardhit, Zhleb. Gadishulli. Ballkanik.

65. *Knautia midžorensis* Form. Në livadhe, kullota, shkurra të zones subalpike. M. e Shart, B. e Nemura. Gad. Ball.

66. *Knautia dinarica* (Murb.) Borb. Në pyje, kullota, livadhe subalpike. B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

67. *Scabiosa portae* A. Kern. Në kullota të zonës malore dhe sub. alpike. M. e Sharit, Pashtrik. Gad. Ballkanik.

68. *Scabiosa crenata* Cyr. Në shkëmbinj të zonës malore dhe subalpike. Oshlak. Gadishulli Ballkanik.

69. *Verbascum scardicolum* Borm. Në kullota subalpike. Oshlak. Gadishulli Ballkanik.

70. *Verbascum nicolai* Rahl. Në livadhe të zonës malore dhe subalpike. B. e Nemura, Studenica. Gad. Ballkanik.

Verbascum baldacii Deg. Në kullota malore dhe subalpike. Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

71. *Linaria peloponnesiaca* Boiss. et Heldr. vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Bjeshket e Nemura, Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

72. *Scrophularia aestivalis* Gris. Në pyje malore dhe subalpike. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

73. *Scrophularia bosniaca* Beck. Në shkëmbinj të zonës subalpike dhe alpike. B. e Lumbardhit. Gadishulli Ballkan.

74. *Veronica satyroides* Vis. Në shkëmbinj të zonës alpike. Koritnik. Gadishulli Ballkanik.

75. *Veronica balcanica* Vel. Në kullota, shkëmbinj të zonës alpike dhe alpike. B. e Lumbardhit. Gadishulli Ballkanik.

76. *Rhinanthus asperulus* (Furb.) Soó. Në kullota subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

77. *Pedicularis brachyodonta* Schloss et Vukot. Në kullota subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

78. *Melampyrum doerfleri* Ronn. Në shkurra të zonës subalpike. Bjeshket e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

79. *Melampyrum scardicum* Wettst. Në pyje, kullota, shkurra subalpike. B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

80. *Pinguicula balcanica* Casper. Në vende me lagështi të zonës subalpike dhe alpike. M. e Sharit, B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

81. *Lamium pictum* Boiss. et Heldr. Në shkëmbinj dhe vende me bar të zonës subalpike. Koprivnik. Gad. Ballkanik.

82. *Stachys scardica* Gris. Në fitocenoza të ndryshme. E përhapur në Kosovë. Gadishulli Ballkanik.

83. *Stachys reinertii* Heldr. Në kullota, vende gurishtore të zonës subalpike dhe alpike. Nexhinat, Koprivnik (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

84. *Stachys alpina* L.ssp. *dinarica* Murb. Në kullota, shkurra, pyje të zones subalpike dhe alpike. Koritnik, B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

85. *Thymus jankae* Čel. Në shkëmbinj gëlqeror dhe serpentini të zonës malore dhe subalpike. B. e Nemura. Gad. Ball.

86. *Thymus rohlena* Vel. Në kullota të zonës malore dhe subalpike. Oshlak, Deçan. Gadishulli Ballkanik.

87. *Thymus albanus* H. Braun. Në vende të thata, kullota, shkurra, pyje harore të zonës subalpike dhe alpike. Oshlak, Koritnik, B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

88. *Thymus zygiformis* H. Braun. Në kullota dhe vende gurishtore të zonës subalpike dhe alpike. Oshlak, M. Mokna. G. B.

89. *Thymus deorfleri* Ronn. Në vende të thata, në pyje të rralla të zonës malore dhe subalpike. Koritnik. Gad. Ballkanik.

90. *Campanula foliosa* Ten. Skaj pyjeve, livadhe subalpike. Nexhinat (B. e Nemura). Gadishulli Ballkanik.

91. *Campanula albanica* Witasek. Në shkëmbinj të zonës subalpike dhe alpike. M. e Sharit. Gadishulli Ballkanik.

92. *Campanula spatulata* S.S. Në shkurra, kullota, livadhe të zonës subalpike dhe alpike. Oshlak, »Cerovački vrh.« G. B.

93. *Phyteuma pseudorbiculare* Pant. Në kullota alpike. Luboten, B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

94. *Erigeron epiroticus* (Vierh.) Hal. Në vende shkëmbore dhe me bar të zonës subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

95. *Gnaphalium roeseri* Boiss. et Heldr. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gad. Ball.

96. *Achillea abrotanoides* Vis. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Zhleb, Bistrica e Loçanit. G. B.

97. *Achillea chrysocoma* Friv. Në vende me bar të zonës subalpike dhe alpike. Luboten. Gadishulli Ballkanik.

98. *Achillea alexandri-regis* Bornm. et Rud. Në vende me bar të zonës alpike. Oshlak. Gadishulli Ballkanik.

99. *Achillea fraasii* Schultz. et Bip. Në shkëmbinj gërloror të zones subalpike. M. Mokna. Gadishulli Ballkanik.

100. *Senecio wagneri* Dég. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Oshlak, Luboten. Gadishulli Ballkanik.

101. *Senecio othonnae* M.B. Në vende me bar, pyje të zonës subalpike. Zhleb. Gadishulli Ballkanik.

102. *Amphoricarpus neumayeri* Vis. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Nexhinat (B. e Nemura) G. B.

103. *Crepis columnae* (Ten.) Fröl. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

104. *Crepis albanica* Jav. Në vende shkëmbore të zonës subalpike. M. e Lumbardhit (B. e Nemura). Gad. Ballkanik.

105. *Hieracium waldsteinii* Tausch. në vende shkëmbore të zonës subalpike. Mali Mokna, B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

106. *Hieracium gymnocephalum* Griseb. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Zhleb. Gad. Ballkanik.

107. *Hieracium gaudryi* Boiss. Në vende shkëmbore të zonës subalpike dhe alpike. Pashtrik. Gad. Ballkanik.

MONOCOTYLEDONEAE (LILIATAE)

1. *Narthecium scardicum* Košanin. Në vende më lagështi të zonës subalpike. B. e Nemura. Gad. Ballkanik.

2. *Veratrum album* L. Në livadhe, kullota, çeltira të pyjeve të zonës malore dhe subalpike. M. e Sharit, B. e Nemura. Gadishulli Ballkanik.

3. *Lilium albanicum* Gris. Në vende me bar, shpate shkëmbore të freskëta gëlqeroresh. M. e Sharit, B. e Nemura. G. B.

4. *Crocus veluchensis* Herb. Në livadhe dhe kullota të zonës subalpike dhe alpike. B. e Nemura, M. e Sharit. G. B.

5. *Sesleria latifolia* (Adam) Deg. Në livadhe, kullota të zonës malore dhe subalpike. Oshtro Kople. Gad. Balik.

6. *Sesleria comosa* Vel. Në kullota alpike në silikate. Malet e Sharit. Gadishulli Ballkanik.

7. *Poa ursina* Vel. Në kullota, shkëmbinj më lagështi të zonës alpike. Bjeshket e Nemura. Gad. Ballkanik.

8. *Festuca koritnicensis* Hay. et Vett. Në kullota subalpike dhe alpike. B. e Lumbardhit. Gadishulli Ballkanik.

L I T E R A T U R A

Domac, R. (1973): *Mala flora Hrvatske*, Školska knjiga, Zagreb.

Diklić, N., V. Nikolić (1974, 1978, 1980): *Novi podaci o nalazištu biljnih v. u SRS*, Glasnik Prir. muzeja, Beograd.

Hayek, A. (1927—1933): *Prodromus florae Peninsulae Balcanicae*, 1—3.

Hegi, G. (1906—1931): *Illustrierte Flore Mittel Europa*, Wien.

Horvat, I. (1960): *Planinska vegetacija Makedonije u svijetlu suvremenih istraživanja*, Skopje.

Horvatić, S. (1963): *Vegetacijska karta otoka Paga s općim pregledom vegetacijskih jedinica hrvatskog primorja*, Prir. istraživanja knj. 33, JAZU, Zagreb.

Horvatić, S. (1967): *Analitička Flora Jugoslavije*, I, 1, Zagreb.

Jordanov, D. (ed.) (1963—1976): *Flora NR Bulgarije*, BANU, Sofia.

Josifović, M. (ed.) (1970—1977): *Flora SRS*, 1—9, SANU, Beograd.

- Meusel, H. (1943): *Vergleichende Arealkunde*. Berlin—Zahlendorf.
- Nikolić, V., N. Diklić (1975, 1979, 1981): *Novi podaci o nalazištu biljnih v. u SRS*. Glasnik prir. muz. Beograd.
- Pančić, J. (1874): *Flora kneževine Srbije*. Beograd.
- Paparisto, K. et al. (1961): *Flora e Tiranës*. Tiranë.
- Pulević, V. (1976): *Dvije nove v. roda Crosus L. iz Jugoslavije*. Glas. Rep. zavoda zaš. prir. pr. m. Titograd.
- Rexhepi, F. (1977): *Nove vrste u flori Srbije i Kosova*. Glasnik prir. muzeja, ser. B. knj. 32. Beograd.
- Rexhepi, F. (1979): *Nove vrste u flori Srbije i Kosova*. Biotehnika, 3—4. Prishtinë.
- Rexhepi, F. (1982): *Vegjetacioni i Kosovës dikur dhe sot*. Perparimi, revistë shkencore, 2—3. Prishtinë.
- Rohlena, J. (1937): *Beitrag zur Flora des Gebirges Šar planina (Šar Dag)*. Vesnik kral. Češke spol. n. Praha.
- Stojanov, N. et al. (1966—1967): *Flora na Balgaria*. Sofia.
- Tutin, T. G. et al. (1964—1976): *Flora Europaea*, 1—4. Cambridge.

BALKANSKI ENDIMITI U VISOKOPLANINSKOJ FLORI KOSOVA

dr Ferat Rexhepi

R e z i m e

U ovom radu su navedene 116 biljnih vrsta poznate kao »Balkanski endimiti« koje su rasprostranjene na raznim zajednicama visokoplaninskog područja. Biljke Balkanskog flornog elementa su rasprostranjene na teritorijama balkanskih zemalja. Ovdje spadaju veliki broj Endimiti Balkana koji imaju uže rasprostranjenje samo na nekim delovima Balkanskog poluostrva. Iz ove grupe biljaka golosemenjače (Gymnospermae) su prezentirane sa 1 vrstom, dikotile (Dicotyledoneae) sa 107 vrsta i monokotile (Monocotyledoneae) sa 8 vrsta. Z. asvaku vrstu su dati podaci o staništu (suma, šikara, pašnjak, livada) subalpske ili alpske zone, njihovo rasprostranjenje na području Kosova kao i opšte rasprostranjenje.

BALKANIC ENDIMICS IN THE ALPIC FLORA OF KOSOVA

dr Ferat Rexhepi

S u m m a r y

In this work are presented 116 species of plants known as "Balkan endemic" that are scattered in the different families of Kosova alpic parts. Plants with Balkanic floristic elements are scattered in the territories of Balkan countries. Here we can find a great number of Balkan endemics that have limited distributions in some parts of Balkans. From this group of plants Gymnospermae are presented with one species, Dicotyledoneae with 107 species and Monocotyledoneae with 8 species. For every species there are given data about their locatin (forest, pasture, meadow) of subalpic or alpic zones, their presence in the territory of Kosova as well as their hole distribution.

FITOCENOZA QUERCETUM TROJANAE DUKAGJINI

(Rexhepi prov. 1981) Rexhepi 1983 as. nov.

Ferat Rexhepi

A b s t r a k t

Asociacioni *Quercetum trojanae* dukagjini në Kosovë si fitocenoza refugjiale dhe relikte është e ruajtur vetëm në disa lokalitete të caktuara rranzë Pashtrikut, rranzë Koritnikut, rranzë Oshlakut dhe në kompleksin e Maleve të Cernaleves në afërsi të Suharekës. Lartësia mbidetare e këtyre terreneve është prej 300 — 900 m (1000 M). Përbërja gjeologjike është nga shkëmbinjtë gëlqeror, ndërsa mbulesa padologjike në përgjithësi është tokë e kuqe (terra rosa). Fitocenoza është nën dikimin e klimës mediterane e cila vjen nëpërmes luginës së Drinit të Badh. Fitocenoza është poashtu nën ndikimin e madh antropogjen kështu që në shumë vende dushku qarraziu gati se është zhdukur. Asociacioni *Quercetum trojanae* dukagjini është mirë i diferencuar në aspektin floristik. Në përbërjen e tabelës fitocenologjike marrin pjesë 140 lloje bimë. Llojet (speciet) karakteristike të asociacionit janë:

Quercus trojana
Pirus amygdaliformis

Ruta graveolens
Acanthus balcanicus

Euphorbia myrsinites.

Asociacioni *Quercetum trojanae* dukagjini është i klasifikuar në aleancën *Ostrya — Carpinion orientalis* Horv. 1954, rendin *Quercetalia pubescentis* Br. Bl. 1931 dhe klasën *Quercus — Fagetae* Br. Bl. et Vlieger 1937.

HYRJE

Një ndër dukurit më karakteristike dhe më të rëndësishme në Vegjetacionin e Ballkanit me siguri paraqet fitocenoza e qarrazit — *Quercetum trojanae*. Në regjionin e Kosovës si fitocenoza refugjiale dhe relikte është ruajtur vetëm në disa lokalitete të caktuara rranzë Pashtrikut, rranzë Koritnikut, rranzë Oshlakut dhe në kompleksin e Maleve të Cernaleves në afërsi të Suharekës, në një lartësi mbidetare prej 300—900 m (1000 m). Në Jugosllavi kjo fitocenoza më se mirë është e zhvilluar në Galiqicë dhe në pellgun e

Treskës (Maqedoni), ndërsa gjenden edhe formacionet (grupet) hercegovase-dalmatine dhe malaziase-shkodriane. Nga kjo shifet se areali i fitocenozës *Quercetum trojanae* s. lat. është disjunkt edhe pse ekziston lidhje floro-gjenetike (Horvat, 1959). Ngjajshmeria floristike e të gjitha regjioneve ku gjendet kjo fitocenoze ekziston, por ka edhe dallime të qarta floristike dhe ekologjike, andaj janë të paraqitura disa varienta gjeografike të cilat edhe merren si fitocenoza të posaqme.

REZULTATET E HULUMTIMIT

Përbërja floristike e asociacionit *Quercetum trojanae* duka-gjini shifet nga tabela fitocenologjike e përberë prej 14 rilevimëve (sipërfaqeve provë) fitocenologjike rranzë Oshlakut, Pashtrikut dhe Koritnikut (Reçani, Planej, Mazrek, Vlashnjë, Vermice) Llojet (speciet) karakteristike të asociacionit janë:

Quercus trojana
Pirus amygdaliformis
Ruta graveolens

Acanthus balcanicus
Euphorbia myrsinites

* ***Quercus trojana* Webb.** (= *Q. macedonica* DC). qarrazi (bulgër). Dru deri 16 (18 m i lartë. Llapa e gjethës përsipër e shkëlqyeshme dhe e shogët, në anën e poshtme pa ose me qimë të pakta, mbi $2\frac{1}{2}$ herë më e gjatë së e gjerë, më bisht të shkurtë deri 8 mm të gjatë, 4—6 (9) $\times$ 1,5—2,5 (3,5) cm e madhë, më dhëmb të ngjajshem me ata të gështenjës. Mellugat e mesit të gishtjes deri 3 mm të gjata. I shpeshtë në vende me klime mesdhetare sidomos detare ku njifet si një ndër dushqet më të përhapura të tokave të thata. Lul. IV—V, frut. X.

Atëdheu i qarraziut është Gadishulli Ballkanik, Anadoll, Italia Jugore. Në Jugosllavi është i përhapur në : Kosovë (Dukagjin), Maqedoni, Hercegovinë, Dalmaci, Mal të Zi (sidomos regjioni i Liqenit të Shkodrës) dhe bregdeti Malazez. Diku edhe kultivo het si bimë dekorative. Ka disa varietete (undullata, *macrophyllous ovata*). Qarrziu është i përshtatur klimës mediterane, ndërsa në Kosovë klimës submediterane të zonës kodrinore 300—900 m (1000 m) lartësi mbidetare. Është bimë kseroforme dhe kalçifile mjaftë e qendrueshme thatësisë verore, por i qendron edhe temperatureve të ulta dimërore. Rritet në vende shkëmbore (shkëmbinjtë gëlqeror), në toka të cekta të pasura më humus me bonitet të dobët. Formon pyje ose shkurre të tipit të hapur ose pyje të shendritshme kseroforme, të degraduara, të rralla ose mund të jetë sekundare në grupe të vogla ose e vetmuar.

Në Kosovë qarraziut është i përhapur në rranzë të Pashtrikut (Planej, Gorozhup, Vlashnjë, Mazrek), rranzë Koritnikut (Zhur,

Shkoza, Vermicë), pastaj rranzë Oshlakut (Reçani, Sredska) dhe më pakicë si bimë e vetmuar ose në grupe të vogla gjendet edhe në afërsi të Suharekës. Këto janë lokalitetet në të cilat është konstatuar gjer më tani qarraziu në të cilat përveç lokalitetit të fundit qarraziu formon fitocenozën e vet të cilën e kemi quajtur *Quercetum trojanae dukagjini*.

***Pirus amygdaliformis* Vill.-gorricë.** Dru i shkurtër ose shkurrë e qendrueshme ndaj të thatit, specie termofile e përhapur në Mediteran.

***Ruta graveolens* L. ruza.** Bimë gjysemshkurrë kserotermofile e përhapur në Ballkan dhe Itali.

***Acanthus balcanicus* Heyw. et Rich.** dashtira balkanike. Bimë barishtore shumëvjeçare e përhapur në terrene të thata në Ister dhe Sijdhesën Ballkanike.

***Euphorbia myrsinites* L.-qumshtore mërsinë.** Bimë barishtore shumëvjeçare e shoget e përhapur në vende më shkëmbinjtë gëlqeror në Mediteranin prendimor, Sijdhesën Ballkanike dhe Azinë e Vogël.

Asociacioni është shumë mirë i diferencuar me përberje floristike. Në përbërjen e tabelës fitocenologjike marrain pjesë 140 lloje. Llojet karakteristike të asociacionit dhe një numër i konsiderueshem i grupit karakteristik janë të lidhura kryesisht në këtë fitocenoze. Në bazë të literaturës për fitocenozat e Pyjeve në regjionin e Kosovës, Sërbisë, Maqedonisë dhe Jugosllavisë, nga lokalitetet e përmendura dhe në këtë përbërje floristike nuk është e njohur gjer më tani një fitocenoze e tillë. Prandaj mund të konstatojmë se pylli i qarraziut *Quercetum trojanae dukagjini* Rexhepi, 1983) është asociacion i ri nga alenca Ostryo — *Carpinion orientalis* Horv. 1954.

Aleanca është mire e prezentuar. Me konstancë të lartë janë prezente këto lloje: *Acer monspessulanum*, *Colutea arborescens*, *Cyclamen hederifolia*.

Rendi *Quercetalia pubescentis* Br. Bl. 1931 dhe klasa *Querco* — *Fagetea* Br. Bl. et Vlieger 1937., gjithashtu janë mirë të përfaqësuar.

Bazuar në ndryshimet floristike dhe ekologjike asociacioni *Quercetum trojanae dukagjini* ndahet në dy subasociacione: *Quercetum trojanae dukagjini salvietosum* dhe *Quercetum trojanae dukagjini teucrietosum*. Të dyja këto subasociacione poashtu janë të reja.

Subasociacioni Q. t. d. *salvietosum* zhvillohet rranzë Oshlakut mbi fshatin Reçani në një lartësi mbidetare mbi 700 m. Individumet e këtij subasociacioni paraqesin një refugium tipik të asociacionit *Quercetum trojanae dukagjini* të ruajtur mirë në një gji të nxehtë në luginën e Bistricës së Prizrenit. Llojet diferenciale të subasociacionit Q. t. d. *salvietosum* janë:

Salvia ringens var. *ringens*
Danaa cornubiensis
Laser trilobum

***Salvia ringens* Sibth. et Sm. var. *ringens*.**-Sherbela kurorhapur. Bimë gjysmeshkurrë e përhapur në Gadishullin Balkanik dhe Azinë e Vogël. Varieteti *ringens* gjer më tani nuk është konstatuar në terren.

***Danaa cornubiensis* (Turn. Burn. farëfryra kornubiense.**

Bimë barishtore shumëvjeçare që rritet në pyje, shkurre livadhe etj. Është e përhapur në Evropën Jugore, përndryshe është bimë mediterane.

***Laser trilobum* (L.) Borkh.-Lazerpica mashkull.** Bimë barishtore shumëvjeçare e përhapur në Evropë, Azinë e Vogël, Siri, Jerمني, Kaukaz, Persi.

Subasociacioni Q. t. d. *teucrietosum* zhvillohet në një diapazon më të gjerë rranzë Pashtrikut dhe Koritnikut në afersi të Drinit të Bardh në një lartësi mbidetare më të vogël se subasociacioni i parë. Llojet diferenciale janë:

Crataegus laciniata
Pistacia terebinthus
Scutellaria orientalis

Teucrium polium
Anemone apennina
Asphodeline lutea

***Crataegus laciniata* Ucria (C. *orientalis* Pall.).** Murrizi i lindjes. Shkurrë ose dru termofil i përhapur në vende të thata të Ballkanit (Kosovë, Maqedoni, Bullgari, Greqi), Azi të Vogël, Krim dhe Kaukaz.

***Pistacia terebinthus* L.** bafra, rrua Shkurrë kalcifile, heliofite e përhapur prej Ujdhesave Kanarinë — në tërë Mediteranin e deri në Azi të Vogël. Në Sërbi vetëm në Kosovë dhe Preshevë.

***Teucrium polium* L.** Bar majasëlli. Bimë barishtore shumëvjeçare me aromë të këndshme e përhapur në Evropën Jugore, Azinë e Vogël dhe Afrikën Veriore.

***Anemone apennina* L.** Anemone e Apenineve. Bimë barishtore shumëvjeçare e përhapur në Siujshesën Ballkanike përveç Greqisë.

***Scutellaria orientalis* L. var. *pinnatifida* Rchb.** Skutellaria e lindjes.

***Asphodeline lutea* (L.) Rchb.** Bimë barishtore shumëvjeçare e përhapur në Mediteran. Në Sërbi ende nuk është konstatuar në terren.

KUSHTET EKOLOGJIKE DHE ZHVILLIMI I FITOCENAZËS QUERCETUM TROJANAE DUKAGJINI

Lokalitetet ku zhvillohet kjo fitocenoza janë nën ndikimin e klimës mediterane, e cila depërton nëpërmes të luginës së Drinit të Bardh. Për këtë është e mundur që në këto vende kontinentale të jenë prezente një numër i madh i llojeve mediterane dhe sub-mediterane, p. sh.: *Quercus trojana*, *Pirus amygdali formis*, *Pistacia terebinthus*, *Asphodeline lutea*, *Colutea arborescens*, *Coronilla emeroides*, *Teucrium polium*, *Euphorbia myrsinites*, *Convolvulus altaeoides*, *Scutellaria orientalis*, *Sesleria autumnalis*, *Muscari botryoides*, *Filago germanica*, *Ziziphora capitata*, *Coronilla scorpioides* etj, etj. Përbërja gjeologjike e terreneve ku zhvillohet fitocenoza *Quercetum trojanae* dukagjini është e përbërë nga shkëmbinjtë gëlqeror, ndërsa mbulesa pedologjike kryesisht është tokë e kuqe (terra rosa). Vendet ku është e përhapur fitocenoza *Quercetum trojanae* dukagjini janë më të nxehtat në tërë regjionin e Kosovës me temperature mesatare vjetore + 12°C.

Gjendja reale e fitocenoza *Quercetum trojanae* dukagjini në terren gati se është mizore. Fitocenoza është nën ndikimin e madh antropogjen, kështu që në shumë vende qarraziu gati se është zhdukur, andaj vjen në shprehje shkoza (*Carpinus orientalis*) ose ndonjë dru tjetër. Nga veprimi antropogjen (me siguri nga se terreni është i papershtatshëm për eksploatim) është i rujtur sub-asociacioni *Q. t. d. salvietosum* rransë Oshlakut ku edhe pylli zhvillohet normalisht prandaj këtu dominues dhe edifikator kryesor është qarraziu (*Quercus trojana*), ndërsa drut tjere janë pak të zhvilluar.

Nga se fitocenoza *Quercetum trojanae* dukagjini paraqet një asociacion refugjial dhe relik të përhapur vetëm në disa lokalitete të Kosovës, përndryshe shumë e rrallë në Ballkan dhe në tërë botën. Propozoi që të shpallet fitocenoza e rrallë dhe interesante dhe të mbrohet me ligj.

PËRFUNDIM

Vegjetacioni i pyllit termofil që është i përhapur rranzë Pashtrikut, Koritrikut dhe Oshlakut zhvillohet në toka të cekë të kuqe (terra rosa) në shkëmbinj gëlqergr. Ky vegjetacion me karakter submediteran, refugjial dhe relik i takon një asociacioni të veçant të cilin autori e përshkruan me emrin *Quercetum trojanae* dukagjini Rexhepi 1983 as. nov. Kjo fitocenoza e pyllit në këtë përbërje floristike gjër më tani është e njohur vetëm nga ky regjion. Asociacioni *Quercetum trojanae* dukagjini i takon aleancesë submediterane *Ostryo — Carpinion orientalis* Horv. 1954., rendit submediteran *Quercetalia pubescentis* Br. Bl. 1931. dhe klasës *Quercu — Fagetea* Br. Bl. et Vlieger 1937.

L I T E R A T U R A

- Hayek, A. (1927—1933): *Prodrömus Florae peninsulae Balcanicae*. Berlin—Dahlem.
- Horvat, I. (1949): *Nauka o biljnim zajednicama*. Zagreb.
- Horvat, I. (1959): Sistematski odnosi termofilnih hrastovih i borovih šuma Jugoistočne Evrope. *Biloški Glasnik*, 12. Zagreb.
- Horvat, I. (1963): *Šumske zajednice Jugoslavije*. Zagreb.
- Horvat, I., V. Glavač, H. Ellenberg, (1974): *Vegetation Südeuropas*. Gustav Fischer Verlag—Stuttgart.
- Horvatić, S. (1963): *Vegetacijska karta otoka Paga s općim pregledom vegetacijskih jedinica Hrvatskog primorja*. Acta bot. croatica, IV. Zagreb.
- Jordanov, D. (ed.) (1963—1976): *Flora Republicae Popularis Bulgariae*. BAN, Sofia.
- Josifović, M. (ed.) (1970—1977): *Flora SR Srbije*, 1—9, SANU. Beograd.
- Jovanović, B. (1955): *Šumske fitocenoze i stanište Suve planine*. SAN, Zbornik radova k. 6, Beograd.
- Krasniqi, F. (1972): *Šumska vegetacija brdskog regiona Kosova*. Priština.
- Rexhepi, F. (1979): *Ekološke prilike i razvoj zajednice Echinario — Convolvulium altheaeoides na Kosovu*. Drugi kongres ekologe Jugoslavije, Zagreb.
- Rexhepi, F. (1982): *Vegjetacioni i Kosovës dikur dhe sot*. Përparimi nr. tiskare, Zagreb.
- Rudski, I. (1936): *O vegetaciji planine Ošljaka*. Tisak nadbiskupske 2—3. Prištine.
- Stefanović, V. (1977): *Fitocenologija*. IGKRO "Svetlost" OOUR zavod za udžbenjke, Sarajevo.

FITOCENOZA QUERCETUM TROJANAE DUKAGJINI

Ferat Rexhepi

R e z i m e

U ovom radu autor nam prezentira jednu novu asocijaciju termofilnih hrastovih šuma koju je nazvao Quercetum trojanae dukagjini. Ova refugijalna i reliktna zajednica sačuvala se samo na nekoliko lokaliteta na podnožju Paštrika, Koritnjaka, Ošljaka i u kompleksu Crnoljevo planine u blizini Suhe Reke. Nadmorska visina ovih terena je 300—900 m (1000 m), geološki sastav je od krečnjaka a zemljište je crvenica (terra rosa) na krečnjaku. Zajednica se razvija pod uticajem mediteranske klime koja dolazi dolinom Belog Drima. Fitocenoza je takođe pod velikim uticajem antropogenog faktora tako da je makedonski hrast (Quercus trojana) skoro uništen na nekim mestima. Asocijacija je dobro karakterizirana svojim svojstvenim vrstama. U sastav fitocenološke tabele (vidi tabelu) ulaze 140 vrsta biljaka. Karakteristične vrste asocijacije su:

Quercus trojana

Pirus amygdaliformis

Ruta graveolens

Acanthus balcanicus

Euphorbia myrsinites

Asocijacija (fitocenoza) *Quercetum trojanae dukagjini* pripada svezi Ostryo — *Carpinion orientalis* Horv. 1954., redu *Quercetalia pubescentis* Br. Bl. 1931., i razredu *Querco-Fagetae* Br. Bl. et Vlieger 1937.

Na osnovu florističke i ekološke razlike koje se izražavaju na pojedinim terenima zajednica *Quercetum trojanae dukagjini* raščlanjuje se na dve subasocijacije:

Quercetum trojanae dukagjini salvietosum i
Quercetum trojanae dukagjini teucrietosum.

ASSOCIATION (FITOCENOZA) QUERCETUM TROJANAE DUKAGJINI

Ferat Rexhepi

Résumé

Dans cet ouvrage l'auteur nous présente une nouvelle association des forêts de chênes thermophiles dite *Quercetum trojanae dukagjini*. Cette association réfugiale et rélique ne s'est conservée que dans quelques localités au pied des montagnes de Pashtrik, de Koritnjak d'Oshlak et dans la complexité de la montagne de Crnalevo à proximité de Suharekë. L'altitude de ces terrains est entre 300—900 m (1000 m). La substance géologique est de matière calcaire trandi que la terre est rouge (terra rosa) dans les rochers de calcaire. L'association se développe sous l'influence du climat Méditerranéen qui pénètre par la vallée du Drint Bardh et c'est par là que la fitocenose est sous une grande influence du facteur antropogene de sorte que *Quercus trojana* est presque éliminé dans certains endroits. Cette association est bien caractérisée par ses propres espèces. Dans la composition du tableau phytocénologique (voir le tableau) figurent 140 espèces de plantes. Les espèces caractéristiques des association sont:

Quercus trojana
Pirus amygdaliformis

Ruta graveolens
Acanthus balcanicus

Euphorbia myrsinites.

L'association (fitocenoza) *Quercetum trojanae dukagjini* appartient l' Alliance Ostryo — *Carpinion orientalis* Horv. 1954., l'ordre *Quercetalia pubescentis* Br. Bl. 1931 et la classe de *Querco — Fagetae* Br. Bl. et Vlieger 1937.

Suivant la différence floristique et écologique qui se manifestent dans certains terrains l'association *Quercetum trojanae dukagjini* se divise en deux Sous-association:

Quercetum trojanae dukagjini salvietosum et
Quercetum trojanae dukagjini teucrietosum.

Tabela fitocenologjike Asociacioni: Quercetum trojanae dukagjini (Rexhepi prov. 1981) Rexhepi 1983 as. nov.														
Lokaliteti:	Reçani	Reçani	Reçani	Pashtrik	Mazrek	Planej	Planej	Vlashnjë	Mazrek	Planej	Planej	Vlashnjë	Vlashnjë	Vermicë
Lartësia mbidetare:	700	750	800	870	650	800	620	600	530	700	740	460	500	300
Ekspozicioni:	S	SE	S	SE	S	SE	S	E	E	SE	E	SE	SE	E
Inklinacioni:	25	45	50	15	25	10	20	25	15	20	10	45	30	25
Përberja gjeologjike:	Shkëmbinj gëlqeror													
Numri i rlevimëve:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Subasociacionet:	Salvietosum			teucrietosus										
Llojet karakteristike të as.:														
Quercus trojana	5.5	5.4	3.2	5.5	5.4	4.4	4.4	4.4	4.4	3.2	4.3	5.3	2.2	4.4
Pirus amygdaliformis	.	+2	.	+2	.	.	+2	.	+2	.	.	+	+	.
Ruta graveolens	1.2	+2	1.2	.	1.2	.	.	.	+2	+2	.	+2	.	.
Acanthus balcanicus	.	2.2	+2	+2	.	1.2	.	1.2	.	.	+2	.	.	+2
Euphorbia myrsinites	+2	+2	+2	.	.	+2	.	+2	.	+2	.	.	+2	.
Ostrya — Carpinoin orientalis:														
Acer monspessulanum	+	.	.	1.2	+2	1.2	1.2	1.2	.	1.2	.	.	1.2	1.2
Ostrya carpinifolia	.	.	1.1	1.2	.	.	.	.	.	1.1	+2	+2	.	.
Colutea arborescens	+2	+2	.	+2	+2	+2	.	+2	+	.	.	.	+2	+2
Carpinus orientalis	.	.	.	.	.	+2	1.2	1.2	2.2	+2	+2	.	.	+2
Coronilla emeroides	.	+	.	.	+2	.	+2	.	.	+2	+2	+2	.	.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>Juniperus oxycedrus</i>	+2	+2	1.2	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Occlamen hederibalia</i>	.	.	.	.	+2	.	+2	1.2	2.2	2.2	2.2	+2	.	.
<i>Sesleria autumnalis</i>	.	.	.	.	1.2	.	1.2	.	1.2	.	.	.	.	.
<i>Vicia grandiflora</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Quercetalia pubescentis:														
<i>Quercus pubescens</i>	1.2	+2	+2	1.2	1.2	.	1.2	+	1.2	1.2	+2	+2	+2	.
<i>Quercus cerris</i>	1.1	+2	.	.	.	+2	+2	1.2	1.2	1.1	1.2	+	.	+
<i>Pirus piraster</i>	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.
<i>Cornus mas</i>	.	.	.	+2	.	+2	.	+2	+2	.	+2	+	.	1.2
<i>Cotinus coggygia</i>	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1.2	+2	.	.
<i>Sorbus domestica</i>	.	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.
<i>Viola odorata</i>	.	.	+2	.	.	.	+2	+2	+2	.	+2	.	.	+2
<i>Chrysanthemum corymbosum</i>	.	+2	+2	+	.	.	+2	.	.	.	.	+	.	.
<i>Lithospermum purpureum</i>	.	+2	+2	.	.	.	.	+	.	.	+	+	.	.
<i>Trifolium alpestre</i>	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	+
<i>Clinopodium vulgare</i>	.	+	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.
<i>Campanula persicifolia</i>	.	+	.	+	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.
<i>Silene nemoralis</i>	+	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	+	.
<i>Cynanchum vincetoxicum</i>	.	+	.	.	+	.	.	+	.	+	.	.	.	.
<i>Polygonatum officinale</i>	+2	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.
<i>Silene nutans</i>	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	+
<i>Cephalanthera rubra</i>	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Genista ovata</i>	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
Quercus — Fagetea:														
<i>Fraxinus ornus</i>	+2	.	+2	+2	.	+2	+2	+2	+2	.	+2	+	+	+2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>Rosa canina</i>	.	+	.	.	.	+2	.	.	+2	.	.	+2	+2	.
<i>Crataegus monogyna</i>	.	.	+2	.	+2	.	.	+	.	.	+2	.	+	.
<i>Malus silvestris</i>	1.1	.	.	1.1	.	.	1.1	.	.	.	.	1.1	.	+
<i>Crataegus pentagyna</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	+	.	.	.	+
<i>Clematis vitalba</i>	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	+2	.	.	.
<i>Ligustrum vulgare</i>	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	+	.	.
<i>Lonicera caprifolium</i>	.	.	.	+	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.
<i>Hedera helix</i>	.	.	.	.	+	.	+	.	+	.	.	.	.	.
<i>Corylus avellana</i>	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.	.	.	.	.	.
<i>Cornus sanguinea</i>	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	.	.	.	+2
<i>Prunus spinosa</i>	.	.	+	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	.
<i>Acer campestre</i>	.	.	.	+2	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Corylus colurna</i>	.	.	.	+2	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.
<i>Sorbus torminalis</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1.1	.
<i>Helleborus odorus</i>	+2	.	.	.	+	.	.	+	.	+	.	+2	.	+2
<i>Primula acaulis</i>	.	.	+2	.	.	.	+	.	.	.	.	+	+	.
<i>Geum urbanum</i>	.	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	+	.
<i>Lathyrus venetus</i>	.	+	.	+	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.
<i>Poa nemoralis</i>	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.
<i>Campanula trachelium</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Brachypodium silvaticum</i>	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	.	.
Speciiet diferenciale të subasociacioneve:														
<i>Salvia ringens</i> var. <i>ringens</i>	2.2	2.2	2.2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Danaea cornubiensis</i>	+2	+2	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Laser trilobum</i>	+2	+2	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Pistacia terebinthus</i>	.	.	.	+2	.	+2	+2	.	+2	.	+2	+2	.	+2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>Crataegus laciniata</i>	.	.	.	.	+	.	+2	.	+2	.	.	+2	+2	.
<i>Teucrium polium</i>	.	.	.	+2	2.2	2.2	.	+2	+2	+	.	.	+2	+2
<i>Anemone apennina</i>	.	.	.	.	+2	.	.	1.2	2.2	.	1.2	.	+2	.
<i>Asphodeline lutea</i>	.	.	.	2.2	.	.	2.2	.	.	2.2	.	.	.	.
<i>Scutellaria orientalis</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+2	+2	1.2
Llojet shoqeruese:														
<i>Prunus avium</i>	.	.	1.1	.	.	.	1.1	.	.	.	+	.	.	.
<i>Ulmus campestris</i>	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.	.	.	.
<i>Juniperus communis</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	+2	.	.	+2	.	.
<i>Evonymus verrucosa</i>	.	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	.	.	+2
<i>Acer tataricum</i>	.	.	.	.	.	.	.	+2	.	.	+2	.	.	.
<i>Quercus brainetto</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+2	.
<i>Sanguisorba muricata</i>	+2	+2	+	.	+2	.	+2	.	+2	.	+	+2	+	.
<i>Fragaria vesca</i>	+2	.	.	+2	.	+	+	.	+2	.	+2	.	+2	2.2
<i>Stachys scardica</i>	+	+	.	+	.	+	.	+	.	.	.	+	.	+
<i>Teucrium chamaedrys</i>	+2	.	+2	.	.	.	2.2	+	.	+2	.	+2	.	.
<i>Galium gerandj</i>	+2	+2	+2	.	.	.	+2	.	.	+2	.	.	.	.
<i>Origanum vulgare</i>	.	+	.	.	.	+	.	.	.	+	.	+	+	.
<i>Potentilla micrantha</i>	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.	.	+2	.	+2	.
<i>Mercurialis perennis</i>	+2	.	+2	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.
<i>Linaria vulgaris</i>	.	+	.	+	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.
<i>Cynanchum nivale</i>	+	.	+	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.
<i>Cirsium lanceolatum</i>	+	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Lotus corniculatus</i>	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	+
<i>Arenaria agrimonoides</i>	.	.	+	.	.	.	+	.	.	+	.	+	.	.
<i>Digitalis lanata</i>	.	+	.	.	.	+	.	.	+	.	.	+	.	.
<i>Symphytum tuberosum</i>	.	+	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	+	.
<i>Centaurea micrantha</i>	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.	+2	.	.	.	.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>Pteridium aquilinum</i>	.	+2	+2	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Calamintha alpina</i>	.	+2	.	+2	.	+2	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Teucrium montanum</i>	+2	.	.	.	+2	.	.	.	+2	.	.	.	.	.
<i>Sedum acre</i>	.	+2	.	+2	.	.	+2	.	.	.	.	.	.	.
<i>Inula oculis-christi</i>	+2	.	.	.	+2	.	.	.	.	+2	.	.	.	.
<i>Convolvulus altaeoides</i>	.	.	.	+2	.	+2	.	.	+2	.	.	.	.	.
<i>Cytisus</i> sp.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.
<i>Poa bulbosa</i>	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.
<i>Helianthemum nummularium</i>	.	+	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Hypericum barbatum</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.
<i>Dactylis glomerata</i>	.	.	.	+	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.
<i>Geranium molle</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+
<i>Crocus veluchensis</i>	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.
<i>Myosotis stricta</i>	.	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	+	+
<i>Galium aparine</i>	.	.	+	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.
<i>Veronica chamaedrys</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.
<i>Coronilla scorpioides</i>	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	+
<i>Thymus</i> sp.	.	.	.	+2	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	.
<i>Verbascum banaticum</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	+2
<i>Stachys recta</i>	+	.	.	.	+2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Artemisia camphorata</i>	.	.	.	+2	.	+2	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Bromus squarrosus</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Thlaspi perfoliatum</i>	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.
<i>Helianthemum salicifolium</i>	.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Hieracium pilosella</i>	.	.	+	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
<i>Potentilla detomasi</i>	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
<i>Muscari racemosum</i>	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>Lamium purpureum</i>	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.

	1	2	3	4	5	6	7	7	9	10	11	12	13	14
Muscari botryoides	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.
Aristolochia pallida	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.
Ajuga chia	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.
Valerianella coronata	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.
Trifolium montanum	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	.
Bellis perennis	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+
Verbascum nigrum	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.
Silene vulgaris	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.
Leontodon asper	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+
Inula ensifolia	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.
Ziziphora capitata	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.
Stachys germanica	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
Trifolium campestre	.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.
Isopyrum talicroides	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.
Ceterach officinarum	.	.	.	.	.	.	.	.	+.2	.	.	.	.	.
Trifolium pignanti	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+.2	.	.
Melica uniflora	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Arum maculatum	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
Euphorbia cyparissias	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
Viola alba	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.
Orlaya grandiflora	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.
Nigella damascena	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.
Filago germanica	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.
Ajuga laxmani	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
Erodium cicutarium	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
Glechoma hirsuta	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
Arum nigrum	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+

GJEOGRAFI — GEOGRAFIJA

RRAFSHINA E MILLANOVIQIT NË HORSTIN E DUKAGJINIT

Ibrahim Ahmetaj

A b s t r a k t

Në pjesën lindore të Gropës së Dukagjinit shtrihen malet e Horst të Dukagjinit: Grebniku (732 m), Kozniku (1006 m), Mali i Zatriqit (1039 m), Shpati (902 m), Gajarku (796 m) dhe Mali i Millanoviçit (883 m). Më i larti prej tyre është Mali i Zatriqit më të Koznikut në pjesën qendrore, e më i madhi Mali i Millanoviçit në pjesën jugore të Horstit. Edhe pse paraqesin një tersi morfotektonike të rrethuar me bazena të cilët ndertojnë Gropën e Dukagjinit (të Mirushes në verilindje dhe lindje, të Pejës dhe Klinës në veripërendim dhe perëndim dhe të Rahovecit e të Suharekës në jug dhe juglindje) të mbushuara me sedimente liqenore, këto male janë mirë të diferencuara njena prej tjetres me luginat relativisht të thella, dhe në to paraqiten forma morfologjike të rëndësishme për kah madhësia, gjeneza, evolucini e veçorit tjera. Në këtë punim do të trtajtojm Rrafshinën e Millanoviçit, që hyn në grupin e formave më të rëndësishme në Horst, e paraqitet gadi në të gjitha këto male, por më e ruajtur dhe më karakteristike është, si dhe shtrirje më të madhe ka në Malin e Millanoviçit, për se dhe i kemi dhanë emrin e këtijë mali.

SHTRIRJA MADHESIA DHE NDERTIMI GJEOLGJIK

Si tham kjo rrafshinë është karakteristike për Malin e Millanoviçit, ku paraqet formen më të rëndësishme morfologjike, dhe për këtë studimet e sajë i kemi përqendruar krysisht në këtë mal. Nderton pjestë më të larta të këtijë mali, i cili kah jugu dhe perëndimi zbret në Basenin e Rahovecit dhe të Suharekës, nga lindja dhe veriu e rrethon dhe e ndan nga Mali Gajak dhe Shpat luginat e Lumit të Semetishtës, kurse në veripërendim nepërmas të pjëndarsit të cekët të Lumit të Semetishtës dhe të Rëmnikut lidhet me Malin e Zatriqit. Rrafshina në flajë ka lart. absolute 780—880 m nga e cila ngriten majet më të larta të maleve. Në pjesën veripërendimore të Malit të Millanoviçit shtrihet rreth majeve: Troje (852 m), të

Zanagës (883 m), të Bajrakut (852 m) etj, e në pjesen juglindore rreth majës Gumnishtë (810 m) dhe majës pa emër. Kah veripërendimi vazhdon me sipërfaqe valëzuese në Malin Shpat dhe me dy pjesë të ngushta në Malin e Zatriqit, kurse kah lindja në pjesen juglindore të Malit Gajrak. Kjo rrafshinë zbret kryesisht vertikalisht, afro 100 m në rrafshet e Nivelit eroziv më të ulët, i cili paraqet gjithashtu formë të rëndësishme erozive në Horstin e Dukagjinit. Në pjesen veripërendimore të Malit të Millanoviq është e gjerë dhe e gjatë rreth 4 km, në pjesen juglindore e gjatë 3 km e në Malin Gajrak 2 km, në Malin Shpat 1.5 km e në Malin Zatriq e gjerë rreth 1,5 km. Tham se nderton pjestë më të larta të Malit të Millanoviqit, çka vlen edhe për Malin Gajrak dhe Shpat, kurse nderton vetem pjestë lindore të Malit të Zatriqit, në të cilën zbret Rrafshina e Zatriqit. Si shihet kjo rrafshinë është e ndarë në gjashtë pjesë të veçanta: në Malin e Millanoviqit paraqitet më dy pjesë të mëdha, në Malin Gajrak dhe Shpat me nga një dhe në Malin Zatriq me dy pjesë të vogla.

Rrafshina e Millanoviqit paraqitet vetem në shkëmbinjet karbonatik të kretakut të epërm, të përbërë nga gelqerorët shtresorë, stomik e më pak masiv e rrasorë dhe dolomitik. Këto formacione në Malin e Millanoviqit, në Gajrak dhe Shpat janë rrudhosur në rru-dha më amplituda të vëll, kurse në Malin Zatriq mbihypen me serpentinit. Kan shtrirje VP-JL, e rreth kah veriu dhe verilindja më kënd 18—28°. Tektonika radiale në ta ka ushtruar ndikim më të madhe se ajo horizontale (tangenciale) në të cilat ka krijuar shkarje dislokative, me shtrirje të madhe për gjatë të cilave lumënjet kan trasue rrjedhet e vata-sig është Lumi i Semetishtës, dhe shkarje lokale të shumta të cilat kan shërbye për trasimin e rrjedhjeve të vogla-si është prroni i Karavanserisë etj. Diaklazit në kombinim me diastromat e brahiklazit janë via kryesore përgjatë të cilave në këtë rrafshinë është zhvilluar procesi karstik intensiv, dhe janë krijuar dukuri të shumta e interesante morfologjike, të cilat rrafshinës i kan dhënë veçori karstike.

VEÇORITË MORFOLOGJIKE

Rrafshina në fjalë është ruajtur vetem në shkëmbinjët karbonatik (gelqerorë), në të cilat veprimi i denudacionit dhe shpërlarjes është minimal, e erozioni fluvial është zëvendësuar shpejt me erozion karstik. Këto dy erozione kanë shkaktuar ndryshime të mëdha morfologjike në këtë formë të gjerë, por të vështirë për rekonstruim. Për të njohur më mirë veçoritë morfologjike dhe shkallën e modifikimit të kësaj forme relievore, do të trajtojmë shkurtimisht, veç e veç pjestë e sajë ashtu si paraqiten në terren, dhe dukuritë morfologjike në to.

Rrafshina e Millanoviçit në Malin e Millanoviçit

Si tham me parë kjo rrafshinë është ruajtur masmiri dhe më e gjerë është në këtë mal për se dhe i kemi dhënë emrin: Rrafshina e Millanoviçit. Në këtë mal ajo ndahet nga lugina karstike »Lugu i Fushës« në dy pjesë: në pjesën vepripërendimore dhe juglindore. Lugina e Fushës ka shtrirje VL-JP dhe në verilindje vazhdon në luginën e Prronit të Millanoviçit, kurse në të më proces karstik është formuar lugu karstik me të njëjtin emen.

Pjesa veripërendimore. — në të gjitha anët zbret gadi vertikalisht në pjestë e nivelit më të ulët në të cilin në veri dhe verilindje është pre rrjedhja e epërme e Lumit të Semetishtës, në juglindje prroni i Fushës, në përendim Rimmiku etj. Prerja që i ndanë këto dy njësi morfologjike është ndryshue dhe disecue, më veprimin e rrjedhjeve të përhershme, të cilat në të kanë pre luginat të ngushta dhe relativisht të thella. Nga kjo pjesë e rrafshinës ngriten majet më të larta të Malit të Millanoviçit, të cilat janë rrumbullaksuar më procese erozive në formë kupash (Maja e Zatriçit, Maja e Veliut, Troje, Maja e Bajrakut etj.) dhe nuk kanë shtrirje të caktuar. Rrafshina shtrihet në mes dhe rreth këtyre majeve kupore dhe në të procesi karstik ka arnijtë shkallë të lartë të zhvillimit. Procesi intensiv karstik në të ka krijuar numër të madh të hurdhave karstike dhe një lug karstik, ka shkaktuar zhdukjen e burimeve dhe të rrjedhjeve ujore sipërfaqësore si dhe ka bërë shkatërrimin e luginave të krijuara nga rrjedhjet e dikurshme. Në këtë mënyrë i është ndërruar forma dhe veçoritë e më parshme fluviodenudive, dhe ka marrë veçori të rrafshinës karstike.

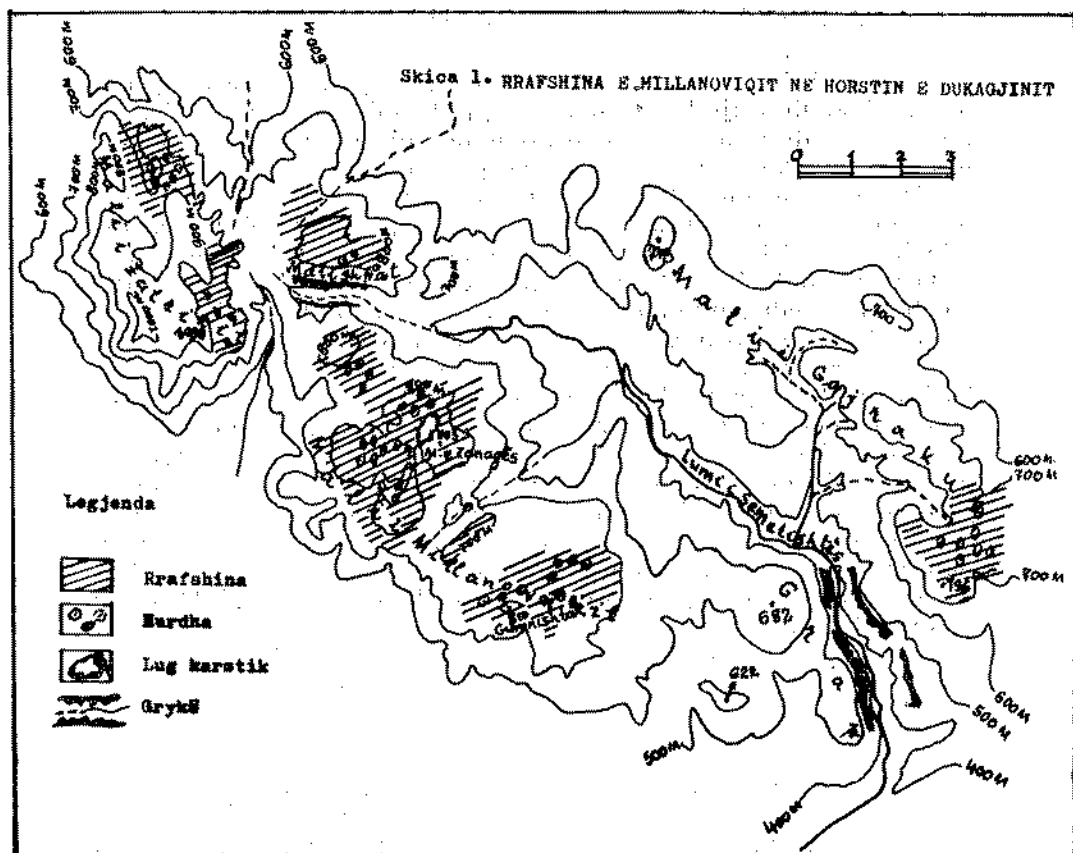
Hurdhat janë format më të shumta dhe më të zhvilluara në këtë pjesë të rrafshinës së Millanoviçit, si dhe në tan hapësirën karstike të Horstit të Dukagjinit, të cilat dendësi më të madhe (rreth 24 në një km²) arrijnë në sipërfaqen në mes të Majës së Zanagës dhe Majës së Veliut. Kan kryesisht formë vedrore e më pak hinkore, thellsi mesatare 8—12 e gjersi 70 m, kurse fund të rrafshët të mbuluar me terrarozë. Ka edhe aso fundi i të cilave vazhdon në humnerë. Në fundin e rrafshët të një numri të madh të këtyre hurdhave deri vonë janë mbjelluar kultura të ndryshme si janë patatet dhe drithat e bardha etj. Më të dalluara prej tyre janë Hurdhat e Bajraktarit, Hurdhat e Rahovecit, Hurdhat e shkozës etj, në të cilat shkaktuar nga procesi intensiv karstik paraqiten edhe hurdhat binjake, tronjake, e ka edhe kurdha sekundare. Në mesin e tyre ka edhe hurdha më dimensone të mëdha, ku vlen të përmendim (veçojmë) një në grupin e Hurdhave të Rahovecit, e cila është e thellë 17 m dhe ka perimetër 820 m. Fundet e këtyre hurdhave janë të mbuluara me barë, rrallë me pyje e shpatet i kanë të mbuluara më vegjetacion të dobët pyorë apo barishtorë dhe shkembore.

Si rezultat i zhvillimit të lartë të karstit ka rrjedhë edhe krijimi i *lugut karstik »Fusha e Bajraktarit«*. Me ndikimin intensiv të

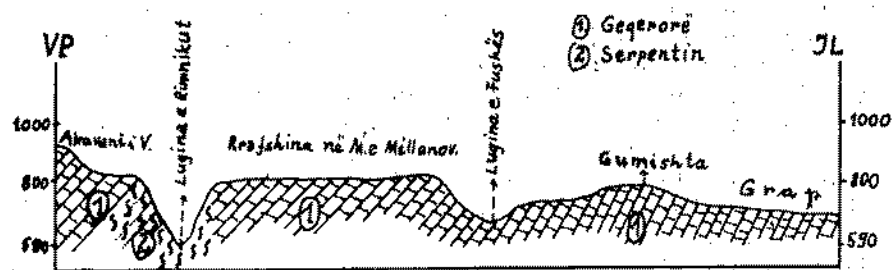
procesit karstik në këtë pjesë të rrafshinës, në juglindje të Majës së Zanagës, në lartësi absolute 800 m është bërë zbritja e pengesave në mas të hurdhave, dhe më bashkimin e tyre është krijuar lugu i lartpërmendur, i gjatë në drejtim VP-JL 835 m, i gjerë rreth 300 m e i thellë 100 m. Në fundin e thatë të sajë ndodhen pengesat e tri hurdhave, ende krejsisht të pa rrafshuara. Ky lug është kryesisht i mbuluar me vegjetacion të rrallë barërorë e vende shkemborë, sidomos në shpatin e Majës së Zanagës që është i pjerrtësuar dhe i ndertuar nga gelqerorët shtresorë e stomik. Me zbritjen intensive të pengesave në mas të hurdhave në këtë hapësirë ndodhën në fazën krijuese edhe tri luge karstike.

Kjo pjesë e rrafshinës është pjesërisht shkembore, e kryesisht e mbuluar me vegjetacion pyjorë dhe barishtorë, e pa ujë në të cilën veshtirë mund të behët përcaktimi i luginave të rrjedhjeve të gjitha reshjet që bijnë në dukje shiu dhe ujërat që krijohen më janë shkatrrue me procesin, karstik i cili ka bërë zbritjen dhe modifikimin e shpateve dhe të ujëndarsive të tyre, e në to ka krijuar hurdha karstike e forma tjera të ketijë erozioni. Me këtë proces është bërë edhe zgjerimi i plasave në shkembijt gelqerorë, aq sa të gjitha reshjet që bijnë në bukje shiu dhe ujërat që krijohen më shkrirjen e borës sharrjonë nëpër numrin e madhe të këtyre plasave, shumë të zgjeruara në brendësi të gelqerorëve, si nëpër shoshë. Duhet të cekim se në sipërfaqen shkembore, pa vegjetacion në pengesa në mas të hurdhave apo shpate të tyre janë mjaft të zhvilluara skribat, gotzat e gunit e format tjera mikrokarstike.

Pjesa juglindore. — zbrit në të gjitha anet më shpate jo aq të pjerrta në pjestë mjaft të dalluara të nivelit eroziv më të ulët. Shpatet më të cilat zbrit janë të disecuar dhe të modifikuara nga luginat e rrjedhjeve të përkohshme, në fund të biruara nga hurdhat. Këto lugina më anen e epërme vazhdojnë edhe në rrafshinë e priten terthorazi më shtrirjen e hurdhave në rrafshinë, që duhet të jenë krijuar në fund të luginave të rrjedhjeve të dikurshme, të cilat tani, edhe këtu si në pjesën veriperendimore të kësaj rrafshine veshtirë rekonstruohen. Kjo pjesë e rrafshinës është e mbuluar kryesisht me pyje dushkaje apo më vegjetacion barishtorë, e pjesërisht shkembore. Format më të dalluara që ja ndrojnë veçoritë e rrafshinës fluviodenudive dhe i apin veçori karstike, edhe këtu janë hurdhat, që u përngjanë hurdhave në pjesën veriperendimore të rrafshinës. Në shpatet shkembore të hurdhave dhe të pengesave në mas tyre paraqiten skribat. Këtu ndodhet edhe kurdha më e madhe në Maline e Millanoviqit, e njeheri edhe në horst, e thellë në mas tyre paraqiten skribat. Këtu ndodhet edhe hurdha më e ka te rrumbullakët, fundin e rrafshët dhe të mbuluar me pyje, anen verilindore të pjerrtë, kurse është krijuar në vendin ku kryqëzohen shumë plasa. Edhe në këtë pjesë të rrafshinës nuk ka burime e rrjedhje, as gjatë stinve më shina. Të gjitha këto të dhena tregojnë shkallën e lartë të zhvillimit të karstit në këtë pjesë të rrafshinës dhe të modifikimit të sajë të madh më këtë proces.



Skica 1. Rrafshina e Millanoviçit në horstin e Dukagjinit



Skica 2. Rrafshina e Millanoviçit është disecuar dhe e pjerriësuar nga VP në drejtim të JL.

RRAFSHINA E MILLANOVIQIT NE MALIN GAJRAK

Në lindje Rrafshira e Millanoviçit paraqitet në pjesën juglindore të Malit Gajrak dhe nderton pjestë më të larta të tijë. Ka formë ylli e disecuar dhe e ngushtuar nga të gjitha anët nga lugina të thella, të cilat i kanë pre lumenjtë që kanë dalur me erozion regresiv në këtë rrafshinë dhe pastaj me proces karstik janë shendrrue në lugina të thata karstike. Është e gjerë 2,5 km, lartësia absolute i levizë rreth 780—790 m, e nga ajo ngriten maje me formë kupe të larta rreth 15 m. Edhe këtu zbret vertikalisht në nivelin eroziv me të ulët i cili paraqitet me terraca të ngushta, kurse kah gryka e Lumit të Smetishtës zbret afro 160 m në terracen e gjerë të Smetishtës. Pjesërisht është e mbuluar me male, pjesërisht me barë të rrallë e pak shkembore. Pos luginave karstike të prera në të me erozion regresiv në ndrrimin e sajë marrin pjesë edhe hurdhata e shumta, të mëdha vedrore, të cilat i kanë dhanë fizionomi karstike. E ndertojnë shkëmbinjët karbonatik masorë. Këtu ka qenë më e gjerë, dmth është shtirë edhe në serpentinet që hyjnë në ndertimi e këtijë mali, por me procese erozive intensive ajo në këta shkëmbinje është eroduar. Edhe këtu në të nuk ka burime as rrjedhje sipërfaqesore, çka tregon gjithashtu shkallën e lartë të zhvillimit të karstit në të.

RRAFSHINA E MILLANOVIQIT NE MALIN SHPAT

Kjo rrafshinë në veri vazhdon në Malin Shpat që shtrihet përtej Grykës së Ostrozubit, e cila paraqet pjesën e eperme të luginës së Lumit të Smetishtës. Në këtë mal rrethon dy maje të rrumbullaksuara me procese erozive, kah jugu zbret vertikalisht në Grykën e Ostrozubit, të thellë rreth 160 m, e kah veriu, lindja dhe perëndimi në pjestë e nivelit eroziv nën të. Është prerë terthorazi nga tri lugina karstike, të biruara në fund nga hurdhata karstike të mëdha, që u përngjajnë atyre të Bajraktarit në Malin e Millanoviçit. Dy prej këtyre luginave kah jugu kryhen në prerjen malore dhe kanë veçori të luginave të varura. Këtu sipërfaqja e rrafshinës është e mbuluar me vegjaticion barishtorë, pjesërisht shkembore e rrallë me pyje, kurse në lugina dhe hurdha në të pyjet e ulëta janë mjaft të dendura. Në rrafshinë nuk ka ujë, as për ilaç, kurse luginat karstike mjaft të ndrruara tregojnë se në të ka pasur rrjedhje sipërfaqesore të cilat më procesin e karstifikimit kanë kaluar (zbritur) thellë në brendësi të malit. Në sipërfaqet shkembore janë të rëndomta skribat brinjore dhe rrjetore, e ka asosh të krijuara nën shtresën pedologjike (2,7) si dhe mikroforma tjera karstike.

RAFSHINA E MILLANOVIQIT NË MALIN ZATRIQ

Rrafshina e Millanoviçit paraqitet edhe në pjesën lidore e verilindore të Malit Zatriq, ku është ruajtur vetem në hapësirën e Akavanit të Madh dhe të Vogël, të ndërtuar nga gelqerorët. Në të zbret Rrashina e Zatriqit, e kjo në Rrashinën e Livadheve të Zatriqit e cila parqet pjesë të rëndësishme të nivelit eroziv poshtë sajë. Edhe në keto dy pjesë të Rrafshinës së Millanoviçit procesi karstik ka arrijtur shkallë të lartë të zhvillimit, ku janë krijuar hordha më dimensione të mëdha, e luginat e rrjedhjeve sipërfaqësore të dikurshme janë shkatërruar mjaft. Pasi në Malin Zatriq gelqerorët rrethohen nga serpentinet e shkëmbinjët tjerë më origjinë vullkanike, në kontakt të tyre me këta shkëmbinjë joulëlëshues paraqiten burime karstike, të cilat në të kaluarën në gelqerorët që ndertojnë Rrafshinën e Millanoviçit kanë krijuar rrjedhje. Këto rrjedhje në rrafshinë kanë pre luginat mjaft të thella, të cilat tash sharrojnë nën tokë në pjesën e epërme të këtyre luginave, e luginat janë shendrrue në luginat karstike të biruara në fund nga hordhat karstike. Hordhat në luginat kanë shtrirje lineare, e luginat kryhen në prerje dhe kanë veçori të luginave të varura. Pjesa më e madhe e këtyre kurdhave rreth fshatit Zatriq, e në hapësirën pran Rrafshinës së Zatriqit mbjellen me kultura, sidomos fundi i tyre, kurse në pjesë të shkajshme pran prerjes, shkaktuar nga zhvillimi i lartë i procesit karstik hordhat kanë fund të ngusht, shpesh shkëmborë që kalon në humnera, e shpate gjithashtu shkëmbore të mbuluara me skriba. Dmth pjesë periferike të rrafshinës janë kryesisht shkëmbore të mbuluara pjesërisht me vegjetacion të rrallë pyjorë dhe barishtorë, kurse ato pran shkëmbijve vullkanik, gjegjësisht pran Rrafshinës së Zatriqit mbjellen me kultura apo janë në livadhe.

MORFOGJENEZA

Nga këto që u than më sipër shihet se Rrashina e Millanoviçit është ruajtur vetem në shkëmbinjët gelqerorë, shtrirje më të madhe ka në Malin e Millanoviçit, kurse paraqitet edhe në malet tjera të Horstit, e sipas të gjitha gjasave edhe jashtë Horstit të Dukagjinit. Pamja morfologjike e kesajë rrafshinë është ndërruar mjaft nga erozioni fluvial, i cili në të në fillim ka shprehur ndikim të madh, ka pre luginat të thella dhe në këtë mënyrë ka bërë disecimin e sajë në pjesë të veçanta. Më procesin e karstifikimit në pjesë të saja të ndërtuara nga gelqerorët erozioni fluvial, është zëvendësuar me erozion karstik. Me veprimin e vet erozioni karstik në të ka krijuar forma gjegjëse dhe ka shkatërruar format fluviale, e kështu i ka dhënë veçori të rrafshinës karstike.

Sipas të gjithë treguesve dhe gjasave në teren kjo rrafshinë është krijuar me procese erozive. Ajo nuk përputhet me përberjen

petrografike, shtrirjen dhe renien e formacioneve gjeologjike, por i pret ato me kend të caktuar, çka tregon se nuk është formë strukturale, por erozive. Mirpo, duhet të cekim se vende vende pjerrtësia e vogël e formacioneve ka shkuar në dobi të formimit të sajë.

Pjesërisht e ruajtur, Rrafshina e Millanoviçit është krijuar me veprimin e proceseve fluvio-denudive, në kushte të veçanta e të volitshme morfotektonike dhe klimatike. Është formuar, padyshim para levizjeve tektonike radiale shtajere të zhvilluara në Mediteranin e II-të, të cilat i kanë dhënë formë teknike definitive Gropës së Dukangjinit, e pas levizjeve horizontale të zhvilluara në fillim të terciarit, të cilat e kanë rrudhosur dhe ngritur këtë trevë (3,12). Pra, në mes të këtyre dy fazave ka mbretëruar tektonikë relativisht e qetë dhe klimë e butë, të cilat kanë mundësuar zhvillimin e rrjetit lumorë sipërfaqësor edhe në terrenet e ndërtuara nga shkëmbinjët karbonatik, si dhe veprimin e fuqishëm të ergzionit fluvial dhe denudacionit, më veprimin e të cilëve është krijuar rrafshina në fjalë.

Levizjet radiale shtajerë kanë bërë ndrrime të mëdha në relievin e kësajë hapësire. Ato kanë zbritur Gropën e Dukangjinit dhe kanë ngritur malet për rreth sajë. Këto levizje, gjithashtu kanë thyer dhe copëtuar në pjesë të vogla dhe të veçuara Rrafshinen e gjerë të Millanoviçit. Kështu disa pjesë të rrafshinës kanë zbritur në fund të Gropës, e tjerat kanë mbetur të vetmuara në male. Në kushtet e bazës tjetër erozive të krijuar më këto levizje, kjo rrafshinë bjen nën ndikimin e fuqishëm të erozionit fluvial dhe të denudacionit, e në shkëmbinjë gelqerorë edhe nën erozionin krastik, të cilat shkaktojnë ndrrime në të dhe bëjnë disecimin e sajë në pjesë edhe më të vogla. Kjo paleoformë shtrihet edhe jashtë kufijve të horstit të Dukangjinit, si në Malin e Caralevës, në Malin Kosmaç, Badallë etj. Se nuk është krijuar me procese abrazive të liqenit neogjen të Dukangjinit tregojnë shumë fakte si janë: shtrirja e madhe e sajë, paraqitja e sajë vetëm në këtë pjesë të Grupës së Dukangjinit, ruajtja më e mirë e sajë në Horstin e Dukangjinit etj. Në bazë të kërkimeve gjeologjike të bera në sedimentet liqenore, të cilat mbulojnë fundin e gropës së Dukangjinit, në këtë gropë gjendja liqenore ka ekzistuar vetëm në miocenin e epërm dhe pliocen (4,5—14), që është kohë e shkurt për krijimin e një forme kaq të madhe, nga një liqe relativisht i vogël, si ka qenë Liqeni i Dukangjinit deri në levantik. E sidomos kurë dihet se ai gjatë ekzistimit ka ndërruar shpesh nivelin e vet, madje në të gjatë kësajë kohe ka pasur edhe faza moçalike, kështu që regresionet dhe transgresionet ritmike kanë mundësuar krijimin e formave abrazive në shpatë të liqenit të Dukangjinit, por edhe shkatërrimin e tyre më të njejtin proces. Madje krijimi i kësajë rrafshine me abrazionin e liqenit në fjalë në kushtë të caktura ka qenë i pamundur, sidomos kur dihet se ky liqe deri në levantik ishte i kufizuar vetëm në hapësirën e Pejës dhe Klinës. Sikur të ishte abrazive

atëher, kjo rrafshinë më dimensione dhe lartësi të ngjajshme duhet të paraqitet në të gjitha shpatet e gropës, çka nuk ngjan. Madje pse të paraqitet në Horstin e Dukagjinit i cili në fazën liqenore ishte ishull, a një kohë i përmytur, dhe kaq e madhe etj. Të gjitha këto fakte, e ka edhe tjera, janë materiale dhe logjike që vërtetojnë se kjo rrafshinë, mjaft e ndërruar nuk është abrazive. Por duhet të cekim se në formimin, gjegjësisht në modifikimin e sajë gjatë fazës liqenore kanë ndikue edhe proceset abrazive, e sidomos atëher kur liqeni preu terracen 785—800 m. lart absolute (5, 55).

EVOLUCIONI MORFOLOGJIK DHE MORFOHRONOLOGJIA

Në bazë të treguesve dhe të dhënave që i trajtuem më sipër mund të konstatojmë se kjo rrafshinë e copëtuar, e ndryshuar dhe e fosilizuar është krijuar në oligocenin e epërm, gjegjësisht miocenin e poshtëm me procese fluviodenudive, e është thye dhe shkarë me levizje radiale në miocenin e mesëm (Mediteranin e II të), të cilat në Gropën Dukagjinit krijuan relievin tektonik të sotëm. Krijimi i sajë është bërë në kushtet e relievit inicial tektonik, mjaft të ndërruar me veprimin e proceseve fluviodenudive gjatë paleogjenit, e të profilit gjatësorë të pajtueshem. Pas thyerjes me levizje tektonike pjestë e sajë të zbritura në fund të Gropës së Dukagjinit, fosilizohen nga uji i liqenit që krijohet në këtë gropë, pastaj nga materiali liqenorë i cili nderton rrafshin qendrorë të liqenit, kurse pjestë e pazbritura hyjnë në relievin e maleve shkarse të kësaj pjesë të gropës. Pjestë e kësaj rrafshine në male bijnë nën veprimin e erozionit të fuqishëm fluvial dhe të denudacionit, e në fund dhe të erozionit karstik. Gjatë fazës liqenore në pjesët e tije të ndertuara nga shkëmbinjët jokarbonatik dhe ka zohet nga uji i liqenit. Pas terhejekjes së liqenit pliocen në levantik, në të përseri veprojnë erozioni fluvial dhe denudacioni, e pastaj erozioni karstik i cili është intensiv edhe sot. Duhet të cekim se kjo rrafshinë pas shkarjeve shtajere ka qenë shumë më e gjanë, sidomos në Horstin e Dukagjinit, e cila është shtri edhe në pjesë e tije të ndertuara nga shkëmbinjët jokarbonatik dhe ka krijuar një terësi të pandarë, e ka paraqitur formën më të madhe të. Me veprimin intensiv të erozionit fluvial dhe të denudacionit e abrazionit është eroduar krejtësisht në shkëmbinjët jokarbonatik, kurse në shkëmbinjët gelqerorë më veprimin edhe të erozionit karstik është ndërruar e shendrruar në rrafsh të copëtuar karstike.

Duhet të cekim se Rrafshina e Millanoviçit është e pjerrtësuar kah juglindja, në drejtim të dislokacioneve: të Semetishtës, të Toplluhës dhe të Bellanicës, kështu që lartësi më të madhe ka në Malin e Zatriqit, rreth 860—880 m, kurse në Malin e Gajrak lar-

tësia i zbret në 780—790 m. Dmth. ajo në pjesën juglindore të horstit është lakuar dhe leshuar me levizje tektonike, kështu që të gjitha pjestë e larta të maleve: Gajrak, Grap (682 m) dhe të pjesës juglindore të Malit të Millanoviçit paraqesin, padyshim pjesë të leshuara të kësajë rrafshine të gjerë. Në këtë pjesë të horstit ajo mastepërmi ka zbrit në hapësirën e rrjedhjes së mesme të Lumit të Semetishtës.

Në të dhe në tan horstin, shkaktuar nga pjerrtësia dhe lartësia e madhe e shapteve të horstit në fillim ka qenë shumë aktiv erozioni fluvial, i cili ka bërë disecimin e horstit dhe të rrafshirës në pjesë të vogla. Në disecimin e horstit dhe të rrafshinës rëndësi më të madhe ka pasë Lumi i Semetishtës, e sidomos prroni i Ostrozubit me degët e veta, i cili paraqet rrjedhjen e epërme të këtijë lumi. Pas terheqjes së liqenit prroni i Ostrozubit ka burue në pjesën lindore të Rrafshinës së Zatriqit, e në hapësirën e Akavanit të vogël, ka pre terthorazi brezin e ngusht të gelqerorëve në Malin e Zatriqit, madje ka kaluar në brezin serpentini që nder-ton pjesën lindore të këtij mali, dhe ka vazhduë kah lindja në hap-sirën në mes të Malit të Millanoviçit dhe Malit Shpat. Për ushqimin e tijë rëndësi të veçantë kanë pasur dega e djathtë dhe e majtë të tijë, të formuara në brezin serpentini. Me prerjen e luginës grykore në pjesën gelqerore të rrafshinës, në hapësirën në mes të Malit Shpat dhe Malit të Millanoviçit, ky prrue në këtë pjesë të horstit krioi dy malet e përmendura, e me prerjen e luginave të dy degëve të përmendura, në këtë rrafshinë në pjesën e brezit serpentini u krijue Mali i Zatriqit. Në këtë mënyrë u be edhe ndarja e rrafshinës së Millanoviçit në tri pjesë, gjejësisht kater pjesë.

Luginat e varura karstike në shpatin e majtë të grykës së Ostrozubit, të cilat presin terthorazi rrafshinën në Malin Shpat dhe luginat e varur, gjithashtu karstike në shpatin verilindor të Malit të Zatriqit, gjejësisht të luginës të degës së majtë të prronit të Ostrozubit etj. paraqesin pjesë të luginave të rrjedhjeve të vjetra sipërfaqesore që kanë marrë pjesë në krijimin e rrafshinës në fjalë. Këto luginat janë tregues të pamohueshem të krijimit të kësajë rrafshine me procese fluviodenudive, që me veprimin e erozionit karstik po merr veçori të rrafshinës karstike të ndar në rrafshë.

Me në fund duhet të cekim se shkaktuar nga renia e madhe e shapteve të horstit, përberja gjeologjike e ndryshme e tijë, levizjet tektonike etj. disa rrjedhje që janë krijuar në shpatet e horstit, me erozion regresiv kanë depërtue thellë në brendësi të horsti dhe kanë bërë kaptimin e rrjedhjeve në pjesën qendrore të tijë. Kështu ka ngja me dy degët dhe rrjedhjen e epërme të prronit të Ostrozubit. Madje lumi i Semetishtës i prerë në horst përbehet prej tri pjesëve të ndryshme: pjesës së poshtme në Gryken e Semetishtës, pjesës së mesme të gjerë në leshimin tektonik në mes të Malit Gajrak dhe të Malit të Millanoviçit dhe pjesës së epërme në

Grykën e Ostrozubit. Këto tri pjesë të rrjedhjës, të luginës dhe të pellgut të vet lumi i Semetishtës i ka forume, me kaptimin e rrjedhjës se mesme dhe të epërme nga rrjedhja e poshtme e tijë në aluvium.

LITERATURA

- [1] Dragan Rodić: *Osredačka površ, iz zbornika radova Instituta za proučavanje krša »Jovan Cvijić«* Knj. 1, Beograd, 1955. god.
- [2] Josip Roglić: *Korozijski oblici u pokrivenom kršu*, Glasnik SGD, Sv. XLI, br. 1, Beograd, 1961. god.
- [3] Ibrahim Ahmetaj: *Ndërthurja morfotektonike e gropës së Duka-gjinit*, Kerkime gjeografike, Na-4, Prishtinë, 1983.
- [4] Velimir Milošević: *Facijalno-stratigrafske karakteristike Metohijskog neogena s naročitim osvrtom na starost ugljeva*, GPM, Serija A knj. 21, Beograd, 1966. godine.
- [5] M. Radovanović i S. Nikolić: *Sliv Prizrenske bistrice*, Zbornik radova, Geografski institut, Sv. VI, Beograd, 1959. god.
- [6] Ibrahim Ahmetaj: *Krahinat karstike në KSA të Kosovës*, dorzue për botim në Buletinin shkencorë të FSHMN në Prishtinë.
- [7] Ibrahim Ahmetaj: *Kras Milanovac planine*, Teza e magjistraturës, e mbrojtur në, Beograd më, 1975.
- [8] *Geološko-tektonska karta SAP Kosova 1 : 100000*, Industroprojekt, Zagreb, 1974. god.

MILANOVAČKA POVRŠ U METOHIJSKOM (DUKAĐINSKOM) HORSTU

Ibrahim Ahmetaj

Rezime

Na istočnom delu Metohijske (Dukađinske) kotline diže se Metohijski horst u kome se javlja Milanovačka površ 780—880 m aps. visine. Horst i površ na njemu raščlanjen je u Milanovac (883 m), Gajrak (796 m), Špat (902 m), Zatrić (1039 m), Koznik (1006 m) i Grebnik planine (732 m). Izgrađen je od gornjekrednih krečnjaka i jurskih ili starijih vulkanskih stena (serpentina i dr.).

Milanovačka površ gradi više delove Milanovac, Gajrak i Špat planine a javlja se u istočnim delovima Zatrić planine. Sačuvana je samo u krečnjacima u kojima je kraškim procesom zadobila odlike kraške površi, iz koje se dižu zaobljeni kupasti vrhovi, a spušta se strmim odsekom u niži erozivni nivo. Izbušena je mnogobrojnim vrtacima među kojima u njenim stenovitim delovima ima dosta škrapa i drugih mikrokraških oblika, a u Milanovac planini nalazi se i jedna uvala koja je postala sraščavanjem vrtaca, dok vode nema ni za lek.

Milanovačka površ postala je fluviodenudacionim procesima pre radialnih pokreta u štajerskoj oerogenoj fazi, kojima je spuštена Metohijska kotlina, a zajedno sa njom i delovi površi i postao je Metohijski horst. Javlja se i u blizoj okolini van horsta. Usečena je u različite stene, ali očuvana je samo u krečnjacima i pod određenim uglom seče pravac pružanja i pad geoloških formacija, a nagnuta je tektonskim pokretima prema jugoistoku.

Posle ovih pokreta u horstu je predstavljala jedinstvenu površ, koja je kasnije u nekarbonatnim stenama erodirana a u karbonatnim raščlanjena u više delova. Na nju je delovala i abrazija pliocenog Dukandinskog jezera, a za vreme visokog nivoa jezera fosilizovana je jezerskom vodom.

U njenim delovima prema dubokim dolinama koje je raščlanjuju javljaju se viseće skraćene doline. Ove doline su nepobitan dokaz da je ova površ postala fluviudenudacionim procesima, kome idu u prilog i njeno veliko prostranstvo, nezastupljenost u ostalim delovima Dukadinske kotline i dr, što negira njeno abrazično poreklo.

THE HIGHT PLATEAUX AREA OF MILOVANOVIQ MOUNTAIN IN THE HORST OF DUKAGJIN PLAN

Ibrahim Ahmetaj

Summary

In the Eastern part of Dukagjin plain spreads the horst in which appears the hight plateaux area of Milanovic mountain with the hight 780—880 m above the sea level. The horst and hight plateaux area is decomposed in several hills: Milanovic (883 m), Gajrak (796 m), Shpat (902 m), Zatriq (1039 m), Koznik (1006 m and Grebnik (732 m). The composition of these hills is predominantly lime that belongs to the upper Creade and Juraic and from older vulcanic rocks (serpentine etc.)

The hight plateaux area of Milanovic spreads in several parts of Milanovic, Gajrak and Shpat mountains, as well as in the Eastern part of Zatriq mountain. It is preserved only in lime stone-areas where the karstic processes left carstic surfaces areas. There are many sinkholes with holws and other microcarstic forms, while in the mountain of Milanovic there is only one vale which is formed from several sinkholes, but without water.

The hight plateaux area of Milanovic recome by the fluviudenudation process before the radial movements of Schtayerk orogenic face, whene is put down Dukagjin Planin and the Dukagjin horst appeared, which also appears in the surroundings out of horst. It is dissected in various rocks, but is preserved only in lime that cuts with serten angels stratches and downholed of geologic formations, while it is inclined by techtonic movements towards the South-East.

After these movements in karst was a unic hight plateaux area, that is later on in uncarbonate rocks eroded, while in the carbonates is dissected in several parts. In these transformations also is envolved Pliocene abration of Dukagjin Lake, while during the time of hight level of lake is phosilycised by the water of lake.

In the lowerparts toward the deep valeys that dissect the Dukagjin Plain have appeared suspended short valys. These valys show the evidence that the hight plateaux area was created by the process of fluviudenudation, in favour of which is the wide spread.

KONTRIBUTI I M. V. CORONELLIT PËR HARTOGRAFIMIN E PJESËS QENDRORE TË EVROPËS JUGLINDORE^{*}

Muharem Cërabregu

Abstrakt

Evropa Juglindore, pjesa në jug të lumujve Sava dhe Danub, e cila qysh nga Lufta e Kosovës (1389) ndodhet nën Perandorinë Turke, në pikëpamje hartografike paraqet regjionin më pak të njohur të Evropës deri në gjysmën e dytë të shekullit XII. Si pasojë e kësaj mosnjohurie, pjesa qendrore e Evropës JL, sot territori i Krahinës Socialiste Autonome të Kosovës, në atë kohë në paraqitjet hartografike ishte një lëmsh i shënimeve gjeografike. Shkaku i kësaj ngecje nuk kishte të bëjë vetëm me izolimin e Perandorisë Turke, por gjithashtu edhe me kompleksitetin e ujëndarsëve dhe degëve burimore të lumenjve kryesor të Evropës JL.

Përndryshe, përkah pozita e rëndësishme gjeografike në gadishull dhe pasuritë nëntokësore, Kosova luan rol të madh, të cilën e dëshmojnë edhe kryqëzimi i rrugëve kryesore interregionale dhe pasuritë xeherore të metaleve të çmueshme.

Kah mesi i shekullit XVII., Coronelli, gjeografi kryesor i Republikës së Venedikut dhe themeluesi i shoqatës në zë «Agronauti», gjithashtu i njohur për punë hartogramike, ka bërë një hap të madh përpara edhe për hartografinë e pjesës qendrore të Evropës JL. Paraqitjet e tij hartografike, përpos që kishin dizajn të shkëlqyeshëm, përmbajnë një numër të madh shënimesh gjeografike, si dhe historike, statistikore, varlanta emërtime vendesh, përshkrime tekstuale, etj. Kjo paraqitje komplekse e Coronellit, ishte kulmi më i lartë i provave hartografike italiane për portretimin e pjesës qendrore të Evropës JL.

^{*}) Abstrakti i kësaj teme është publikuar në materialin e »24th International Geographical Congress, Main Session, ABSTRACTS VOL. 3 S9, Septembar 1—5, TOKYO 1980, f. 136.

HYRJE

Marco Vincenzo Coronelli (1650—1718) ishte hartografi më i famshëm italian në kohën e vet, atribut që pa dyshim i përket edhe për kontributin e tij të dhënë për hartografinë e territorit të Kosovës. Këtij autori për nderë të punës krijuese në këtë lëmi iu dha titulli »Cosmografo della Serenissima Republica di Venetia«. Puna e tij krijuese si udhëheqes i hartografisë italiane arrit të dëgjohet edhe në tërë suazat hartografike të Botës së atershme.

Coronelli është i njohur si gjeograf për kompilimin e hartave regjionale, ndertimin e globuseve me përmasë bukur të mëdha dhe për vepra të tjera hartografike. Hartat e tij janë tipike për kah stili dhe aranzhimi me periodën gjegjëse. Portretimet më të sukseshme, ku duhet të përfshihen edhe ato harta, që kanë të bëjnë me territorin e Kosovës, janë botuar në edicionin kolosal »Atlante Veneto« në 12 blenjë (Venetia, 1694). Këto përpilime hartografike të lidhura në këtë atlas, cilësohen me gravurë të shkelqyeshme dhe me dekorime të matura, që rëndom vendosen në pjesët marginale me »pikturime« për rreth titullit, shkallëve dhe legjendës, si dhe me pasurinë e jashtzakonshme të shënimeve gjeografike. Mbi të gjitha, kontributi i këtij autori në përparimin e hartografimit të mbrendësisë së Evropës JL, e sidomos të territorit kosovar për kah origjinaliteti është i pakrahësueshëm me çfardo paraqitje grafike që ka të bëjë në periudhën e hartografimit kompilues.

Si cekët edhe në titullin e atlasit, përmbajtja e hartave të lidhura i përket shumë aspekteve shkencore. Në të hasim »përshkrime gjeografike, historike të vendeve të shënjat e të thjeshta dhe politike, të perandorive, mbretërive, provincave, e shteteve të botës me ndarjet e tyre, me kufij, duke përfshirë të gjitha vendet me shënime më të reja të marra nga shumë burime gjeografike të papublikuara asnjë herë më parë«.

Hartën e parë të Coronellit që ka të bëjë me konceptimin e ri të territorit të Kosovës e hasim në atlasin e lartëpërmendur me titullin »CORSO DEL DANUBIO DA VIENNA SINO A NIKOPOLI, PAESI ADIACENTI« (88×180), të ndarë në gjashtë fletë prej të cilave e pesta (harta e 111 në atlas) mund të identifikohet me emërtimin e potencuar në këndin e poshtëm të hartës »Iliricum«. Shënimet e përmbajtjes gjeografike të Kosovës në këtë fletë ndërpriten, kështu që ato vazhdojnë të paraqiten në hartën që pason — 112. Është për t'u habitur se në hartë nuk është shënuar viti i komplikimit. (Ndërkaq, data mund të përcaktohet përafërisht cca 1688, në bazë të evidentimit të luftërave të zhvilluara në bregdetin Dalmatin. Në të mirë të datës cca të caktuar flet edhe fakti se gabimet e shumta të kësaj harte u korrigjuan në paraqitjen e mëvonshme që në vitin 1689. Rrjedhimisht, kjo hartë paraqet përpjekjen më të hershme të Coronellit, si provë e parë e hartografimit mjaft të suksesshëm dhe me rëndësi të jashtzakonshme, nëse i marrin parasysh paraqitjet e cekura

dhe jo komplete të autorëve të më përparshëm. Kjo hartë, gjithsesi paraqet provën e parë me një dozë të madhe të realitetit hapsinor të Evropës JL, që në krahasim me realizimin e dytë hartografik, cilësohet me një konceptim më pak të suksesshëm.

Harta me konceptim të dytë të Coronellit, poashtu haset në atlasin e lartëpërmendur, ku gjendet edhe prova e parë e paraqitjes së regjionit kosovar, pikërisht në fletën 143 me titull »CORSO DELL FIUMI DRINO E BOIANA NELLA DALMATIA« (Descritto dall Marco Coronelli cosmografo della serenissima Republica di Venezia Agli Em; e Reu: Signori Cardinali dell Sacra Songregatione de Propaganda Fide), Venezia, 1689., cca 1:300 000 (61×45). Duhet cekur, se në titullin e kësaj hartë është shënuar nocioni marrë nga përmbajtja gjeografike e Kosovës, që është një hartë e dytë e karakterit të tillë, pas hartës së Katib Çelebiut të vitit cca 1635.

CILËSITË E RISITË TE PËRMBAJTJA E HARTAVE

Të dy hartat e lartëpërmendura përkah progresi hartografik i pakrahasueshëm me autorët e hartave të më parshëm, duke filluar nga provat e para të kohës së Renesansës, ato ndryshojnë edhe përkrah përmbajtja, gjegjësisht përkah qartësimi i konceptimit me identifikime gjeografike.

Derisa risitë lidhen me një prezetim pothuaj kryesisht të ri gjeografik të kësaj pjese të gadishullit, gjithashtu, hasen ndryshime mes hartës së parë dhe të dytë në këto aspekte të portretimit fiziografik; hidrografik e hidronomik, krahinor, orografik e oronomik, pastaj të simbolizimi, kategorizimi dhe lokalizimi i vendbanimeve, komunikacioni, transkriptimi i emërtimeve, të shpjegimit, shënimit statistikore, dizajni, aranzhimi i elementeve hartografike etj.

PËRMASA

Ndër elementet hartografike të dy hartave të lartëpërmendur, përkah shkalla e paraqitjes grafike të përmbajtjes hapsinore, ekzistojnë shkalla e paraqitjes grafike të përmbajtjes hapsinore, ekziston një ngjashmëri gadi idetike në mes tyre. Në fletën 112, ku në një hapsirë të pellgut të epërm të Drinit të Zi, është dhënë legjenda shkallore në gjashtë njësi matse të vendeve kryesore të Evropës në atë kohë; në milën italiane, pastaj në gjashtësitë e rënoma (leghe comoni), të Francës, Spanjës, Gjermanisë, Polonisë dhe Hungarisë. Duhet cekut se vendosja e këtyre gjashtë shkallëve përkah dekorit është imponante, por jo edhe përkah lokalizimi i tyre, që është rast jo i rëndomtë për aspektin e arani-

zhimit të elementeve të hartës. Në të vërtetë, autori shfrytëzon hapsirën me pak shënime të këtij pellgu burimor të Drinit (të huazuar në mënyrë jokritike nga konceptimi i Bertellit), për vendosjen e përmasës së hartës me qëllim që t'i mbulojë zbrastësitë ose më mirë më thënë pjesët e panjohura të hartës. Për më tepër nëse kemi parasysh aranzimin jo të rëndomt të elementeve të hartës, ky konstatim do të përforcohet, meqë vendosja e përmasave gjindet diku nën mesin e hartës, duke mos u përputhur me praktikën hartografike.

Poashtu edhe harta e provës së dytë të portretimit të Coronellit, është mjaft e madhe, e ngjashme me hartën e parë. Ky konstatim mund të çmohet tërthorazi, pasi që përmasa nuk është shënuar në këtë hartë.

Duke i pasur parasysh shkallët e përmendura të hartës së parë, si dhe gjatësinë grafike të shkallëve të gjerësisë dhe gjatësisë gjeografike të shënuar në marginat e hartës së dytë, fare lehtë mund të përcaktohet edhe përmasa mesatare e hartave të përmendura. Në të vërtetë, sipas llogaritjeve përmasa mesatare në të dy hartat është përafërisht 1:300 000, që është rast i parë i tillë që mundëson zgjerimin e përmbajtjes së hartës me detajizime gjeografike të rangut më të ulët.

KONCEPTIMI FIZIOGRAFIK

Coronelli gjatë punës së tij kompiluese për hartografinë e territorit kosovar, ka bërë dy prova të konceptimit gjeografik të brendësisë së Evropës JL. Konceptimi i parë, përkrah thurja fiziografike dhe identifikimet e tyre, përpos që sjell përparim të jashtzakonshëm duke pasur parasysh mundësitë e asaj kohe, parashtrimi i informatave përcillet edhe me gabime. Sikur autori të ishte bazuar tërësisht në konceptimin origjinal, suksesi do të ishte gati i plotë, gjë që përkrah përmirësimit dëshmohej deri diku në hartën e mëvonshme. Por edhe ky lëshim mund të arsyetohet pasi që autori ka qenë në fillim të karrierës së tij hartografike, e për më tepër kur të kihet parasysh edhe natyra problematike e hartografiimit kompilues të territorit kosovar.

Në të vërtetë, konceptimi gjeografik i hartografuar në hartën e parë është prodhim i një kombinimi me atë të Bertellit (1572) përkrah fiziografia e terrenit dhe me atë të Mercatorit (1589) përkrah identifikimi i disa fenomeneve gjeografike që kanë prezencë fragmentare në pjesën juglindore të provës së Coronellit. Duke pasur këto harta për huazime fragmentare, tani konceptimi i ri Coronellit zën vend brenda hapsirës së »trekëndëshit« me brinj vargmalesh, hapsira e së cilës përfaqëson pellgun e gjerë të degës burimore të Drinit. Portretimi i ri cilësohet me një pasuri të madhe shënimesh gjeografike që pothuaj se rrënjësisht ndry-

shojnë pamjen e deri atëherëshme të kësaj pjese. Huazimet e lartë-përmendura nuk mund të diktohen vetëm nga përmbajtja me fletën që pason (112), atëherë shihet qarët konbinimi i lartëpërmendur. Siç cekëm edhe më lartë këto huazime nuk e ndihmuan fare konceptimin e ri, por për kundrazi e rëndojnë dhe e ulin vlerën e suksesit më të madh hartografues të territorit kosovar.

Të konceptimi hidrografik bëhen lëshime të mëdha, që lidhen me përkatësinë e poshtme pellgore të Lumit Drenica dhe Sitnica, të cilët në mënyrë të drejtpërdrejt ndaras lidhen me Drinën, kurse Lepenci megjithëqë gjendet në pjesën jugore të pellgut të Sitnicës dhe ka drejtim të rrjedhjes kah jugu, këthehet kah lindja dhe pastaj kah veriu duke u paraqitur si degë burimore e Lumit Rashka.

Konceptimi fiziografik në hartën e dytë të Coronellit që ka të bëjë me territorin e Kosovës, është përmirësuar në disa aspekte me realizimin e rrjetës së lumenjve. Duhet cekur se konceptimi i realitetit gjeografik të një hapsirë është arritur në bazë të rëndësisë së madhe që i është kushtuar prezentimit të rrjetës hidrografike të një regjioni nga autorët e hartave të vjetra. Prandaj, drejtimi i rrjedhave si dhe trajta dhe madhësia e pellgjeve të tyre janë thurur me kujdes të veçantë. Konceptimi hidrografik, në krahasim me hartën e konceptimit të parë, gjegjësisht, fiziografik i territorit të Kosovës në këtë hartë tregon ndryshime pozitive sidomos përsa i përket nomenklaturës, por ende ekzistojnë disa gabime të natyrës hidrografike. Tani në këtë hartë Lepenci është degë burimore e Vardarit.

Bie në sy se drejtimi i rrjedhave kryesore të Drinit të Bardhë, Lumit të Drenicës, të Sitnicës, si dhe të Lepencit të cilët kanë shtrirje VP-JL që nuk i përkasin realitetit. Megjithëqë prezenca e territorit të Kosovës përkah kompaktësia e kjahtësia, si dhe përkah marrjet nga shënime të antike dhe të regjioneve tjera (që na paraqitën në hartën e parë), cilësohet mjaft realisht. Por, prap përkatësia e poshtme e Lumit të Drenicës si dhe e Sitnicës ka mbetur pa zgjedhur, sepse rrjedhjet e tyre ende tregohen paralele që derdhen ndaras në Drinë si degë burimore të saj. Gabimi i madh i përcaktimit të përkatësisë së këtyre lumenjve rrjedh nga ngjashmeria e hidronimit Drenica, a cila në hartën e mëparshme emërohet edhe si Drinica, pra emertime që kanë shqiptim të aftër me njëra-tjetrën. Prandaj, kjo është arsyeja që Coronelli mendon se këto rrjedhje duhet të jenë pjesë burimore të pellgut të Drinës.

Marrë në përgjithësi, rrjeti i lumenjve të Kosovës të paraqitur në këtë hartë, përkah numri i rrjedhjeve gati është identike me hartën e parë, por përkah identifikimet e tyre me emertime hasim një realitet. Gjithsesi, rrjeti i lumit të pellgut të Drinit të Bardhë është më i qartë dhe më i saktë, në krahasim me anën lindore të rrjedhjeve kosovare.

KRAHINAT

Prej identifikimeve të anëve të Kosovës në këtë hartë janë të identifikuar dy tërësi, që në të vërtetë kanë të bëjnë realisht me pjesët kryesore që përbëjnë këtë regjion. Derisa në hartën e dytë, na paraqitet vetëm një identifikim visor.

OROGRAFIA

Orografia e terrenit nga ana lindore në hartë është treguar me skicimin e konuseve të hijësuar. Shpendarja e tyre në grumbuj malesh në trajtë harkore, gati me intensitet të njëjtë rrethojnë të gjitha shënimet që kanë të bëjnë me territorin kosovar. Në mesin e këtij brezi unazor të maleve janë piktoruar disa male të vetmuara pa identifikime emërtimesh, të cilat duhet t'i përgjigjen maleve qendrore të Kosovës, para Maleve të Drenicës.

Shpërndarja e maleve gati është identike në të dy hartat, përveç se në konceptimin e dytë paraqiten dy male të përgjatura që ndajnë pellgun e Drinit të Bardhë nga ai i Drenicës dhe këtë nga ai i Sitnicës.

Konceptimi i dytë orografik si dhe emërtimet e tyre në hartën e dytë janë të karakterit bukur të ndryshuar. Tani vargmali tredegësh nuk figuron, kurse detajizimi i tyre brenda shënimeve gjeografike të Kosovës është më real. Gjithsesi, vërehet përparim i dukshëm i portretimit orografik.

Nomenklatura që ka të bëjë me oronominë e Kosovës në hartën e parë është e rrallë dhe e lidhur vetëm për të degët e vargmalit të huazuar nga Bertelli, emërtimet e të cilëve merren nga literatura e kohës së Renesancës dhe asaj antike. Përkundrazi, harta e dytë përpos redukimit të vargmaleve të Bertellit, sjell emërtime reale për malet e Kosovës.

VEGJETACIONI

Prezenca e pyjeve në hartat e Coronellit marrë në përgjithësi gjithnjë figuron si element i rëndësishëm informues në një anë, dhe i mirëseardhur për mbulimin e hapsirave që mbëteshin pa informata gjeografike, nga ana tjetër. Prandaj, identifikimi i tyre piktorial dhe përhapja hapsinore e pyjeve është punuar me kujdes të veçantë. Shpërndarja e pyjeve tregohet me figurimin e trajtës së kunorës të skicuar dhe të hijësuar me tush të zi dhe të ngjyrosur me të gjelber. Shpërndarja e drunjve mund të këtë lokalizim të vetmuar ose të grumbulluar.

Në hartën e parë areali i pyjeve është më i dendur në pjesën lindore të Kosovës në krahasim me hartën e dytë, kurse në pellgun e Drinit të Bardhë është identik.

Derisa, në pellgun e Drinit të Bardhë janë të shpërndarë katër areale pyjesh, nga dy në të dy anët e rrjedhjes kryesore që kanë përmasa të vogla, kurse në lindje dhe veri të Fushës së Kosovës kemi shtrirjen e dy komplekseve të mëdha arealesh pyjore (në hartën dytë me rallesë të dukshme).

VENDBANIMET

Gjithsesi, kontributi më i vlefshëm i Coronellit për hartografin e territorit kosovar lidhet edhe me tregimin e shpërndarjes së drejt të rrjetit të vendbanimeve. Qysh në hartën e parë, horizonti i gjerë i njohurisë për vendbanimet e Kosovës, reflektohet me prezencën e qendrave urbane dhe katundeve të mëdha. Vendbanimet më të rëndësishme janë treguar me skica të kishave, që ka të bëjë me prezencën e këtyre në ato vende, kurse me pika lokalizohen vendbanimet me rëndësi të dorës së dytë. Në të vërtetë, me këto dy lloje shenjash është prezentuar edhe aspekti i kategorizimit hartografik të vendbanimeve.

Nomenklatura që ka të bëjë me vendbanimet e Kosovës përcjellët me identifikimin e parë emëror dhe variantat tjera ekzistuese, kurse për disa vendbanime ipen edhe shënime tjera; të karakterit historik, të funksionit administrativ, të dhëna statistikore për numrin e shtëpive, të banorëve, përkatësinë fetare etj.

Shënimet që i përcjellin emërtimet, në të dy hartat ndryshojnë vende vende përkrah shpjegimet, por marrë në përgjithësi prezenca e tyre jo vetëm që i kalon hartografimet e deri atëherëshme, por edhe mundësitë e vetë hartës. Këto shënime sikur edhe më parë pasurojnë përmbajtjen hartografike, gjeografike dhe historike të Kosovës. Sipas të gjitha gjasave këto të dhëna janë grumbulluar nga personi i ushtruar në lëmin e hartografimit, i dërguar pikërisht për këtë qëllim nga Coronelli gjegjësisht, Repubblika e Venedikut, i cili përkah vëllimi dhe realiteti i shënimeve më së shumti ka qëndrur nëpër vendet e pellgut të Drinit të Bardhë.

Bie në sy se autori i hartës bënë përpjekje që vendbanimet e kohës së tij t'i identifikojnë edhe me lokalitetet antike ose mesjetare, që në disa raste janë të suksesshme.

Harta e dytë përkrah ana e paraqitjes së vendbanimeve konsiderohet më cilësore. Pasurimi i përmbajtjes në këtë aspekt, përpunon kategorizimit të tyre është arritur me praninë e një elementi të ri, me pikturimin e lokaliteteve. Vendbanimet e mëdha janë paraqitur me pikturimin e kalave me ndertesa përbrenda, kurse vendbanimet më të vogla pasqyrohen vetëm me një skicë të ndertesës që kanë pamje të njëjtë.

Në mbështetje të këtij pikturimi të vendbanimeve, përkah dimencionet dallohet kalaja e Prizrenit dhe numri i madh i ndër-

tesave brenda saj. Pikturimi i panoramës së këtij gyteti është dhënë nga një pamje e largët përspektive. Gjithsesi, kjo skicë mund të konsiderohet padyshim si plani i parë i një vendbanimi kosovar që është punuar ndonjëherë e që ka arritur të përjetojë kohën deri në ditët tona. Kjo panoramë, duke mos aluduar në identitetin e saj, është njëkohësisht pamja e parë e një vendbanimi kosovar nga largësia ajrore dmth., nga »shikimi i zogut«.

S'ka dyshim se lokalizimi i vendbanimeve është bërë në saje të përkatësisë pellgore, që ka shërbyer si orientim kryesor për realizimin sa më të plotë hartografik. Kështu, duke u nisur nga kjo, vendbanimet hasen kryesisht të lokalizuar pranë lumenjve. Sikurse edhe në hartën e parë edhe në këtë, Coronelli vendbanimet i përcjelli me disa sqarime që aty-këtu ndryshojnë. Kështu përpos shënimeve të lartëpërmendura në këtë hartë ipet edhe përkatësia e popullsisë sipas religjionit; shënja gjysmëhane si thotë autori për turq, me kryq katolikët dhe me trekëndsh për grekët (fjala është për ortodoksët).

KOMUNIKACIONI

Në hartën e parë sa i përket territorit të Kosovës, prej shënimeve të komunikacionit, hasim vetëm urat, prej të cilave disa janë identifikuar si ura druri (Ponte di Legno). Derisa, në hartën e dytë ky aspekt shënimesh është pasuruar me elemente të reja. Këtu përpos urave të drurit që i hasim edhe në hartën e mëparshme, në mënyrë të theksuar me dy vija paralele tregohet rruga, që është risi e parë e këtij lloji në përmbajtjen gjeografike të Kosovës.

Rruga e trasuar në hartë ka trajtë harkore, që shkon duke lidhur pjesët jugore të Rrafshit të Dukagjinit me ato të Fushës së Kosovës. Kjo rrugë fillon prej Gjakovës dhe shkon në Bistrazhin — Piranë — Prisrend — Krajmirovë — Ribare deri të Vragolia. Kjo përmbajtje e re hartografike për territorin e Kosovës, nëse kemi parasysh itinerarët romike të është quajtur »Tabula Picta« të shekullit IV., është rasti i dytë gjatë rrugës së hartografimit.

TRANSKRIPTIMI I EMERTIMEVE

Marë në përgjithësi transkriptimi i emërtimeve gjeografike për territorin e Kosovës është bërë sipas një ecurie të veçantë nga autori. Në të vertetë, për identifikimin e thirrjeve të fenomeneve gjeografike të Kosovës, përpiluesi i hartave bazohet në emërtimet popullore, e jo ato zyrtare turke, rast që është për t'u përmendur, sepse është indikator i punës origjinale të autorit. Duke shqyrtuar

më gjërësisht mënyrën e shkrimit të emërtimeve shifet se këto informata janë marrë drejtpërsëdrejti nga terreni, sipas të gjitha gjasave marrësi dhe dhënësi kanë qenë personel kishtar.

Menyra e shënimit të emërtimeve sa i përket identifikimeve gjeografike të Kosovës, është bërë me kombinimin e disa metodave. Në radhë të parë emërtimet janë të transliteruar nga origjinalja (ose variantat lokale të thirrjeve) në italishte, prej të cilave disa janë të italianizuar me prapashtesën — o, pastaj në trajtën e thirrjes tradicionale në italishte, të përkthyer, si dhe identifikimi i lokaliteteve edhe me thirrjet antike ose mesjetare.

Ndryshimet që i ndeshim në hartat e lartëpërmendura në aspekt të nomenklaturës, prova e dytë dallohet përka pasuria më e madhe e numrit të emërtimeve si dhe realiteti i shqiptimit të tyre.

PERFUNDIM

Qëllimi këtij punimi është hedhja e një shikimi retrospektiv ndaj dokumentacionit hartografik duke shqyrtuar aspektet e ndryshme të inventarizimeve të vjetra, por gjithsesi të çmueshme për studime të ndryshme bashkëkohëse. Coronelli në provën e parë të tij të konceptimit hartografik të brendësisë së Evropës. J.L., gjegjësisht të territorit kosovar, cilësohet me risi të rëndësishme të realitetit gjeografik. Ky prezntim i Kosovës me përmbajtje të re ndaj botës se kulturuar, shikuar në pikëpamje të pasurisë së informatave paraqet një këthim të hovshëm kah korrektesia hartografike e kesaj pjese të Evropës. Si thotë edhe vet autori në titullin e atlasit të lartëpërmendur »se përmbajtja e hartave është thurur në bazë të shënimeve më të reja të marra nga shumë burime gjeografike të papublikuara asnjëherë më parë«, sa i përket territorit kosovar nëpërmes kesaj harte është një e vertetë e dëshmuar.

Risitë e përmbajtjes gjeografike të shtruar në hartë kanë për qëllim të pasurojnë dhe të ngrisin sa më shumë vlerën e hartës, por njëkohësisht janë njaft interesante edhe për qëllime të ndryshme studimi.

Së pari në këtë hartë për herë të parë ndeshim një balansom të informatave për tërë hapsirën e Kosovës në aspekt kompleks gjeografik.

Tani në fiziografinë e Kosovës dallohen dy nëntërësi që i përkasin pellgut të Drinit të Bardhë dhe të Sitnicës.

Rrjeti hidrografik për herë të parë është i koncentruar dhe detajizuar mjaft mirë, dhe shikuar në tërësi mjaft kompakt. Gëbimi i dukshëm hidrografik ka të bëjë me përkatësinë e poshtme të rrjedhjeve kryesore, që në të vertetë, kanë të bëjnë me problematikën hartografuese të regjioneve për rreth territorit kosovar.

Marrë në përgjithësi, nder elementet fiziografike si dhe gjeografike, orografia e terrenit nuk është konceptuar mirë dhe se ndentifikimet e tyre me emërtime nuk përputhen me realitetin.

Numri i vendbanimeve është i madh dhe i pakrahasueshëm për krahasueshmëri të lokalizimit dhe kategorizimit të tyre me hartat e deri atëherëshme. Megjithatë, ndër to hasim edhe pasaktësi për krahasueshmëri ose identifikimi me lokalitete antike, duke marrë parasysh konceptimin e tyre në hartat më të vjetra, mund të themi se parafytyrimi i vendbanimeve është i suksesshëm.

Nga shënimi i funksionit administrativ të Pjesës dhe Vuçiternës shihet se pjesa më e madhe e territorit kosovar për krahasueshmëri të mëdha ka qenë e ndarë në dy sanxhaqe, në atë të Dukagjinit me qendër në Pejë, dhe në atë të Vuçiternës.

Shënimet për përkatësinë fetare të vendbanimeve sipas numrit të shtëpive ose të banorëve na reflekton mjaft mirë shkallën e islamizimit të popullsisë kosovare.

Gjithashtu edhe harta e dytë e Coronellit që ka të bëjë me territorin e Kosovës, tregon se përparimi në hartografinë e këtij regjioni është më i madh në krahasim me atë të parën. Konceptimi fiziografik në përgjithësi, tani është më afër realitetit, kurse përmbajtja gjeografike e pastruar nga shënimet e tepërta. Duhet shënuar konstatimin se të dhënat gjeografike që kanë të bëjnë me hapsirën pellgore të Drinit të Bardhë, duke përfshirë rrjetin lumor, portretimin malor, arealin e pyjeve, si dhe skicimin, lokalizimin, kategorizimin e vendbanimeve, pastaj shënimet të emertimeve duke pasur parasysh edhe sqarimet përcjellse deri diku, janë mjaft korrekte. Kjo tregon se kjo pjesë e Kosovës në këtë kohë mban primatin në pikëpamje të portretimit real hartografik, në krahasim me pjesën qendrore dhe lindore të Kosovës.

Përmbajtja e kësaj harte në krahasim me hartën e parë është përmirësuar dëshëm në shumë aspekte.

Balansimi i informatave në hapsirën kosovare është dëshëm më i qëlluar.

Pikturimi i vendbanimeve kryesore është gjë e re për praktikën e hartografimit të territorit kosovar. Kategorizimi i vendbanimeve për herë të parë është bërë në tre shkallë.

Është bërë spastrimi efektiv i lokalizimeve dhe i identifikimeve të disa fenomeneve gjeografike, të orografia dhe oronomia, hidrografia dhe hidronimia, vendbanimet etj.

Gjithsesi, lista e shënimeve gjeografike në këto harta është e madhe dhe e shumëllojshme, të vlefshme për shumë aspekte studimi.

L I T E R A T U R A

- [1] Bagraw, L; *History of Cartography*, H.U.P., 1964
- [2] Bertelli; *Carta dell 'Evropa Sudorientale*, Venezia, 1572
- [3] Bonasera, F; *Vincenzo Coronelli geografo, cartografo, constructore di globi*, Miscellanea francescana 51, 1051

- [4] Bonasera, F; Vincenzo Coronelli — Cosmografo della Serenissima (1650—1718) — Vita e opera — Comitato per la Onoranza nelle Marche al Padre Vincenzo Coronelli del tridentaria della nascita — 1950
- [5] Ćerabregu, M; Kosova në hartat e vjetra, FSHNM, Prishtinë, 1977
- [6] Coronelli, M.V; Atlante Veneto, T.I., Venetia, 1694
- [7] Coronelli, M.V; Corso geografico universale..., Venetia, 1692
- [8] Gohm, D; Antique Maps, London, 1972
- [9] Lister, R; Antique Maps and their Cartographers, London, 1970
- [10] Marković, M; Studij predodžbe fiziko-geografskih elemenata na kartama jugoslovenskih zemalja od najstarijih dokumenata od kraja 17. stoljeća, Disertacija, Zagreb, 1964
- [11] Mercator, G; Atlas sive Cosmographiae, Duisburgi, 1595
- [12] Skelton, R.A; Maps — A Historical Survey of their Study and Collection, Chicago, 1972
- [13] Tooley, R.V; Maps and Map-makers, London, 1972 (edic. i pestë)

THE CONTRIBUTION OF M.V. CORONELLI ON MAPPING THE CENTRAL PART OF SOUTH-EASTERN EUROPE

Dr. Muharrem Ćerabregu

Summary

South-Eastern Europe, the part south of Sava and Danube rivers, which happened to be under the Turkish Empire since the Battle of Kosova (1389), from a cartographic point of view represented a less well known region of Europe until the second part of the XVII — th century. As a consequence, the central part of South-East Europe, today the territory of the Socialist Autonomous Province of Kosova, was a mess of geographical data on map representations at that time. This was due to the complexity of the watersheds and sources of the main rivers of South-East Europe.

In the Middle of XVII century, Coronelli, the chief geographer of the Republik of Venice and the founder of the society »Agronomy, also known for cartographic work, made a great step forward on mapping the central part of South-East Europe. His map representations, besides being excellently designed, contain a large number of geographical data, as well as historical, statistical, place name variations, textual descriptions, etc. This complex representation of geographical information concerning the Kosova territory was the most successful apex of Italian cartographic attempts to portray the central part of South-East Europe.

PRILOG M.V. CORONELLIJA ZA KARTOGRAFISANJE CENTRALNOG DJELA JI EVROPE

Dr. Muharrem Ćerabregu

Sažetak

Jugoistočna Evropa, dio na jugu Save i Dunava, koja se od Kosovske Bitke (1389. god.) nalazi pod Turskom Imperijom, u pogledu kartografisanja predstavlja manje poznatu regiju Evrope do druge polovine XVII stolec. Kao posljedica tog nepoznavanja, centralni dio JI Evrope, odnosno teritorij Socijalističke Autonomne Pokrajine Kosova, je prestavljen jednom gužvom geografskih podataka na kartografskim predodžbama tog vremena. Razlog ovog zaostajanja ne odnosi se samo na izoliranost Turske Imperije, nego

također i na kompleksnost vodorazdela i izvornih krakova glavnih rijeka JI Evrope.

Svakako, prema važnošću geografskog položaja na poluostrvu i po podzemnim bogatstvima, Kosovo ima veliku ulogu, što dokazuje križanje glavnih međunarodnih magistrala i bogatstvo obojenim metalima.

Oko sredine XVII stoljeća, Coronelli, glavni geograf Mletačke Republike i osnivač poznatog društva »Agronauti«, također poznat po kartografskim radovima, je učinio važan korak naprijed za kartografisanje središnjeg djela JI Evrope. Njegove kartografske predodžbe, osim odlike odličnog dizajna, sadrže veliki broj geografskih podataka, kao i povjesne, statističke, variante naziva mesta, tekstualne opise, itd. Ovaj sadržaj kompleksnih geografskih podataka koji se odnosi na teritoriju Kosova, predstavlja vrhunac pokušaja talijanskih kartografa za grafičko oblikovanje središnjeg djela JI Evrope.

FIZIONOMSKA REGIONALIZACIJA ZAPADNODRENIČKOG POBRĐA

Riza Çavolli

Zapadnodreničko pobrđe obuhvata prostor između dukađinske kotline i Drenice. Ima meridijalni pravac pružanja od Mokre Gore na severu do planine Crnoljeve na jugu. Blago brdovito zemljište severa nastavlja se prema površi Prekoruplja i uzdignutih delova Koznika, Gradišta i Milanovačke planine. I geološka osnova ovog područja pokazuje takvu zonalnost. Severni delovi su pod kenozojskim sedimentima koji ustupaju mesto mezozojskim formacijama a na krajnjem jugu imaju veće rasprostranjenje paleozojske tvorvine. Prostor je zaštićen od hladnih vetrova sa severa Mokrom Gorom i srednje godišnje temperature pokazuju izrazitu vrednost idući od severa ka jugu. Oskudnost u padavinama je glavni limitirajući faktor u ekološkom diferenciranju. U opštim karakteristikama to je područje otvorenog agrarnog pejzaža. Ono što čini jedinstvenim ovaj prostor je dominantnost poljoprivrede sa tipičnim polikulturnim oblicima proizvodnje.

U diferenciranju ovog prostora razlikujem predeo severnog podbrđa, istočno i zapadno Prekoruplje.

1. *Severno pobrđe* kao celina obuhvata prostor između Pečkog Podgora i reke Kline u kojem se nadmorska visina kreće između 500 i 1000 m. To je prostor homogeno u pogledu geološke građe jer isključivo su zastupljeni pliocenski sedimenti. Izvesna diseciranost reljefa je posledica većeg prisustva rečnih tokova Kujavče, Jošanicom, Renovačkom i Klinom dajući izgled raznovrsnosti morfologije reljefa. Klimatski elementi ne pokazuju velike razlike jer u celom prostoru godišnji izoterma je 11°C a srednje godišnje padavina ne prelazi 800 mm.

Iako pobrđe je relativno veće nadmorske visine agrarni pejzaž dominira sa više od 53% a u strukturi obradivih površina njive imaju prevalentan udeo. Sva naselja pokazuju udeo od preko 60% u obradivim površinama. Drugi značajan elemenat pejzaža čine šume sa blizu 37% površina. Po razvijenosti one pripadaju tipu niskih šuma u kojima je isključivo rasprostranjen hrast. I pored

toga što je ova biljna formacija prilično zastupljena, veći deo je nerazvijen i pod šikarama. Zbog svih tih karakteristika, one nemaju značaja za iskorišćavanje u industrijske svrhe, već za potrebe stanovništva za ogrev. Naselja u kojima šume čine glavni element pejzaža su Krajina, Tučep, Osojane, Belica, Poljane i Dušević. Livade u okviru obradivih površina sa više od 8% čini treće element pejzaža. S obzirom na fond stoke od 8.700 krupne i 7.800 sitne ove površine pod livadama i one pod pašnjacima nisu dovoljne za razvoj stočarstva.

Na 150 km² živi 10.043 stanovnika ili prosečno na svakom 1 km² 67 stanovnika. U agrarnoj gustini ne pokazuje svoju homogenost kao u gustini naseljenosti. Naime, naselja imaju 0,50 ha obradivih površina po stanovniku o druga polovina ima od 0,50 do 1 ha.

Agrarni geografski potencijal prirodne osnove je osnovna komponenta takođe i u ekonomskoj orijentaciji. To je agrarni kraj sa 88% aktivnog stanovništva uključujući u primarne delatnosti. Ogromne rezerve lignita, utvrđen je na području od Kline do Tučepa na reci Kujavče, i buduće njihovo iskorišćavanje u mnogome bi doprinelo društvenoj transformaciji ovog kraja. Glavna naselja su Jošanica, Sićevo i Štupelj.

2. *Istočno prekoruplje* prostire se od reke Kline do Crnoljevske planine. U odnosu na severno podbrđe ovaj prostor je niži sa 500 do 700 m nadmorske visine. Čitav ovaj kraj je nagnut prema dukadinovskoj kotlini. U geološkoj gradnji pokazuje svoju postupnost. Dok prema severu i dalje dominiraju pliocenski sedimenti, prema jugu sve više dolazi do izražaja gornjokredni fliš.

Izražena kontinentalnost i sušnost su dva bitna ekološka elementa, koji su neposredno uticali na razvoj pejzažne fizionomije. Kao rezultat toga javlja se odnos 50 odsto obradivog prema 50% neobradivog zemljišta. U kultiviranom agrarnom pejzažu prevalentni udeo imaju njive sa 90%, dok u kategoriji neobrađivanog zemljišta dominantni elemenat pejzaža čini šuma sa 80%. Šumski kompleksi naročito su zastupljeni u naseljima Đurdevik, Belanici, Vrninici, Golubcu, Pročici, Čabiću i Seniku.

U ovom prostoru istočnog Prekoruplja živi 24.153 stanovnika ili 3,8% stanovništva Dukadina. Bolji prirodni uslovi omogućili su veću koncentraciju stanovništva i sa 99 stanovnika na 1 km² daleko je naseljeniji od prostora severnog podbrđa.

Poljoprivreda je glavni oslonac u privrednoj strukturi ovog kraja. Međutim, sam način iskorišćavanja zemljišta, nedovoljna intenzivnost usled nedovoljne mogućnosti investiranja u poljoprivredi doprineli su slaboj afirmaciji u ovoj privrednoj grani. Koliko je poljoprivreda kao privredna grana dominantna pokazuje podatak da u njoj je uključeno blizu 87% aktivnog stanovništva kraja.

3. *Zapдно prekoruplje* obuhvata planinski prostor Koznika, Gradišta, Milanovca i Crnoljeve. Morfološka raznovrsnost je rezul-

tat spuštanja duž rasednih linija a reljefna struktura je dinamičnija. Inače prostor čini zemljište između 500 i 1000 m nadmorske visine. Najniži delovi su oko reke Miruše i njenih pritoka. Geološku osnovu Grebnika, Koznika i Gradišta čine eruptivne mase moćnog serpentina i dižabaza. Prema planini Milanovac i Crnojlevo preovlađuju krečnjaci gornje krede. Od svih celina ovaj ima južniji položaj a blizina Belog Drima omogućava prodiranje uticaja Jadranskog mora. I pored relativno uzdignutog reljefa srednja januarska temperatura vazduha se kreće od 0 do -2 a julska između 20 i 22°C a godišnja količina taloga nije veća od 800 mm.

Glavni element pejzaža čine šume koje su zastupljene više od polovine zemljišta (50,6%). Naročito se ističu naselja sa šumskim kompleksima kao što su: Iglarevo, Kijevo, Svrka, Zatrić, Labučevo, Ostrozub, Ponorci, Blaca, Javor, Lužnica i Slopuzane u kojima se udeo pod šumama kreće od 60 do 79%. Odmah iza njih je otvoreni agrarni pejzaž sa 23,3% zemljišta koliko zauzimaju pašnjaci i livade zajedno (23,9%). Dok udeo obrađenog zemljišta je nedovoljan, relativno dobra krmna baza je povoljno uticala na razvoj stočarstva. Sa fondom od preko 8.500 krupne i oko 11.000 sitne stoke predstavlja povoljnu osnovu za unapređenje ove privredne grane.

U prostoru od 56 km^2 živi 18.315 stanovnika sa prosečnom gustinom naseljenosti od 56 stanovnika na 1 km^2 . To je prostor manje atraktivan i sa 56 stanovnika na 1 km^2 je najnenaseljeniji kraj zapadnodreničkog područja. Ekonomsko valoriziranje prostora je orijentisan na aogrnarom-stočarskom potencijalu i mogućnostima eksploatacije hromove rude u Kozniku, Gradišti i boksita kod Grebnika. Značajna naselja su Blaca, Gucat, Iglarevo, Kijevo, Ostrozub itd.

REGIONALIZMI FIZIONOMIK TE KRAHINES KODRONORE TE DRENICES PERENDIMORE

Prof. dr Riza Çavolli

R e z i m e

Drenica Perëndimore shtrihet në mes të Rrafshit të Dukagjinit dhe Drenicës. Ka shtrirje meridionale prej Mokra Gores në veri deri të mali i Caraleves në jug. Në plastikën e relievit pjesët kodrinore të veriut vazhdojnë në pllajën e Prekoruples në mes dhe pjesëve të ngritura të Koznikut, Gradites dhe malit Milanovac në jug. Në këtë drejtim vrehen ndryshimet në formacionet gjeologjike. Në fillim me sedimente të kenozoikut, duka vazhduar në atë të mezozoikut dhe në fund në jug shfaqen edhe ato të paleozoikut. E tërë krahina e Drenices Perëndimore zën një territor prej 701 km^2 në të cilën jetojnë afro 53.000 banorë. Në valorizimin ekonomik shquhet si krahinë bujqësore në të cilën lavertaria, blegtoria dhe deridiku pylltaria përbëjnë komponentën kryesore të veprimtarisë ekonomike.

PHYSIOGRAPHIC REGIONALIZATION OF THE DRENICA WESTERN HILLSIDE

Prof. dr Riza Çavolli

S u m m a r y

Western Drenica spreads between Dukagjin Plain and Drenica. It has a meridional orientation, starting from Mali Mokna in the North to the Mountains of Caraleva in the South. This hillside includes terrains of Prekoruplje including the mountains of Koznik, Gradina and Milanovac in the South. In the same direction can be distinguished the variations of geological formations. In the Northern part can be distinguished the sediments of cainozoic, while towards the South are present mesozoic and Palaeozoic. Drenica territory covers an area of 701 km² with a population of 53,000 people. In the point of view of economic calorization, this part has a agricultural character where is mainly practised cultivation, cattle-breeding and less forestry, that some times are the main economic activities.

MIKROREGIJA »BJESHKËT E NEMUNA« — PROKLETIJSKA*

Qazim Lleshi

I — PRIRODNE ODLIKE

Ova mikroregionalna celina obuhvata najjužnije organke dinarske planinske oblasti koji su u ovom delu, usled potiska — bočnog sa dveju strana, pretrpele skretanje dinarskog pravca (severozapad-jugoistok) na poprečni (jugozapad-severoistok). S toga se kosovski deo ovog planinskog niza pruža od granične jugoslavensko-albanske granice na sektoru zapadno-jugozapadno od Đakovice: graničnu liniju između prokletijske i šarske planinske oblasti čini razvojna linija koja ide uzvodno od Erenikove pritoke Kamenice, počev od njenog ušća između sela »Shishmoni i Bokës« i »Shishmoni i Rrafshit«, uzvodno do sela Qerret (Ceret) i Qafë e Stoberzës (892 m) na samoj graničnoj liniji između SNRA i SFRJ do Mokre Gore i Suve Planine na severoistoku (kote 1.733, 1.750 i 1.455 m.). Ovaj planinski sektor predstavlja ujedno i najviše partije jugoslavenskih Prokletija sa mnogobrojnim visovima od preko 2.000 m. nv., koji kulminiraju na vrh Đaravica (2.656 m.), koji ujedno predstavljaju i najvišu visinsku tačku SAP Kosova i SRS.

Dubokim poprečnim dolinama klisurastog oblika (Pećske i Dečanske Bistrice), kosovski deo planinskog sklopa Prokletija podeljen je na 3 zasebne podgrupe:

(I) *Prvu grupu* čine planine severno i severo-istočno od Pečke Bistrice, koja blago počinje Suvom Planinom iznad Dukadinske

*) Rad predstavlja 4. nastavak regionalne obrade Kosova prema manjim: srednjim i malim regionima koju je autor objavio u pređašnjim brojevima »Zbornika«: (1) »Prirodne odlike Kosova«, Zbornik Radova PMF u Prištini, Br. 3/1975, Sveska »B« — Geografija, pp. 167—207; (2) »Kosovsko-Moravska mezoregija«, Zbornik Radova PMF u Prištini, Br. 6 (1979—80) pp. 259—281; »Mikroregija Dukadinske Ravnice«, Zbornik R. 7/1981—2, pp. Isti rad je započeo autor još 1960. objavljivanjem u »Përparimi-ju«.

Ravni kod potoka Lushtë (Ljušta) i Mokre Planine. Od Mokre ovaj planinski venac skreće ka jugo-zapadu i ide do Novog Vriha (1.812 m.), a, odavde produžava više ka zapadu gde se nastavlja preko vrha Pogled (2.155 m.) u visoki Žljeb sa vrhom Maja e Rusolisë (2.381 m.). Ovoj grupi dalje na zapadu pripadaju još Štedin (2.272 m.), Lajla (2.400 m.), Šiška Planina sa Hasanovim vrhom (1.871 m.), Begova planina sa Maja e Velakutit (2.015 m.) i Peklen (1.376 m.).

(II) *Drugu* — *centralnu grupu* sačinjavaju planine između Pećske i Dečanske Bistrice: Koprivnik sa Krš Čvrlje iznad Miloševac klisure (2.460). »Bjeshka e Strelcit« sa istoimenim vrhom — Maja e Strelcit (2.377 m.), koja se skoro okomito spušta ka jugu prema Krš i Čelis (»Kërsh i Qelisë«), Qafë e Nekut i Milyshevci (Miljuševac). Dalje ka zapadu centralnoj grupi pripadaju i »Malet e Lumbardhit« (Ljumbardske planine) sa vrhom »Gur i Kuq« (Žuti Kam — 2.522 m.), Malet e Nexhinatit (Nedžinatske planine — 2.341 m.) i Starac (2.426 m.).

(III) *Treća grupa* pruža se južno i jugozapadno od Dečanske Bistrice u pravcu zapada i jugozapada a sačinjavaju je Dečanska Planina (Bjeshka e Deçanit), Bjeshka e Vokshit (Vokša planina — 1.641 m.), Bjeshka e Junikut (Junička planina) sa vrhom Rrasa e Zogut (2.296 m.), Đaravica (2.656 m.), Bogićevica (2.103 m.), Maja e Ropës (2.505 m.), Maja e Qenit (Pasji vrh — 2.406) i Marjaš (2.530 m.).

Niži delovi ovih planina obrasli su gustim šumarcima, a viši borovom i smrčevom. Iznad šumskog i travnog pojasa izdiže se jednostavan zid od krečnjaka. Za čitav ovaj planinski predeo J. Cvijić navodi da je »jedan od najviših a nesumnjivo i najkrševitijih planinskih lanaca na Balkanskom Poluostrvu čiji beli, kršni i nazupčeni grebeni i vrhovi sastavljeni od krečnjaka i dolomita sa mnogobrojnim cirkovima čine impozantan utisak i zbog divljine ulivaju zebnju i strah«. ¹⁾ Uz to, visine i planinski grebeni kosovskog dela Prokletija su samo nešto niži od onih u slovenačkom delu evropskih Alpa.

Tektonski sklop Prokletija koga karakterišu njihovo naglo dizanje iz same Dukadžinske Ravni, te njihova veoma velika diseciranost poprečnim rečnim tokovima (Bistrice, Erenika i dr.) čine ovu planinsku mikroregiju teško prohodnim. Pastiri sa svojim stadima koji iskonski iskorišćavaju ovu regiju za ispažu uglavnom u letnjoj polovici godine uvidevši teškoće kojima su izloženi prilikom svakoletnjeg penjanja odnosno jesenjeg silazjenja s pravom su nazvali ove planine »Bjeshkë të Nemuna« u kosovskom delu, odnosno »Male të Nemuna« u crnogorskom, što oba naziva znače »proklete planine«, s tim što je pojam »b j e s h k ë« na albanskom

¹⁾ »Ledeno doba u Prokletijama i okolnim planinama«, Glas SAK, knj. 91, Beograd, 1913.

visoka planina i obično se odnosi na suvate dok »mal — i« obično označava planinski kat pod šumom, koji je niži. Naznačeni apelativi odgovaraju i stvarnosti (geografskoj) u delovima Prokletija u kosovskom odnosno crnogorskom delu. Naime prvi su višoj i suroviji od poslenjih, te i geografski potpuno odgovaraju naznačenim apelativima.

Morfologija Prokletija uslovljena je pružanjem krečnjačke zone trijasa i zone paleozojskih škriljaca, čije se granice protežu dolinom potoka Mylishevca (Miljiševca) i dr.

Zone paleozojskih škriljaca predstavljene su blago zatalasanim dugim prevojima, koji idu od 1.500 do 2.000 m. nv.

Krečne zone su usamljena bila — vrhovi Prokletija, koja su povezana pomenutim prevojima ili su pak oštro odvojeni većim klisurastim dubodelinama.

I — GEOLOŠKI SASTAV

Pečko-dečanski deo Prokletija sastavljen je poglavito od trijasnih stena delom i paleozojskih. Dolomitski krečnjaci trijasne periode se lepo zapažaju na otkrivenom dubokom rečnom profilu Pečke Bistrice. Od paleozojskih i mezozojskih formacija izgrađen je i planinski predeo južno od toka Ločanske Bistrice. Trijasni sedimenti su na ovom delu razvijeniji.

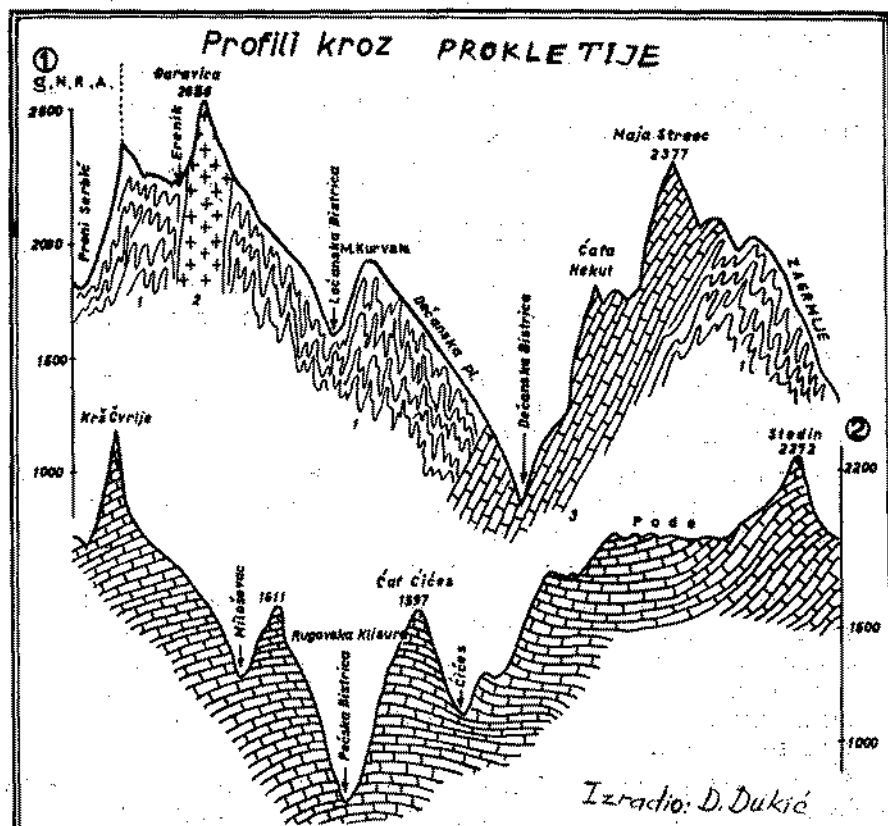
Paleozojske naslage izgrađuju najveći deo terena između Pečke i Dečanske Bistrice. Izdvajaju se kao stariji i mlađi paleozoik. Glavno rasprostranjene ove serije je zapadno od Manastira Dečana, u slivnom području Dečanske Bistrice.

Peščano-škriljeva facija mlađeg palezoika zahteva veći deo terena u graničnim delovima prema SR Crnoj Gori. Stratigrafski su najznačajniji crni koralogeni krečnjaci Marjaša, jer je na osnovu njih veći deo serije uvršćen u *gornji perm*. Najveće mase permotrijasnih kvarcnih stena (peščari, breče i konglomerati) javljaju se na Starcu.

U krečnoj oblasti Malet e Nexhinatit (Nedžinatske planine), Malet e Lumbardhit (Ljumbardske planine), Koprivnika i Mali i Strelcit (Streočka planina) razvijena je kompletna trijasna serija. Južno od ove linije, trijasni sedimenti javljaju se kao izolovane veće ili manje partije oko Marjaša, Maja e Qenit (Pasjeg vrha), Đaravice, Bješkha e Vokshit (Vokš planina) i Rrasa e Zogut.

Gabroidne stene se javljaju u široj oblasti Đaravičkog masiva. Centralne delove izgrađuju sosit, uralit i eufolit, gabrovi i gablo-amfiboliti. Izložene jakim pritiscima one su postale jako škriljave. Gabroidne stene Đaravičkog masiva su postrijasne, najverovatnije jurske starosti.

Serpentin i serpentinisani peridotiti javljaju se kao manje partije na južnim stranama Vokš planine, zatim zapadno od Rrasë e Zogut i nešto veća masa na desnoj obali Erenika, u srednjem toku niže Đakovice. Glavna masa serpentina javlja se međutim u pri-graničnom pojasu južno od Đakovice (Đakovački serpentinsko-peridotitski masiv) koji predstavlja niže-planinski ogranak susedne Prizrensko-Šarske Mezoregije, odnosno Mikroregije Šare. Serpentine grade najvećim delom harchburgiti, zatim duniti, dijalagiti, gabrovi i dijabazi.



Na južnim ograncima Juničnih planina (Maja e Zezë, Bjeshka e Batushës) razvijena je paleozojska serija izgrađena od klorit-sericititkih, klorit-aktinolititkih, filititkih i glinenih škriljaca, zatim metamorfoisanih kvarčnih peščara i konglomerata, sasvim retko i tamnosivih slojevitih krečnjaka.

Trijasni sedimenti u južnom delu Prokletija su razvijeni u potpunosti (Škoza), odnosno od grebena Škoze preko Junika.

Uopšte uzev, pojas Prokletija prate krečnjačka zona trijasa i zone paleozojskih škriljaca, čije se granice protežu dolinama Pečke i Dečanske Bistrice, dolinom potoka Milysheveci i dr. Zone paleozojskih škriljaca predstavljene su blago zatalasanim dugim prevojima koji idu od 1.500 do 2.000 m. visine.

Krečne zone predstavljaju usamljena bila — vrhove Prokletija, koje su povezane pomenutim prevojima ili su pak oštro izdvojeni većim klisurastim dubodolinama.

U oblasti Prokletija jako su rasprostranjeni mermerasti krečnjak, poglavito karakterističan za njen srednji i severni deo.

Ubiranja u oblasti Prokletija obavljala su se za vreme tzv. austrijske orogene faze, a zatim u vremenu pirinejske orogene faze ponovo ubrana. U savskoj fazi alpijske orogeneze završeno je glavno ubiranje Prokletija.

II — RUDNO BOGATSTVO

Obzirom da su podloga i masiv Prokletija sastavljeni pretežno od krečnjaka i dolomita, oni se mogu koristiti za dobijanje odličnog građevinskog materijala (kamena i mermera), koje se već duže vreme eksploatišu od strane pećskog predujeca »Uniks«. Odličan mermer se može dobiti na Hajli, u potesu Pečke Banje (Ilidže), Kožnjeru i drugde.

Ovoj mikroregiji granična prema jugu — Šarska predstavlja, kao što je više navedeno, Đakovički peridotit-serpentinski masiv, uz koji su vezane rezerve hromitne rudače, koje se već preko pola stoleća eksploatišu na reonu Babaj i Bokës — Deva, na samoj pograničnoj jugoslavensko-albanskoj zoni.

III — KARAKTERISTIKE PODNEBLJA

Poznate su karakteristike podneblja alpskih područja kojima bez sumnje pripadaju i Prokletije. Međutim, dva su faktora koji ih čine nešto diferentnim od evropskih Alpa, čiji jedan deo — istočni prelazi i u delu SR Slovenije. To su južniji položaj (oko 4° geografske širine južno od slovenačkog dela evropskih Alpa), kao i njihovo pružanje koje je, uopšte uzev pravca JZ-SI, dok u delu Kosova javljaju se u obliku velikog štampanog ćirilickog slova »Г«, tj. sastoje se od dva dela pružanja: između Đakovice i Peći opšti pravac pružanja je jug-sever, dok između Peći i T. Mitrovice zapad-istok.

Iz navedena dva faktora ekološke prirode, kao i nešto niže visine Prokletije u odnosu na slovenački deo evropskih Alpa (za

cca 200 m) proizilazi i opšta klimatska situacija planinskog područja u razmatranju (prokletijskog).

Za statističko praćenje vremenske situacije na Prokletijama, na žalost raspoložemo sa veoma ograničenim podacima koji se uglavnom svode na temperaturne i padavinske prilike, obzirom da na njima ne postoji ni jedna kompletna opservatorska stanica, izuzev dveju padavinskih stanica: Kućište (padavinske stanice u oblasti Rugova više Peći, na nadmorskoj visini od 1.115 m), kao i stanice višeg reda Junik (530 m), koja daje više karakteristike predalpskog pojasa Prokletija.

(1) Toplotne krilike

Prema grafičkim ilustracijama koje je priložio klimatolog dr. D. Đukanović, oblast kosovskih Prokletija obuhvaćena je godišnjom izotermom od $<9^{\circ}\text{C}$. Isti navodi da su srednje godišnje temperature u planinskim predelima Prokletijskog i Šarskog masiva snižavaju i niže od 4°C , što je za trostruko niža vrednost od srednje godišnje temperature u najtoplijim delovima SAP Kosova, a više nego dvostruko niže od srednje godišnje temperature u Pokrajini.²⁾

Drugi relativni temperaturni faktor na Prokletijama koga, na žalost, ne možemo statistički, tj. precizno izvagati, jeste osunčavanje. Isti ipak možemo približno pratiti i skoro sa tačnošću odrediti na osnovu dva važna indikatora. To su pružanje i suncu izloženosti pojedinih partija Prokletija, kao i vegetacijskog i uopšte florističkog sastava ovih planinskih delova na sektoru Kosova.

Po prvom prirodnom elementu, kosovske strane Prokletije su uglavnom eksponirane istoku (pojas između Đakovice i Peći) i jugu (deo između Peći i T. Mitrovice). Samo po sebi se može zaključiti da su one izložene veoma povoljno na dužinu, prema tome i toplini, sunčevog zračenja, i to kako dnevnog, takođe i godišnjeg. One su dakle prisojne položenosti.

S toga je deo Prokletija od Đakovice do Peći koji je istočno položen suncu, osunčen u prvoj polovici dana (od jutra do podne), dok drugi — istočno od Peći je podnevački položen, izložen sunčevim zracima tokom njihovog najintenzivnijeg dejstva — od 12 časova pa do kasnih popodnevni sati.

Drugi relevantni faktor relativne klimatske pitomine kosovskog dela Prokletija jeste njihova vegetacijska i floristička fizionomija. Na delu između Đakovice i Peći iznad pojasa kultura koji doseže sve do 1.000 m. nv., druga značajna i široka vegetacijska formacija koja se pruža u vidu pojasa između 1.000 i 1.700 m.

²⁾ Dr. Dragomir Đukanović: a) *Klima Kosova i Metohije*, Beograd, 1966, p. 10; b) *Klimatske karakteristike SAP Kosova*, Beograd, 1969, p. 3.

čine kestenove šume.³⁾ Na južno eksponiranim delovima u supodini dela Prokletija u reonu Istoka, do ovog rata, bili su zastupljeni i *vinogradi*. S toga se može meritorno zaključiti da kosovski, odnosno metohijski deo Prokletija predstavlja relativno najpitomiji deo Prokletija uopšte. U ovom pogledu on se može uporediti jedino sa južnim — prisojno eksponiranim južnim evropskim Alpima na delu italijanske državne teritorije. I tamo je slična vegetacijska zastupljenost: *kesten*, a u supadinskim i nižim položajima *vinogradi*. Obe ove vegetacijske, odnosno kulturne vegetacije su *polumediterranskog* karaktera, tj. ogledalo su uticaja izmešane umereno-kontinentalne i izmenjeno-sredozemne klime.

(2) Padavine i atmosferske pojave

Ovaj meteorološki elemenat je od presudne važnosti, pored eksponiranosti, za vegetacijsku fizionomiju i ekonomsko iskorišćavanje alpskog prostora Kosova.

(i) **Srednje visine padavina i njihova raspodela.** — Na sreću ovaj meteorološki elemenat možemo sa dosta tačnosti pratiti u planinskom reonu kosovskih Prokletija, a na osnovu padavinskih stanica u Kučištu i Juniku, praćenih tokom 15-godišnjeg perioda (1950—65) (Videti tabelarni pregled I).

Tabela I:

Srednje visine padavina (U mm)⁴⁾

Period	Kučište	Junik
Januar	99.5	146.5
Februar	116.2	166.1
Mart	94.1	115.4
April	83.3	99.5
Maj	88.8	90.2
Juni	74.7	65.9
Juli	52.9	48.7

Period	Kučište	Junik
Avgust	50.5	34.8
Septembar	71.8	73.6
Oktobar	127.4	132.3
Novembar	154.3	184.4
Decembar	132.5	180.2
Godišnje	1.146.0	1.337.6
Razlike	9.1	11.2
Zima	348.2	492.8
Proleće	266.2	305.1
Leto	178.1	149.4
Jesen	353.5	390.3
U vegetacijskom periodu:	422.0	412.7
u mm. (od aprila do septembra)	36.8	30.9
u % („ „ „ „)		

³⁾ Q. Lleshi, *Regjionalizmi fizionomik i Kosovë-Metohisë*, »Përparimik«, Nr. 1—2, Godina IX, 1963 (Prishtinë), p. 63.

⁴⁾ Dr. D. Đukanović, Tabela 23: »Srednje visine padavina (pod a).

Gore izloženi tabelarni pregled raspodele padavina tokom godine u ovoj mikroregiji pokazuje sledeće elemente:

(a) I pored toga što su merne stanice praktično u predalpskom delu Prokletija, one pokazuju da je godišnja količina padavina u ovoj mikroregiji iznad 1.000 mm taloga (ili preko 1.000 litara po kvadratnom metru površine). Ova količina je za cca 50% više od srednje količine koja pada u zapadnom delu Dukadžinske Ravni (oko 800 mm godišnje) ili za dvostruko više od količine koja pada godišnje u ravni uže-kosovske kotline i nižim delovima Kosovskog Pomoravlja. Razume se da najviše partije Prokletija primaju i veću količinu padavina, koje precizno i statistički ne možemo predstaviti, ali je verovatna pretpostavka da su one za barem 20% veće nego u dokazanim padavinskim stanicama Kučište i Junik, tako da smo skloni pretpostaviti da najviše partije Prokletija primaju srednju količinu preko 1.500 mm taloga godišnje.

(b) Druga je karakteristika da padavinama uglavnom obiluju jeseni i zimski meseci (oko 2/3 ukupnih padavina pripada ovom periodu), što daje mediteransko obeležje raspodele padavina sa sekundarnim maksimumom u proleće što je karakteristika ume-
rene kontinentalnosti.

(c) U vegetacijskom periodu (od meseca aprila do konačno sa septembrom) pada oko 1/3 ukupnih godišnjih padavina, što se veoma povoljno odražava na biljnom pokrivaču ove alpske mikroregije SAP Kosova, obzirom da ovaj kraj ima veoma veliku ekonomsku važnost u šumarskoj i ispašnoj eksploataciji.

Po dr-u D. Đukanoviću, »po visokoj količini padavina na teritoriji SAP Kosova se naročito ističu planinski delovi Prokletija sa preko 1.300 lit/m². Ovakav raspored padavina nastaje usled relativne blizine Jadranskog Mora i intenzivnije kondenzacije vodene pare i izlučivanja padavina pri nailasku i izdizanju vazduha relativno toplijih i vlažnijih vazdušnih masa sa juga i jugozapada«.⁵⁾

Srednji dnevni intenzitet padavina i ako uzeto u celini na teritoriji SAP Kosovo nije naročito velik (iznosi 7.8 lit/m²), u planinskim krajevima ipak se penje i do 11.3 lit/m².

Kišni periodi sa najmanje 10 uzastopnih dana sa merljivom količinom padavina su retki na Kosovu, ali u planinskim krajevima mogu iznositi i 22 dana.⁶⁾

⁵⁾ Dr. D. Đukanović, *Isto* — (b) pp. 8—9;

⁶⁾ *Isto*, Tabelarni prilog 13;

⁷⁾ *Isto*, Tabelarni prilog 14.

⁸⁾ Dr. D. Đukanović, *Isto* (b) p. 11

(iv) *Snežne padavine.* — Prema podacima pratećih kišomernih stanica (u Kučištu i Juniku), apsolutno najveća učestanost dana sa snežnim pokrivačem izmjerena je u Juniku (Vidi Tabelu V).

Tabela II:

Period	Kučište	Junik
Januar	11.1	12.7
Februar	12.7	12.1
Mart	12.7	11.3
April	10.6	10.4
Maj	13.1	11.8
Jun	10.8	10.0
Juli	6.3	5.9
Avgust	6.2	5.4
Septembar	6.0	6.6
Oktobar	6.7	9.1
Novembar	13.6	14.0
Decembar	12.3	14.0
Godina		
— Dani	122.1	123.8
— U%	33.0	34.0
Zima	36.1	38.8
Proleće	36.4	33.5
Leto	23.3	21.3
Jesen	26.3	29.7
U vegetacijskom periodu::		
— Dani	53.0	50.1
— U%	43.4	40.6

Ova se pojava po intenzitetu i najčešćim danima — više od 120 u godini najizrazitije manifestuje upravo na padavinama Prokletija i Šarskog planinskog masiva.⁷⁾

Tabela III: ili Apsolutni maksimum dnevnih padavina (U lit./m.²)⁸

Period	Kučište	Junik
Januar	51.9	87.2
Februar	65.4	73.2
Mart	47.3	83.5
April	57.8	60.5
Maj	36.9	53.2
Jun	32.1	38.2
Juli	50.2	43.0
Avgust	51.7	39.7
Septembar	50.0	127.0
Oktobar	60.7	104.6
Novembar	100.7	128.1
Decembar	70.0	96.6
Godišnje	100.7 (XI)	128.1 (XI)

Tabbela IV: Učestanost dana sa snegom⁹⁾

Period/Mesta	Kučišće	Junik
Januar	10.7	7.8
Februar	10.5	6.5
Mart	7.8	3.6
April	4.3	0.6
Maj	0.7	0.1
Jun	—	—
Juli	—	—
Avgust	—	—
Septembar	—	—
Oktobar	0.5	—
Novembar	3.2	1.8
Decembar	6.0	4.5
Godišnje	43.7	24.9
% od godišnjih	12.0	6.0
% od ≥ 0.1	35.8	20.2
Zima	27.2	18.8
Proleće	12.8	4.3
Leto	—	—
Jesen	3.7	1.8
U vegetacijskom periodu	5.0	0.7

Tabela V: Maksimalnevisine snežnog pokrivača (U cm)¹⁰⁾

Period	Kučišće	Junik
Januar	105	140
Februar	162	196
Mart	115	115
April	54	25
Maj	43	—
Jun	—	—
Juli	—	—
Avgust	—	—
Septembar	—	—
Oktobar	12	—
Novembar	42	15
Decembar	68	80
Godina:	162	196
— Cm.	—	—
— Mesec	Februar	Februar
Proleće	115	115
Leto	—	—
Jesen	42	15
U vegetacijskom periodu	54	196
U vegetacijskom periodu	54	25
Maksimalne: (Cm)	115	196
Dan/Godina	15 marta 1956	Februara 1954

⁹⁾ Isto, Tabelarni prilog 15.

¹⁰⁾ Dr. D. Djukanović, Isto (b) Tabelarni prilog 17.

IV VODE

Prokletije se odlikuju velikom izdašnošću vodom (preko 20 l/sek/km²) i praktično beznačajnim potrošačima, tako da one predstavljaju glavni snabdevač Dukandijske Ravni (Metohije) vodom. Ove vode koristi i par hidrocentrala podignute u posleratnom periodu.

Na Prokletijama izvire najveći broj rečnih tokova koje u celosti pripadaju slivu Jadranskog mora. One ujedno predstavljaju i vododelnicu između ovog i sliva Crnog mora. Velika izdašnost vrela Belog Drima — 5,05 m³/s. (na vodomernoj stanici Radavac u periodu 1925/60. g.) — ukazuje da ono ima mnogo veći hidrološki sliv od topografskog, jer vrelo daje 7,65 puta više vode nego što je ukupna količina padavina koja se izluči na topografsku površinu sliva. Pouzdano je da se to vrelo hrani i vodom koja ponire u krasu u slivu Ibra, na teritoriji SR Crne Gore.¹¹⁾

Prokletije su u vreme riške i virmske glacijacije bile pod lednicima, koji su se spuštali prema dnu kotline na istoku — obodnom pojasu Dukandijske Ravni. Najduži je bio Rugovski lednik (25 km), zatim Dečanski (20 km). Na samom dnu kotline (kod Peći) formirao se veliki supodinski lednik od kojeg su ostale najmoćnije morenske naslage u Jugoistočnoj Evropi, čija površina zinosi cca 335 km².

Na Prokletijama izviru i protiču svojim gornjim tokovima sledeći veći rečni tokovi: Beli Drim, obe Bistrice i Erenik.

Beli Drim izvire iz jakog kraškog vrela, neposredno ispod ulaza u Radavačku pećinu, na 580 m. a.v. Samo 15 m. od vrela, voda se ruši niz vodopad visok 25 m. Iznad vrela izdižu se šumovite padine Majë e Rusolisë (2.381 m) i Šiške planine (1.943 m.), koje iznad 1.500 m. a.v. prelaze u planinske pašnjake. Ove su planine izgrađene od moćnih trijaskih krečnjaka, koji leže na paleozojskim škriljcima. Velika prosečna izdašnost vrela Belog Drima (5,05 m³/s), ukazuje da se ono hrani sa površine od cca 230 km² i da se kroz njega podzemno odvodnjavaju zapadni deo Mokre planine (2.155 m), ceo Žljeb (2.352 m), Maja e Rusolisë, Šiška planina i nepoznate površine u topografskom slivu Ibra. Za ovakvo tvrđenje postoje — prema dr-u Dušanu Dukiću — hidrološki dokazi: specifični oticaj za vodomernu stanicu Radavac iznosi 220 l/sek. Za toliku izdašnost vrela bila bi prema topografskoj veličini sliva (23,1 km²) neophodna godišnja visina padavina od 6.950 mm. Međutim, ovde se izlučuje prosečno oko 1.000 mm padavina godišnje, tj. oko 7 puta manje. Uz koeficijent oticaja od 60%, kakav se može usvojiti za visoke planine i delimično skrašćene specifični oticaj iznosi 19 l/sek/km². S toga, dr. Dukić ne isključuje mogućnost da u vrelo Belog Drima izbija i manji deo vode iz reke Ibar, uzvodno od sela Baća, duž pukotina, kakve je zapazio u kanjonu Ibra. Na ovakvu mogućnost upućuje i relativno

mali specifični oticaj za sliv Ibra do Ribarića — 12,6 l/sek/km², a trebalo bi da je ova vrednost oko 16 l/sek/km².¹²⁾

Na dužini od 3 km. (od sela Radavca do Dolova) Beli Drim ima širinu korita od 10 do 20 m.

Sušica (L=18 km, F=48 km²) je leva desna pritoka B. Drima u koji utiče ispod vrela na 500 m. Ona je tipičan planinski tok, koji na 15 km dužine ima pad od 1.260 m. Protiče kroz klisuru i kanjon dubok preko 600 m (ispod Hasanovog vrha) — preinačeni valov sušičkog lednika, koji je na ulazu u ravan nataložio morenske naslage debljine preko 200 m. U njima i gubi izvesnu količinu vode. Veoma razvijena erozija produkuje godišnje u proseku 1.283 m³/km² nanosa.

Pećska Bistrica (L=62,40 km, F=500 km²) u svom gornjem slivu koji se probija kroz valov Rugovske klisure koji je tipično alpski, teče kroz nasleđeni valov pećskog lednika, koji ga je još više produbio u Rugovskoj klisuri, dugoj samo 6 km, sa mestimično vertikalnim stranama preko 1.000 m.

Korito P. Bistrice u planinskom delu uzvodno od Peći ima širinu 5—10 m. Među Bistričinim pritokama najopasnija je lumi i Qyqes (Vidi »Profil kroz sliv Belog Drima«). Ona je u leto 1926 g. ogromnom količinom transportovanog nanosa zajezerila Pećsku Bistricu i voda je tom prilikom poplavila barake šumskih radnika, podavivši njih 26, koji su se zatekli na spavanju. Pećska Bistrica proizvodi prosečno cca 806 m³/km² nanosa godišnje, koji se najvećim delom taloži tek u ravničarskom delu nizvodno od Peći.

Dečanska Bistrica (L=53 km, F=266,6 km²) ima sliv koji je u morfološkom pogledu sličan slivu P. Bistrice (Videti »Profil kroz Prokletije). Ona ima u gornjem toku pad od oko 80‰; korito mu je usečeno u čvrstoj steni, širine 3—12 m i dubine do 1 m. Raspolaze znatnom hidroenergijom i pogodnim mestima za izgradnju 7 hidroelektrana — najveća kod manastira proizvodila bih po mišljenju dr. D. Dukića 80 miliona Kwh godišnje.¹³⁾

D. Bistrica prima ukupno 82 pritoke. Najveća je Kožnjarska Bistrica (L=12 km), na kojoj je 17. novembra 1957. g. puštena u pogon hidrocentrala instalacione snage 8 megavata.¹⁴⁾

D. Bistrica produkuje godišnje 900 m³/km², ali je zato vodom siromašnija od P. Bistrice (Videti Tabelu u prilogu).

Erenik (L=51,0 km, F=516,5 km²) izvire iz ledničkog jezera ispod samog prokletijskog vrha Đaravica. U svom gornjem — planinskom toku do sela Junik, Erenik se karakteriše dubokom dolinom, dobro pošumljenoj do same granice šumskog pojasa (do 1.700 m. nv.). Šuma se koristi i na samom Ereniku, u kome, kao

¹³⁻¹⁴⁾ Dr. Dušan Dukić, *Vode SAP Kosovo, Priština, 1969* (rukopisni materijal)

i u njegovim pritokama, ima velik broj pilana, kao i veći broj vodenica-potočara; ranije u selu Juniku, na Ereniku je radilo i nekoliko valjaonica za valjanje seljačkog vunenog štofa (šajaka).

U delu Prokletija (planinskom) Erenik je širok svega 5 m; usečen u stene. Voda mestimično potkopava i ruši obale, obrazujući tako odseke visoke 2 do 10 m. Dubina Erenika oscilira pri maloj vodi između 0,3 i 1 m. Oko 53% njegovog sliva zahvaćeno je intenzivnom erozijom, pa je godišnja produkcija nanosa $812 \text{ m}^3/\text{km}^2$.¹⁵⁾

U Prokletijama izviru i delom teku još 4 rečice: *Trava*, *Ločanska Bistrica*, *Istočka reka* i *Klina*, od kojih dve prve su Erenikove pritoke, dok dve poslednje Drimske.

Ločanska Bistrica, zvana po selu Ločan do kojeg ima planinski tok, izvire kao i matična reka Erenik u kompleksu Đaravice — u zapadnoj strani. U gornjem — prokletijskom toku je tipična planinska sa dolinom kanjonskog tipa.

Istočna reka ($L=14 \text{ km}$, $F=434,2 \text{ km}^2$) izvire iz jakog kraškog vrela kod Istoka, na kontaktu krečnjaka i vododržljivih škrljaca. U izvoristu Istočke reke je više kraških vrela, ali se njihova voda gubi poniranjem u fluvio-glacijalnom nanosu. U gornjem toka Istočka reka je široka oko 4 m. Korito joj je plitko i usećeno je uglavnom u sljunku. Obale su obrasle drvećem visine 1—2 m. Na ovoj reci je izgrađen prvi hidroenergetski objekat Kosova socijalističke ere. HE je podignuta kod istoimenog naselja, a puštena u pogon 19. januara 1949, sa snagom 115 KVA.¹⁶⁾

Klina ($L=60 \text{ km}$, $F=425,2 \text{ km}^2$. $D=697 \text{ m/km}^2$) izvire u krajnjem — severoistočnom delu Prokletja, u Suvoj planini pod imenom Crepuljskog potoka, koji sa Strmičkim potokom obrazuje Klinu. Korito Kline je u planinskom potoku usećeno u stenama. Širina reke u ovom delu je oko 2—2,5 m.; obale su joj mestimično vertikalne i visoke do 3 m.

Režim reka na sektoru Prokletija. — Pomenute reke se hrane padavinskim vodama koje se izlučuju na visokim planinama, obrazujući pri tome snežni pokrivač, koji se godišnje zadržava i do 6 meseci, dok u cirkovima Prokletija čak i do polovice septembra, a koji put stari sneg sačeka i novoformirani. Voda otopljenog snega (snežnica) dospeva u reke najviše u maju, kada se pojavljuje i sekundarni maksimum padavina. Zato je majski proticaj izrazito velik prema proticajima u ostalim mesecima. On je 2—3 puta veći od srednjogodišnjeg proticaja.

Obrazovanje snežnog pokrivača utiče na opadanje vodostaja sredinom zime, pa otuda pojava sekundarnog minimuma u januaru na svim rekama u slivu Belog Drima.

Vodne snage. — Prema mišljenju dr. Dukića vodne snage Belog Drima iznose prosečno 34,000 MW (samo za glavni tok), a

njegovih pritoka su dva i po puta veće i iznose 81,10 MW. Ukupna godišnja neto energija iznosi u celom slivu 1,01 milijardu Kwh (u proseku) — kao gornja granica, dok je sama protočna energija 0,66 milijardi Kwh (u proseku) — kao donja granica.

Momentalno se u slivu Belog Drima koriste neznatne vodne snage u postojećim malim hidroelektranama, i to HE »Kozhnjar« 6,40 MW, HE »Istok« 0,45 MW i HE »Radavac« 0,28 MW.

Po mišljenju dr. Dukića međutim, na pritokama B. Drima postoje pogodni uslovi za izgradnju *kaskada hidroelektrana*, i to: na P. Bistrici 6 sa ukupnom snagom od 25,7 MW i godišnjom proizvodnjom od 157,93 miliona Kwh; na Dečanskoj Bistrici pored postojeće HE »Kozhnjer« još 7 drugih sa ukupnom instalacionom snagom od 32,36 MW i godišnjom proizvodnjom od 195,5 miliona Kwh električne energije.

Tabela II: Srednjemesečni proticaji reka u slivu B. Drima u m³/sek.¹⁸⁾
(u regionu Prokletija) Beli Drim (1954—66)

Potes	F (km) ²	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	God:
Radavac	2,31	2,72	2,8	3,99	9,07	14,3	8,0	3,98	2,7	2,62	4,22	5,48	4,36	5,36
Peć —														Pečka Bistrica (1954—66)
Rugovo	264	4,24	5,05	6,41	12,5	17,5	8,15	3,26	2,10	2,36	5,70	7,46	7,31	6,84
Dečan	114	2,98	3,33	3,73	7,43	14,2	8,22	3,53	1,90	2,32	4,85	5,92	4,59	5,24

Tabela I: Hidrometeorološki podaci Prokletijskih delova rečnih tokova¹⁷⁾
(U periodu 1925—1960)

MERNI POTESI	L km	F (km ²)	P (mm)	Q (m ³ /sek.)	Cm
B. Drim — V.S.					
Radavac	122,2	23,1	957	5,05	(7,65)
P. Bistrica					
Peć	33,5	264,0	1,045	6,14	0,700
D. Bistrica					
Dečane	32,0	1145,	1,240	4,42	(0,709)

Jezera. — Ona su na Prokletijama ledničkog porekla i nastala su u cirkovima nakon otapanja lednika. Javljaju se u južnim partijama: 2 na Đaravici (Veliko i Malo Đaravičko jezero na 2.300, odnosno 2.600 m nv.). Nalaze se na južnoj padini Đaravice a podvodnjavaju se Erenikom. Druga grupa jezera je na severnom delu Prokletija: Kučinko, Dreljsko Liqeni jezero.

Kučinsko jezero¹⁹⁾ leži ispod krečnjačkog grebena Malet e Nexhinatit (2.441 m) na 1.850 m nv. Ono se razvilo u cirku. Dužina mu je 230 m, a maksimalna širina 98 m. Severni deo Kučinkoc jezera leti presušuje reducirajući se na omanju plitiku baru lučnog oblika dužine 57 i širine 8 m. Jezero gubi vodu poniranjem, a najdublje je u južnom delu, ispod stenovitog otseka, koja dostiže oko 5 m.

^{17—18)} Dr. D. Dukić, *Vode Kosova*, p. 9 i 14.

Dreljsko jezero leži 550 m istočnije od Kućinskog na 1.790 m nv. i leti je bez vode, i ako je na topografskim kartama označeno kao stalno. Dno mu je ravno. Pri najvišem nivou vode dubina u istom ne dostiže više od 4—5 m i tada ima dužinu od 130 m a širinu od 40. I ovo se jezero razvilo u cirklu lednika.

»Liqeni«, što na albanskom znači jezero. Ono je praktično bez svog osobitog imena, poistovetivši tako sa samim apelativnim hidronimom. Leži na severnoj strani Lumbardskih planina (»Mallet e Lumbardhit«) (2.335 m) na 2.150 m nadmorske visine u cirklu koji ima oblik vrtache sa prečnikom od 500 m. Pri najvišem nivou »Liqeni« jezero dostiže dužinu od 195 m i širinu do 104 m. Ima trouglasti oblik sa poluostrvcem koje sa istočne strane zalazi u jezero do 44 m. Ovo se jezero hrani vodom periodskog izvora, snežnicom i padavinama koje se slivaju niz dobro zatravljene padine cirka.

Na albansko-jugoslovenskom sektoru su još mala jezerca, kao što su »Liqeni i Tropojs«, u izvoristu Albanskog potoka, a nešto niže »Liqeni i Kuq« (Crveno jezero), koje se odvodnjava u Albanski potok. Ispod vrha Gusan (2.539 m) je »Liqeni i Madh« (Veliko jezero) sa prečnikom od skoro 200 m, na nadmorskoj visini od 2.190 m.²⁰⁾

V VEGETACIJSKI POKRIVAČ

Biljne kulture na Prokletijama penju se do visine od 1.000 m., od 1.000 do 1.700 m preovlađuju listopadne šume (u reonu Peć—Junik kesten). Od 1.700 do 2.000 m nalaze se četinarske šume.²¹⁾ Jedna oaza sađenog bora dobro se primila i u arealu kestena, na visini ispod 1.000 m. e Bor je posađen na ovom potesu pre više od pola stoljeća od strane manastirskog osoblja, jer se upravo njen omanji areal prostiranja nalazi »vis a vis« i nešto (oko 100—150 m) iznad manastira, odnosno na apsolutnoj visini od 650—700 m.²²⁾

^{19—20)} Dr. D. Dukić, *Vepër e faqe e cituar*.

^{20—21)} Q. Lleshi, *Deçani-Vështrim angropogjeografik*, »Përparimi«, 1—2, 1961, 74.

»Në linjën e njohur të plasës Deçan—Pejë, në afërsi të shtratit të Bistricës përballë Manastirit (nga ana e prapashpinës), në shtresat e eks-humeme ç'prej kohësh buronte dhe përdorej (për pirje pas rregullimit të tij: kaptimit dhe vendosjes së kronit midis dy luftërave botërore) si dhe larje (teposhtë rrjedhjes) për persona me sëmundje të lëkurës dhe reumatizmit, ujë mineral me tharhtësi të konsiderueshme dhe shije mjaft të këndëshme. Populli e quante: »burimi i ujit të tharhtë i Deçanit«. Tani, nga përzjerja me ujë të ëmbël ka humb potuaj tërësisht thartinë.«^{20—21)}

Iznad visine od 2.000 m, gde praktično prestaje šumska vegetacija, nalaze se tzv. apsolutni pašnjaci ili »suvati«, koji dosežu i do 2.500, iznad koje visine nastaje planinska pustinja.²³⁾

Po Košaninu,²⁴⁾ vegetacija Prokletija odgovara srednjeevropskoj. Međutim, strme strane, prisojno eksponirane prema Dukadinskoj Ravni pokrivene su listopadnim koje su sastavljene od drveća i žbunja koje odgovaraju brežuljkastom reonu balkanskih predela.

Pojas bora na istočnim padinama Prokletija sačinjavaju uglavnom vrste »*Pinus leucodermis*«, kao i smreka.²⁵⁾

Četinari najoptimalnije zauzimaju srednji pojas masiva Prokletija (najviše do 1.800 ili 2.000 m), a jedino je bor uspeo da se nešto više razmnoži i iznad ovog pojasa. Od svih četinara na Prokletijama su najpoznatiji: molika, beli bor, crni bor, smreča, jela, alpski ležeći bor, a, naročiti kuriozitet predstavljaju lepe i skupocene srebrne jele koje su čak i u ostalom delu Evrope retkost.

Listopadnih šuma najviše ima u podnožju. Drveće je tu raznovrsno. Neke vrste listopadnih drveća, koje podnose oštriju planinsku klimu, mogu se naći i u većim količinama rasute između četinara ili u malim oazama na prisojnim stranama Prokletija. Najčešće listopadne vrste na prokletiskom masivu su: obični javor, džever javor, crni jasen, beli jasen, crna lipa, bela lipa, bukva, brest, kum, bela breza, jasika, trepetuša, bela vrba (mačkovina), beli grab, crni grab, leska, bostra i dren.

Na Prokletijama raste jedno veoma retko šiblje, tzv. forzicija (»*Forsythia* e«) koja, istina, nije još dovoljno ispitana. Dosadašnjim proučavanjem zaključeno je samo da se forzicija nalazi jedino u Japanu. Na Prokletijama ona se najviše nalazi na Gubavcu više Peći i pretpostavlja se da je jedinstven primerak i jedini ostatak iz ledenog doba u Evropi.

Prokletije su još bogate i lekovitim biljem velikih vrednosti kako za domaću tako i medicinsku upotrebu. Najpoznatiji primerci lekovitog bilja na Prokletijama su: đurđevak, planinka, gorocvet, digitalis, beli slez, crni slez, odoljen, zova, krupna i sitna bela rada, titrica, blagovan, bokvica, borovnica, bunika, vilino sito, vodopija (cikorija), vranilova trava (origan), vratič, dan i noć, žablja trava, soca, imela, islandska mahovina, jaglika, šumska jagoda, jedić (nalep), kantarion, kičica, kozja krv, rastavič, komonika, kopitnjak, mrtva kopriva i njene srodnice, lincura,

²¹⁻²³⁾ Q. Lleshi, *Regjionalizmi fizionomik i Kosovë-Metohisë*, »Përparimi«, Viti i IX, Nr. 1—2, 1963 (Prishtinë), p. 68;

²³⁾ Q. Lleshi, *Deçani — Vështrim antropogjeografik*, Përparimi, Viti i VII, Nr. 1—2, 1961 (Prishtinë), p. 75;

²⁴⁻²⁵⁾ N. Košanin, *O vegetaciji Rugovsko-Metohijskih planina*, Glasnik SGD, Sv. 7—8 (Beograd), 1927, pp. 64—7.

ljubičica, majčina dušica, malina, kupina, maslačak, matičnjak, medvede uši, mlada, navala (paprat), nana, beli oman, očajnica, beli pelin, cilamen, potočarka, potočnjak, hajdučka trava, čemerika, čičalj, čubar, čuvarkuća, šafran i dr.²⁶⁾

Fauna. — Pretpostavlja se, i ako su Prokletije kako u florističkom takođe i u pogledu faune dosada malo ispitane, da su one jedna od planinskih područja JI Evrope najbogatije po vrstama divljih životinja.

Prema nalazima amatera Jovice Milenkova,²⁷⁾ koji je skoro jednu deceniju boravio u ovom području u svojstvu upravnika lovišta na Prokletijama, najrasprostranije vrste divljači na ovom planinskom masivu su: medvedi, divokoze, srne, divlje svinje, veliki tetreb, jarebica, kamenjarke, leštanke, orlovi i lešinari svih vrsta. Pored ovih vrsta ima još nešto vukova, lisica, jazavaca, kuna zlatica i kuna belica, vidri, veverica, tvorova, hrmelina, puhpva, raznih vrsta miševa, zatim mnogo raznih vrsta ptica pevačica i ptica grabilica.

Medved (*Ursus Arctos*) predstavlja najveću i najjaču zver koja živi na Prokletijama. Prema proceni od 1958. godine bilo ih je 70—80 komada, dok je njihov broj danas prepolovljen. Rasprostranjen je po celim Prokletijama, od samog podnožja do 1.800 m. Najpoznatija su mu staništa kestenove, hrastove i četinarske šume, dok ga najviše ima u četinarskoj šumi pojedinih masiva, kao Mokre, »Lugu i Butě« (pitome doline), Kalavice, u podnožju Žljeba, zatim po čitavoj Rugovskoj Klisuri, Mylisheca (Mlieševca), Koprivniku, Gubavcu, Bjeshkë e Deçanit (dečanskoj šumi), Cerskom Potoku, Lovskom Potoku, ispod Marjaša i Majë e Rups, zatim Kožnjeru, Babaj i Lloqit, Dečanski zig, kao i čitavom šumskom pojasu iznad sela: Dečana, Vokš, Junik, Batuše i Molića.

Medvedi Prokletija, pred povlačenje u brlog u jesen, mogu dostizati težinu od preko 300 kg. Spada među najkapitalnije vrste u zemlji. Trofej (koža od medveda sa Prokletija) može da bude (od vrha nosa do kraja repa) dug i do 2.40 m, kakav je bio primerak ubijen na Mylishevcu 1954. g.

Divokoze (*Rupicapra*) predstavlja plemenitu i plahu divljač, koja oživljava nepristupačne stene, ambise i provalije, najviše gorske položaje, strme pećine i izlomljene glavne klance Prokletija. Zastupljena je u prilično malom broju. Ima ih oko 350 komada. Glavna staništa i prebivališta su im Guri i Kuq (»Žuti Kam«), nepristupačne stene Rugovske Klisure od 5 do 12

²⁶⁾ Dušan Čurović, *Šume i ljekovito bilje Prokletija*, »PROKLETIJE« — Almanah, Planinarsko društvo »Đaravica«, Peć, 1958, pp. 135—166;

²⁷⁾ Divljač Prokletija, *Isto delo*, p. 127.

km, Koprivnik sa Čvrljem, Maja e Strelcit, nepristupačne stene iznad Bellaje, Celije, Verskog Potoka, Prilepskih krševa, Maja e Rups, Kožnjeru, Pilačice (Pločice) i Đaravice. Njihov broj je 1958. g. procenjen na 350 k.; u odnosu na stanje početkom pedesetih godina, ova cifra je usedmostručena (1952. g. bilo ih je svega pedesetak komada).

Veliki tetreb (*Tetrao urogallus*) živi u sve mešovite, a posebno u sve četinarske šume Prokletija iznad 1.200 m. Njihovo brojno stanje krajem pedesetih godina cenjeno je na 600—700 komada. Najizrazitija staništa su: Mokra, Lugu i Butë, Kalevica, Žljeb, Belopač, Ceskova, Alagina Reka, Košutanje, Adžovići, Kučište i Dreljski Nedžinat, Prevara, Garužda, Leševac, Koprivnik, Maja e Strelcit, Prilepske Strane, Kožnjer, Babaj i Lloqit i Jedovo.

Pored gore navedenih vrsta divljači, a koje spadaju u red visokoplaninskih vrsta, na Prokletijama žive i druge vrste koje su karakteristične za srednje pa i niže planinske predele. Tu prvenstveno spadaju *srneće divljači* (*Caproleus caproleus*) čiji je broj krajem pedesetih godina procenjen na oko 700 komada, a koje su otada u stalnom brojčanom porastu zbog izvanrednih prirodnih uslova za svoj opstanak (kestenove i hrastove šume).

Jarebice kamenjarke (*Caccabis saxatilis*) ima skoro po svim krševima, a po proceni brojnog stanja u navedenom periodu bilo ih je oko 1.000.

Divlje svinje (*Sus scrofa*) bilo je tada oko 300 komada, koje imaju izvanredne uslove za opstanak. Ima dosta *lestarki* (bilo ih je oko 500) zatim *zečeva* od samog podnožja do vrha Đaravice; *lisica*, *kuna zlatica*, *kuna belica*, mnoštvo *veverica* i *puhova*; oko 5 vrsta *planinskih miševa* i isto toliko vrsta *slepih miševa*.

Nekada veoma rasprostranjena divlja i krvoločna zver — *vuk*, koji je nekada bio veoma rasprostranjen i predstavljao pravu napast na domaću stoku, je u stalnom uništenju, a predstoji mu i potpuno istrebljenje ukoliko se nešto ne uradi na njegovu zaštitu. Danas je ostalo na Prokletijama par komada — svega desetak primeraka (po proceni).

Na Prokletijama ima svih vrsta *ptica-pevačica*. Od grabljivica najviše je zastupljen *orao-krstaš*, a postoje i druge vrste. Od *lešinara* ima najviše *beloglavog supa* i *crkavice* — *bele*. Takođe ima svih vrsta ostalih grabljivica: *sokolova*, *jastrebova*, *kobaca*, *gavran*, *kreja* i dr.

Planinske reke, kao što su njihovi gornji tokovi (Erenika, triju Bistrica, izvora Beloga Drima i Istočke Reke) sa svim pritokama, bogate su *ribom* — *pastrmkom*, a ima dosta i *vidri*.²⁸⁾

²⁸⁾ J. Milenković, *Divljač Prokletija*, »Prokletije« — Almanah, pp. 127—132.

II. EKONOMSKO ISKORIŠĆAVANJE

Boravak čoveka u planini i njeno korišćenje za sopstvenu egzistenciju je iskonsko. U smislu pribavljanja sredstava za svoj opstanak, vremenski posmatrano takođe stoji činjenica da su blagodeti koje je planina pružila čoveku (lova na divljač, a kasnije uzgoj pripitomljene stoke i njena ispaša u planinskim suvatima; korišćenje drveta za ogrev i opremu domaćinstava i dr.) predstavljaju prvobitne i najstarije oblike privređivanja.

I ako veoma šturi i uopšteni, najstariji pisani dokumenti o čovekovom boravku u planini u cilju njenog iskorišćavanja su iz prve polovine 14. stoljeća, tj. na osnovu navoda u Dečanskim hrisovuljama iz 1330. g. u kojima se navode »*nekoliko ubogih vlaški i arbanasčkih katuna*«.²⁹ Istim ispravama vladar (St. Dušan) zabranio je Vlasima i Arbanasima pašnju stoke po svim planinama Altina.³⁰ Iz ove kasno srednjevekovne dokumentacije možemo zaključiti da je u ovom periodu već prošao zenit planinskog odnosno stočarskog života jer je stanovništvo od tada bilo više privезano za iskorišćavanje izrazitog zemljišta u ravnim delovima (u konkretnom slučaju prelaz iz stočarskog — *planinskog u ratarski — ravničarski*, odnosno sa *prokletijskog u ravnodušadinski*) obzirom da se »katuni« koji predstavljaju planinska staništa karakterišu kao »ubogih«, što se izjednačavaju sa »veoma siromašnim« po svojim ekonomsko-socialnim obeležjima (statusu).

Drugi zaključak iz navedene kasno-srednjovekovne dokumentacije jeste pitanje naziva ovog planinskog masiva. Naime, tada ovaj planinski niz nije imao određen naziv,³¹ barem se takav zaključak nameće, obzirom da se one prostorno tačno definišu u oblasti »Altina«, a koji je ustvari predstavljao sadašnju oblast Đakovice i njene »Malesije« (aktuelno zapadni planinski deo u NSRA) — upravo južni deo Prokletija, koji je svakako u to vreme nije bio obeležen ovim nazivom.³² Na osnovu svojih tridesetogodišnjih ispitivanja s kraja prošlog stoljeća, ugarski baron Franz Nopca dolazi do zaključka da je ovaj venac dobio »kao najstarije narodno ime — Bjeshkët e Nemuna — što bih u prevodu značilo — Proklete planine«³³ što je za srpsko-hrvatsko, odnosno hrvatsko-srpsko jezičko područje bilo veoma prikladno izgraditi sastavnu i jedinstvenu reč — »Prokletije«, što u potpunosti i odgovara prvobitnom albanskom nazivu »Bjeshkët e Nemuna«. Kao

²⁹⁻³⁰ M. S. Milojević, *Dečanske hrisovulje*, Gl. SUD, XII (Bgd), 1880, 2, 127.

³¹⁻³² Q. Lleshi, *Onomastična problematika Kosova i susednih krajeva*, ONOMASTICA JUGOSLAVICA, JAZU, Razred za filologiju, knj. 10, Zagreb, 1982, p. 119.

³³ Mirko Mirković, *Kronika Prokletija*, »PROKLETIJE« — Almanah u povodu Desetogodišnjice planinarskog društva »Đaravica«, Peč, 1953, p. 35.

što je uobičajeno na Kosovu, oba se naziva upotrebljavaju i tolerišu shodno upotrebi u odgovarajućem jezičkom području.

Najrasprostranjeniji i najpermanentniji oblik iskorišćenja Prokletija koji je od davnina pa sve do današnjeg dana ostao skoro u nepromenjenom obliku jeste *letnja ispaša stoke* iz oblasti njihovih stalnih staništa u seoskim naseljima Dukadinske Ravni.

Korišćenje planine za ovaj privremeni (letnji) boravak metohijskih stočara u cilju čistog ekonomskog iskorišćavanja planine svakako datira od momenta prelomnog ekonomskog trenutka preobražaja nekadašnjih isključivih stočara u kasnije mešovita domaćinstva (stočarsko-ratarska). Vremenski fiksirati ovaj trenutak i uopšte period ostaje u zadatak ekonomskim istoričarima, ali smo skloni verovati da se više radi o jednom *veoma dugotrajnom i uopšte neodređenom načinu pribavljanja hrane* za golu i primitivnu egzistenciju kao i permanentnim i neosetnim promenama kojima je stanovništvo ovih krajeva podleglo u kontekstu opštih istorijskih i društveno-ekonomskih prilika u ovom i susednim predelima sa kojima je ono permanentno bilo u kontaktu i sa kojima je vršio razmenu materijalnih proizvoda svoga rada sa drugim neophodnim. Da bih se snabdela sa neophodnim dobrima, u koje kao najneophodnije i najstarije ubrajamo so (za svoje i potrebe stoke), a kasnije i neke druge zanatsko-prerađivačke proizvode (od metala, drveta i kože) za opremu domaćinstva i prenosnih (tovarnih) životinja — u prvom redu *konja*, ono je moralo proizvesti *viškovce* (uglavnom stočarske u najranijem periodu) neophodne za razmenu sa drugim kojima je najviše trebala. »*Izdig*« stoke u planine je isto tako *staro kretanje* stokom za potrebe njene obilnije i kvalitetnije ishrane tokom letnjeg — u ravničarskim predelima sušenog i travom ograničenog prostora kao i »*spuštanje*« u zimskom periodu kada se planina pokriva snegom i stoka ostaje bez ishrane što prinuđuje stočare da sa svojim stadama krenu u *pitomije* i travom bogatijim uglavnom nižim — župskim ili primorski krajevima. Ovakvo permanentno kretanje, uglavnom velikim *stadama ovaca* bio je veoma raširen oblik *polunomadskog stočarskog kretanja* u oblasti Jugoistočne Evrope obuhvativši ovim kretanjima veoma prostranije teritorije u prošlosti (u uslovima nepostojanja graničnih barijera), kao i mnogo veći broj stoke (uglavnom ovce). Radius kretanja bio je prostorno mnogo širi i prostorniji obuhvativši ceo region JI Evrope, odnosno veoma udaljene njene predele, kao što su kretanje stokom (uglavnom ovce) između rumunskih *Karpata* i solunske *Kampanje* na obalama Egejskog mora (prve su služile za *letnju ispašu*, a druga za *zimovanje* stadama ovaca), što je uostalom pridonelo i veoma velikom *izmešanju i premeštaju* stanovništva oviju udaljenih regija, što se odražavalo a u sadašnjoj nacionalnoj kompoziciji stanovništva.

Osim ovog, uglavnom pravca *sever-jug* i obratno kretanja stadima ovaca, postajao i pravac *zapad-istok* i obratno, tj. između

oblasti bugarskog dela Balkana planine (delom i rumunskih Karpata) i pitome crnomorske bugarsko-rumunske ravnice Dobruđe (rum. Dobrogea) na istoku. Ovo se kretanje i danas nastavlja unutar odgovarajućih državno-teritorijalnih celina, tj. zimovanje karpatskih ovaca u rumunskom delu Dobrogea, kao i balkanskih u bugarskom delu Dobruđe.

Slično kretanje, tj. *silazanje* stadama ovaca vrši se i danas od bosanskih predela na severu ka slavonskim i vojvođanskim u zimskom periodu, dok se »izdig« praktikuje u letnjem periodu u delu hercegovačko-crnogorskog planinskog pojasa kao i sličnih u SR Makedoniji.

»Izdig« stoke (uglavnom ovaca) sa Dukadinske Ravni u Prokletijama nastao je u relativno kasnijem periodu, nakon što je uvećano stanovništvo ovog kraja kao posledica delom i veoma visoke stope prirodnog priraštaja što je prouzrokovalo da se ranije utrine i prirodne livade namenjene isključivo ispaši stoke preoravaju u oranične površine i time drastično smanjile »ispašne površine« dovodivši u pitanje daljni opstanak stočnog fonda koji se mogao »spasavati« jedino *svako-godišnjim* »izdigom« u Prokletije na ispašu. Na ovaj zaključak upućuje i davnašnji oblik iskorišćavanja unutar-seoskih utrina za kolektivnu ispašu stoke (stoke određenog sela) u prelaznim — proljetnim i jesenjim periodima, tj. pre »izdiga« i nakon »silazanja« stokom, praktikovan u brojnim seoskim sredinama oblasti Dukadinske Ravni.^{33-a)} Međutim, nakon što se ove nekada slobodne i neograničavane seoske utrine »privatiziraju« i od pojedinih suseda »žicom ograđuju« nastao je veoma velik problem ishrane stoke u ovim prelaznim proljetno-jesenjim periodima, te se iste koriste isključivo od »novopečenih« vlasnika (eklatantan primer u potesu »Kallavajë« odnosnog sela Junik u Đakovačkoj regiji). S druge strane supradinski, odnosno Predalpski areal u podnožju Prokletija, tj. u seoskim atarima naselja: *Batyše, Molić, Junik, Dečane, Streoc* (Gornji) je ranije korišćen kao ispašni prostor u *kasno-proletnim* (početkom maja) prije definitivnog »izdiga«, kada su stočari procenili da nisu još stvoreni optimalni uslovi za visoko-planinski boravak stoke, kao i u rano-jesenjem mesecu septembru (drugo polovici), kada prilikom »silazanja« sa planine bilo dosta trave u podnožju a vremenske prilike pogodne, ostajali (u oba slučajeva po desetak dana sa stokom). Međutim, otkako su dotična šumska gazdinstva iz Dečana i Peći pošumljavali ove potese, stočarima je striktno zabranjeno zadržavanje sa stokom u ove svrhe, te su za ovakve vrste prekršaja kažnjavni novčano velikim sumama novca.³⁴⁾

Inače, najstariji pisani dokumenat pronađen kod stanovništva ovog kraja a koji se odnosi na ispašu stoke na Prokletijama (u

^{33-a)} Q. Lleshi, *Juniku* — Kontribut për hulumtimin e katundeve të mëdha të Rrafshit të Dukagjinit, »BULETINI I MUZEUT TË KOSOVËS«, Vëllim i X (1965—70), Prishtinë, 1970, 69—114.

ovom slučaju njenim srednjim delom u masivu »Bjeshkë e Deçanit« — Dečanske planine, potiče od samog početka 18. stoljeća (2. 08.1716. g.) a pisan je od strane sudskih vlasti u Đakovici, kojoj je i oduvek pripadala administrativna ova oblast (planinska i ravničarska — do granice linije koju čini tok Dečanske Bistrice) sve do nakon definitivnog ukidanja administrativno-teritorijalne uprave po srezovima u 1960. godini: Dokumentat je vlasništvo Pokrajinskog Arhiva Kosova u Prištini i pisan je arabskim alfabetom. Pronašao ga je kod jednog meštantina Dečana istoričar dr. Skender Rizaj.³⁴⁾ Isti je preveo i dešifrovao. Interesantno je napomenuti ovom prilikom da se u ovom dokumentu preciziraju granice planine, kao i njegovi korisnici, tj. navedena su sela koja imaju prava pasti stoku u Dečanskoj planini. To je slučaj sa svim drugim planinskim masivima Prokletija, u kojima se tačno zna koji stočari (iz kojih sela) mogu koristiti pojedine suvate; u protivnom, svaki izuzetak mora se prethodno prijaviti i zato tražiti odobrenje od dotičnih stalnih korisnika.³⁵⁾

Sa stokom u planinu kreće jedan muški član porodice koji »izdiže« stoku, a u retkim slučajevima (kod većeg broja stoke) i dva čobana. Nešto kasnije i obično na konju ide zatim glavna domaćica zadužena za prerađu mleka kao i spremanje ishrane čobaninu i ostalim članovima koji borave u planini za vreme leta (to su obično deca školskog doba, koja i pomažu glavnom čobaninu u čuvanju stoke za vreme ispaše tokom dana, a najviše borave radi odmora i oporavka — iz zdravstvenih razloga). Ostali članovima daturaju povremeno pojedine životne namirnice svojim u planini (najčešće brašno, so, šećer i sl.). To čine konjima (zapregom) u određenim periodima leta. Ranije je konj bio isključiva zaprega prilikom »izdiga« za pojedine namirnice (prevozno sredstvo) kao i (još više) za »silaženje« proizvodima stoke (vunom, sirom, kajmakom, maslom i sl.). Danas se to obavlja i traktorima tamo gde vode pojedini puteljci koje su otvorila šumska gazdinstva.

Ostali oblici eksploatacije Prokletija. — Ovo se odnosi na korišćenje drugih prirodnih resursa Prokletija, kao što se *drvo, divljač, ljekovito bilje i planinsko voće i sl.*

Korišćenje drvne mase, seča šuma, njeno obnavljanje i pošumljavanje su u nadležnosti dveju privrednih organizacija na dotičnim teritorijalno-administrativnim celinama, i to za deo dečanske i đakovičke opštine vrši Šumsko gazdinstvo u Dečanima, dok za ostali deo (pećske opštine) Šumsko gazdinstvo u Peći. Navedena gazdinstva su odmah nakon oslobođenja prišla ozbiljno

^{34, 36)} Q. Lleshi, *Sovremeni nagorno-nađolni stočarski dviženja...* pp. 178—87.

³⁵⁾ Godišnjak Arhiva Kosova, IV—V (1968—9), Priština, 1971, pp. 235—9.

³⁷⁾ Q. Lleshi, *Zbornik Radova Simpozijuma u Berovo 13—15 juna 1980*, p. 180;

i pitanju obnavljanja šuma na Prokletijama koja su u prošlosti neracionalno sečena bez određenog plana prinove i održavanja. Prvo se prišlo pošumljavanju nižeg pojasa — od strane Šumskog gazdinstva u Peći, i to po prosečno 100 do 150 ha godišnje, dok zadnjih 5—6 godina i dvostruko veće površine obuhvaćene su pošumljavanjem (po prosečno 300 ha godišnje). Navedeno gazdinstvo već je prikrajčilo pošumljavanje pojasa na visini između 1.200 i 1.700 m., stigavši tako do optimalne visine vegetacije u ovoj planinskoj regiji, a, koja apsolutno doseže samo do 1.800 m. Od 1968. g. pošumljavanju je prišlo i Šumsko gazdinstvo »Đaravica« iz Dečana na srednjem i južnom sektoru Prokletija, tj. na teritoriji opština Dečane i Đakovica, i to u proseku po 50 do 100 ha godišnje (u početku), dok docnije i do 150—200 ha godišnje.³⁷⁾

Sadašnja površina državnog lovišta na Prokletijama iznosi oko 80.000 ha. Lov na divljač je regulisan posebnim zakonom u cilju zaštite pojedinih divljači od njihovog potpunog istrebljenja.³⁸⁾ Među najinteresantnijim vrstama lova na divljač svakako spada otstrel medveda, zatim divlje svinje i dr. Međutim, stimulasinje lova na vuka (preko određenih nagrada) sveo je ovu divljač, kao što je gore navedeno, na svega desetak primeraka. I ako se zaista radi o veoma krvoločnoj i po stoci najopasnijoj zveri, trebalo bi preduzeti sve da se ograniči istrebljenje vuka sa Prokletija.

Skupljanje ljekovitog bilja nije zauzelo još svoje meritorno mesto te u tom pogledu postoji više planova za doglednu realizaciju. Smatra se da je od značaja eksploatacija bora-krivulja (*Prunus mughus*).³⁹⁾

Deca koja borave na Prokletijama beru divlje jagode i borovnice, koje prodaju u obližnjim gradovima Đakovici i Peći.

OPŠTI ZAKLJUČCI

Prokletije uzeto u celini predstavljaju veliko prirodno blago kojem društvo treba u budućnosti posvetiti veću pažnju i najracionalnije gazdovati, održati, sačuvati što je moguće više prirodnu ravnotežu i nesputavani prirodni razvoj ovog — kosovskog dela Prokletija, a u dogovoru sa susednom SR Crnom Gorom i sav ostali deo jugoslovenskih Prokletija.

Od pre desetak godina u Skupštini SAP Kosova bila je pokrenuta inicijativa o proglašenju čitavog kosovskog dela Prokletija nacionalnim parkom. U ovom kontekstu pozvane su bile stručno-naučne institucije i pojedinci da daju svoj meritorni sud.

Oba aspekta korišćenja Prokletija, tj. čisto ekonomski (seča šuma, pašnjaci, ulov i dr.) i s druge strane čisto ekološki, tj. apsolutno održavanje prirodnog ciklusa biološkog života ničim

^{38—39)} Dr. K. Rosić, *Privreda na Prokletijama*, »PROKLETIJE — Almanah, P. 1958, p. 119.

neometanim, odnosno proglašenja i davanja statusa Prokletijama kao prirodnog rezervata predstavlja nož sa dve oštrice. Naime ključno pitanje kako prići ovoj kosovskoj mikroregiji da »vuk bude sit, a ovce na broju« je veoma delikatno pitanje koje zaista traži puno vremena i strpljenja da se započeta inicijativa detaljno i krajnje naučno istraživanje i obrazloži, a dakako od značaja je za život i aktivno uključivanje javnosti i isto tako uzimanje u razmatranje samih životno zainteresovanih stanovnika i korisnika ove mikroregije, a posebno susedne — Dukandinske Ravni koja je, pored navedenih šumskih gazdinstava Dečana i Peći, kao i lovnog, glavni i permanentni korisnici ovog planinskog kompleksa. Treba naime naučno utvrditi koji korisnici Prokletija predstavljaju najbezbolnije »iskorisnike« po toku prirodno neometanog razvoja ekološkog ciklusa, a odstraniti trajno sve ostale druge koji su stvarno štetni po ovom, po našem mišljenju ključnom i osnovnom aspektu koje društvo treba dati prvenstvo. U pitanju je dugoročni i za ovaj kraj, koje se uostalom odlikuje po veoma visokom stepenu gustine stanovništva po jedinici površine (stanovništvo SAP Kosova će samo krajem ove decenije — oko 1990. g. dostići cifru od cca 2 miliona, na skućenom prostoru od nešto preko 10 tisuća kvadratnih kilometara, predstavljajući, kao i danas, najgušće naseljenu oblast zemlje sa cca 200 st/km²), te posedovanja jednog prirodnog i praznog planinskog prostora biti od velike koristi i od životne važnosti.

Od svih dosadašnjih i budućih eventualnih korisnika planinskog masiva Prokletija, smatramo da su najbezbolniji pastiri sa svojim stadima ovaca koji su uglavnom i do sada koristili najviši kat planine: pojas planinskih suvata na visini gde prestaje prirodna šumska vegetacija. Boravak ovce na ovom pašnjačkom i često polupustinjskom katu može samo pozitivno uticati na prirodnu biljnu vegetaciju prirodnim đubrenjem koje se svake godine obnavlja prilikom lenje ispaše stoke, i to uglavnom ovce. Jedini problem ostaje prebacivanje ovaca umesto dosadašnjeg načina — hodom preko šumskog pojasa gde ona može da načini štetu izmeniti i obaviti motornim sredstvima (i danas se ono prebacuje — u delovima u kojima postoje »šumski putevi« — traktorima od pojedinih domaćinstava koje koriste iste pravce odlaska, odnosno vraćanja s planine). Dakle, kao što se to uobičajava u drugim krajevima sveta, tj. kamionima (u nekim zemljama i željeznicom gde ona postoji).

Ograničena i selektivna seča pojedinih starih stabala takođe ne predstavlja nikakvu štetu, što se odnosi i na selektivni i kranje ograničavajući lov na prokletijsku divljač.

S druge strane, od čitavog planinskog sklopa Prokletija može se izdvojiti jedan ili više pojasa, odnosno planinskih masiva koji su po svojim visinama, stepenu pristupačnosti i ostalo jako izdvojeni i prirodno najatraktivniji, te se isti mogu izolirati kao prirodni rezervati, u kojima bih se život odvijao od čoveka apsolutno neometanim prirodnim ciklusom.

HIDROLOGIJA IZVORIŠTA U OLIGOCENU(?) NIŠKE KOTLINE

Živorad M. Martinović

Uvodne napomene. — Zbog svog izuzetnog geografskog položaja, Niška kotlina je odavno postala primamljivi prostor raznovrsnih fizičko-geografskih proučavanja. Naročito je geološki i geomorfološki dobro obrađena. Međutim, u hidrogeološkom pogledu, posebno u hidrologiji izvorišta, ona je, i pored izvesnih radova*, ostala manje poznata, negoli druge oblasti u našoj zemlji. Isto tako, i njihovom opštem značenju, mada je on do sada više puta naglašan, još uvek se nedovoljno poklanja zaslužna pažnja, iako stanovništvo i zagađenost prirode u ovom delu istočne i jugoistočne Srbije neprekidno raste, a čiste i zdrave vode ima sve manje. Pa kako će takvi problemi objektivno postojati i u budućnosti, bez obzira na gradnju novog niškog vodovoda sa udaljenih ljube-
radskih vrela** i što se neka sela treba vezati za tzv. moravski, to je neophodan uvid u svako, makar i najslabije, kotlinsko izvorište koje iziskuje pravovremenu zaštitu. Stoga se pristupilo i njihovoj daljoj obradi. No, kako ih je nemoguće sve odjednom prikazati, ovom prilikom prezentariće se naučnoj javnosti samo ona koja su u mogućim oligocenskim tvorevinama (up. 13, 24—5). Njihov redosled se izlaže od zapada prema istoku kotline, a radi boljeg praćenja položaja na priloženoj karti označeni su brojevima. Iz istih razloga, i lokaliteti su im podvojeni u dve grupe — rujničko-humsku (sk. 1) i oreovačku (sk. 2).

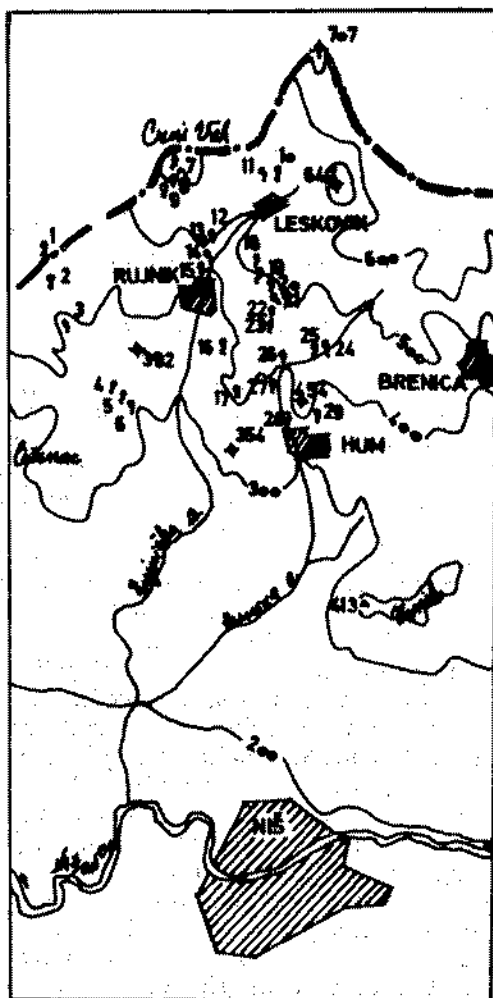
IZVORIŠTA U ATARIMA SELA RUJNIKA I HUMA

1. **Milnica.** — Naziva se još i Đurđanova čubura koja je u zoni prevoja Torine (k. 503) — Popova glava i na 400 m visine,

* Videti literaturu navedenu brojevima 10; 11; 14; 15; 16; 17; 18; 19 i 20.

** On je započet 1982, i treba da bude završen 1984. godine. Tada će Niš dobijati oko 500 novih sekundnih litara vode.

ali 100 m severnije od kotlinske granice. Inače, izvoriste je lako pristupačno, jer se nalazi u rasklji putova za selo Paljinu. Po iz-



Sk. 1. Razmeštaj izvora u rujničko-humskoj grupi

gledu je, pak, polukružno sa lučnim rasponom od 4 m i sa dva izdanka u razmaku od 1 m što znači da pripada rasutom tipu. U jedan je do 60—70 cm vertikalno pobodena betonska cev promera 20 cm, dok drugi ispunjava otvoreni srpasti sabirni basen duže ose 1,5 m i kraće 40 cm, ali se isticanje obavlja u nivou topografske površine.

Okolni teren na zapadu izgrađen je od kristalastih škriljica koji ulaze u sastav Popove glave, na istoku, sve do pomenute

kote, prevladuju oligocenski opali i opalasti krečnjaci, a kod samog prevoja, ispod plitkog deluvijuma i prljavog neogena, izviruju glave pešćara i listastih laporaca iste starosti. Nagnuti položaj poslednjih i diskordantni odnos prema prvim stenama određen je moravsko-zaplanjskom dislokacijom, a i izdan se javlja na liniji njihovog kontakta. Samo njen pjezometriski nivo nije dublji od 2 m, dok razlika između sedla i tačke isticanja iznosi 10 m. Po tome, lako se zaključuje da sabirna oblast zalazi i u sektore kote 503 gde su uslovi za upijanje padavina najpovoljniji i odakle one uglavnom podzemno gravitiraju ka grlu (prof. 1). No, ovakva vodopropusna struktura primetno utiče i na evoluciju izdani, pa se stoga i malo niže javljaju podvirci. Ovi disperzivi umanjuju kapacitet glavnog koji je 24. avgusta 1967., nakon kiša što su poslednji put padale 14. i 15. istog meseca i verovatno izručile više od 11,8 mm taloga koliko ga je bilo u Nišu (up. 24), imao svega 0,1 lit/sec ili 360 litara u toku jednog sata. No, nije poznato da li se on u drugim atmosferskim prilikama pojačava ili smanjuje, mada treba očekivati njegovu nepromenljivost.



Prof. 1. Tektonski i hidrogeološki odnosi u zoni isticanja Milinice. — 1. Škriljci; 2. Laporci i pešćari; 3. Opalasti krečnjaci i opalske mase; R. Moravsko-zaplanjska dislokacija; O. izvor

Istoga dana u 14 sati izmerena je i temperatura izvora. Tada je ona, pri vazdušnoj od $28,4^{\circ}\text{C}$, iznosila 12°C . Voda je, pak, bila bistra, čista, pitka i laka, jer se probija kroz peskovite laporce koji su dobar filter, a na zidovima sudova, mernim instrumentima i na samoj cevi sadržavala i mehuriće koji možda potiču od prisustva CO_2 . Međutim, nakiseli ukus se nije osećao. Zato su neophodne hemiske analize, pa ako se njima ovaj gas potvrdi onda bi Milinica predstavljala jedan ohlađeni i jako razblaženi kiseljak. U tom slučaju dobiće i više na značaju. Ovako se jedino koristi za piće slučajnih prolaznika i napoj stoke.

2. Blagojinski vir. — Ovaj izvor ima još dva imena — *Kun* i *Drum*. Javlja se skoro na samom prevoju između kote 503 (Torine) i Popove glave, odnosno u začetku dolinice Dugačkih livada i na 410 m visine. I on je lako dostupan, jer i pored njega vodi put (otuda i drugo ime) za selo Paljinu. Prvobitno je slobodno isticao, ali su ga ljudi nedavno otkopali i pretvorili u primitivno otvorenu zemljastu zakopinu dubine i dužine 1,5 m i širine 0,8 m ispunjenu vodom što najvećim delom vremena miruje. Dno mu je u plitkom i nečistom neogenu koji pokriva zelene flišne i tankoslojene la-

porce i pešćare oligocena. Kako su oni mladim tektonskim kretanjima uklješteni između kristalina na zapadu i opala na istoku i i sa padom (prof. 1), a po hidrogeološkim osobinama uglavnom slabo vodopropusni, to je izdan stvorena na kontaktu njihovih glava i skvažljive povlate. Zato je plitka i sa malim vodenim stubom koji se preko gornjeg zida sporim gravitacionim kapima proceduje u basen. To je znak da i sabirna oblast nema veliku površinu, tj. organičava se na sedlo prevoja, a možda i evolucija izvorišta. Za potvrdu tome može poslužiti i jedan nešto niži i puniji bunar dubok 4—5 m. Prema tome, glavne komponente koje pretežno učestvuju u hranjenju Blagojinskog vira jesu direktne padavine i slivanje sa topografske površine. Stoga se i isticanje iz njega retko javlja. Iz tih razloga nije postojalo ni 24. avgusta 1967., jer se poslednje kiše izlučile pre 10—11 dana u ukupnoj sumi od preko 1,8 mm što je očigledno malo za takvu pojavu. Tako je izdašnost ostala nepoznata. Pored toga, i temperatura vode nije se merila, uglavnom zbog zagađenosti raznim otpacima. Inače, namena vira je samo za nalivanje jedne bašte, ali kad dođe do oticanja, onda se koristi i za pijenje kao relativno čista. U to vreme aktivnosti treba i utvrditi izdašnost, temperaturu i druge fizičko-hemijske osobine.

3. Denin kladenac. — Do njega se dolazi od Blagojinskog vira po talvegu dolinice Dugačkih livada. On je na 390 m apsolutne visine bunarasto ukupan i polukružno obziđan do dubine 70 cm, ali razgrađen. Oko njega su vrlo uškriljeni glinasti zeleni lapori pokriveni plitkim deluvijumom, dok su susedne padine na zapadnoj strani od kristalastih škriljaca, a na istočnoj od opala. Poslednji su izbili na moravsko-zaplanjskoj dislokaciji, ali ona nema nekog značaja u hidrologiji izvorišta. Sama izdan, pak, nalazi se na glavama prvih slojeva, no zbog njihove slabe vodopropusne moći i svoje plitkosti vrlo je siromašna. U stvari, atmosferski talog ovde znatno više površinski otekne nego što se u sabirnoj oblasti upija. Čak je i isparavanje veliko. Zato je kladenac 24. avgusta 1967. bio suv. Prema tome, kiše što su unazad za 10—11 dana pale u nešto većoj ukupnoj sumi od 11,8 mm nisu imale uticaja na pojavu vode u basenu koja je presahla na 5 dana pre njih. Dakle, ona postoji samo u vlažnom periodu godine i tada verovatno ističe gravitaciono i dobija otoku čiji se tragovi vide sve do ranije opisane česme Stubline (up. 18, 45—7). Inače, od njene disperzije i podzemnog doticanja sa gornjih terena, koritasto dno Dugačkih livada celom dužinom je u vidu sipedža. Zbog toga su na više mesta iskopani plitki virčići (10—30 cm) za stočarske potrebe. U jednom takvom temperatura je u 17 časova iznosila 13°C što predstavlja čudnu anomaliju s obzirom na plitkost izdani, osušanost basena i zagrejanosti vazduha od 27,4°C. Ostala svojstva, usled zablacenosti, nisu mogla da se odrede. Što se namene tiče, Denin kladenac, prema svom izgledu i kad ima vode, prvenstveno služi za piće, a virčići niže njega za napoj stoke.

4. **Trševine I.** — Ispod sastava potoka Dugačkih livada i otoke česme Stubline, u dnu zajedničke doline na 326 m visine postoji otvoreni vodosabirni basen kruškastog oblika izdužene ose 1,3 i najšire 0,8 m. Ukopan je do 20 cm ispod jednog kraćeg topografskog odseka, a oko njega su stenovita parčad koja odaju tragove nekadašnjeg kladenca. Dno mu je u tankom deluvijalnom nanosu, dok podinu čine prljave, takođe plitke, neogene gline, pa zatim verovatno nastaju oligocenski flišoliki listasti laporci. Na obližnjoj kosi Kremenca zastupljeni su još opali i baremski krečnjaci, ali ove tvorevine, kao i rasedna linija, nemaju uticaja na hidrologiju, jer izdan leži na kontaktu laporovite osnove i skvažljivog pokrova i hrani se isključivo padavinama i sporim gravitacionim procedlivanjem potočne vode. Tako je sabirna oblast svedena na uski pojas dolinskog dna Dugačkih livada počev još od Deninog kladenca. Iz tih razloga, a možda i evolucije prema Trševinama II, ovde u letnjem periodu, nezavisno od proteklog vremena palih kiša, nema aktivnog oticanja. Takvo stanje je bilo i 24. avgusta 1967., tj. 10—11 dana od njihovog poslednjeg lučenja u ukupnom iznosu nešto preko 11,8 mm, negoli u obližnjem Nišu (up. 24). Međutim, ovaj izvorak i ne presušuje uglavnom zbog okolne livadske vegetacije koja ga i održava. Na osnovu toga se zaključuje da i kod njega postoje veoma uske hidrološke zone i da on pripada prelaznoj odakle su već istekle prolećne retenzije.

U toplom sutonu voda je pokazivala 18°C, a vazдушna 22°C. Ovako visoka vrednost rezultat je ekspozicije basena suncu preko celog dana, zatim njeno mirovanje i plitka izdan. Prema tome, ona je topla, ali ne i termalna. Inače, još je zelenkaste boje i zagađena od truljenja opalog lišća i travne vegetacije, kao i prisustvom žaba za čije filogenetsko razmnožavanje odgovaraju ovakve temperaturne prilike. Zato se izvor ne koristi za piće već samo za napoj stoke. Njegova rekaptaza ne bi dala veće rezultate, jer su ljudi zapazili da sve više slabi što je karakteristično i za izdašnost nekih drugih u okolini Rujnika.

5. **Trševine II.** — Dalje nizvodno, na 30 m ispred Srednjeg pojila obrađenog u hidrologiji baremskih tvorevina, (up. 18, 47—8), na skoro istoj visini (326 m), nailazi se na drugo istoimeno izvoriste, ali je ono rasuto, jer ga čine dva disperziva koji verovatno gravitiraju sa Trševine I. Prema tome, izdan im je ne samo plitka već i sekundarna. Inače, geologija njegovog terena se ni u čemu ne razlikuje od prethodnog te mu je i ostala hidrologija ista. Jedino je izdašnost ovde jača. Naime, 28. avgusta 1967, ona je iznosila na jednom grliću 0,028, a na drugom 0,022 ili skupa 0,050 lit/sec, odnosno 180 litara za sat vremena. Ova količina usledila je posle jučerašnje pljuskovite kiše čija se ukupna suma kretala iznad 2,5 mm (up. 24).

Navedenog datuma u podne, pri poluoblačnom i malo vetrovitom danu, voda je imala 14°C, a vazduh 22°. To znači da na njenu malu zagrejanost imaju izvestan uticaj i spoljni faktori

koji neometano dopiru do prilično plitke i siromašne izdani. Usled toga, iako ističe bistra i bez mirisa, njen ukus je bljutav. Stoga se za piće izuzetno upotrebljava; više služe za napoj stoke. Čini se da ni savremeni kaptažni radovi ne bi poboljšali njene sveukupne fizičko-hemijske osobine te ih ne treba ni obavljati.

6. Šopura. — Takođe se nalazi u sektoru ranije navedenog Srednjeg pojila (up. 18, 47—8) te je i pod tim imenom poznat. Samo je od njega niži, tj. na apsolutnoj visini 325 m i bliži potoku Dugačkih livada. Njega označava otvoreni rupčasti i hidrofilnom livadskom travom obrastao basenčić prečnika i dubine 35 cm ukopan pod topografskim zemljastim odsekom zbog čega mu je i dno pokriveno peloidom. Četiri metra dalje takav je i jedan veći vir koji prikuplja oticajnu vodu, mada nije isključivo da se i on samostalno ispunjava.

I iznad ovog dolinskog izvorčića se izdiže Kremenac od opala i silifikovanih baremskih krečnjaka čiji prekid ujedno obeležava i poznatu moravsko-zaplanjsku dislokaciju. Ova kosa predstavlja i njegovu sabirnu oblast. U njenoj utrobi je izdan razbijenog tipa. Ali, poniranje padavina, kojima se ona hrani, zbog gusto satkanog deluvijalnog pokrivača, dosta je usporeno i nedovoljno. Tome svakako doprinosi i rasedna linija čija je glavna uloga njihovo odvođenje u niže terene. Sem toga, izviranje je ovde drugačije, tj. sifonsko, što do sada nije bilo poznato za ovakve nekarbonatne stenovite mase. Međutim, hidrostatički pritisak je jako mali pa se to kosi sa imenom izvora i, naravno, odražava na slabu izdašnost. Tako je 28. avgusta 1967. protok bio samo u tragu, iako se kiša u iznosu nešto iznad 2,4 mm (up. 24) juče izlučila. Prema tome, i ovde su već na izmaku prolećne retenzije i povlačnje nivoa stalno ovlažene hidrološke zone.

Istoga, prmenljivo oblačnog, dana u 12,30 sati temperatura vode Šopure pokazala je podeok 14°C , a kod vazduha $22,5^{\circ}\text{C}$. Ova povišena vrednost možda dolazi od spoljašnjih toplotnih faktora i truljenja livadskih trava u sabirnom basenu, ali se ne smeju prenebregnuti na termalni uticaji, kao i blizina eventualno takvog izvora Srednjeg pojila sa 15°C (up. 18, 48). Zato je potrebno da se merenja još koji put obave pa tek onda doneti konačan zaključak o mogućnosti prisustva i juvenilne komponente. Ovako je bistra, bez mirisa i ukusa. Samo je u viru zelenkaste boje koja dolazi od zasićenosti kalcijum hidrokarbonatom. Ljudi je uglavnom koriste za pijeње, zatim pri napoju stoke i kod zalivanja bašte. Poseban značaj ima u kultu za ispiranje očiju. Tako dakle, prema narodnom verovanju, ona ima i lečilišnu ulogu. Ukoliko se to i balneološki dokaže, onda bi Šopura predstavljala i jedan razblaženi termomineralni izvor za šta postoje i neke indikacije, jer izbija iz opalskog terena.

7. Suvi kladenac. — Položaj mu je skoro na samoj graničnoj liniji Niške kotline, tj. idući šumskim putom što vodi od Crnog

vrha prema jugu, odnosno Rudini. U stvari, to je sada jedno otvoreno udubljenje nepravilnog izgleda na 602 m visine i sa prečnikom od 1,2 m. Pa i ono se jedva primećuje od stenovitog materijala nasuljanog prilikom provale oblaka juna 1967. Tako mu dno leži u nesortiranoj drobinu opala i baremskih krečnjaka koja otežava pravo odredište izdani i poreklo njeno. Stoga se pretpostavlja da je kontaktna, ali može biti i kraškog tipa, jer u blizini ovog sekundarnog izvorišta postoji i Crnovrški kladenac u skoro identičnom geološkom sastavu (up. 18, 48). Shodno tome samo se uslovno vezuje za oligocenske tvorevine čija je pojava i razbijena struktura uslovljena istoimenim rasedom što znatno olakšava upijanje padavina u celoj sabirnoj oblasti koja jednim delom sigurno zahvata i sam Crni vrh. Međutim, njihova podzemna descendentna orijentacija i cirkulacija istovremeno je i duboka pa se tako Suvi kladenac našao u nivou prelazne hidrološke zone. Iz tih razloga, a možda i zbog njene evolucije ka nižem isticanju, 22. avgusta 1967. on nije imao vode. U stvari, pojavljuje se samo s jeseni kad su kiše češće i s proleća posle topljenja snega i traje sve do početka juna. Prema tome, to je sezonski, možda sifonski, izvor za čiju aktivnu fazu treba veća suma padavina od 11,8 mm pa da se pojavi. Tada valja obaviti i merenja i odrediti mu sva svojstva koja su ovom prilikom ostala nepoznata. Inače, glavna namena mu je za napoj stoke.

8. Nalivada. — Isto je u južnom podnožju Crnog vrha; tačnije, ispod jedne velike vrbe i u visini 558 m. Izvorski basen je otvoren, kružnog oblika, prečnika 1,5 m i od deluvijalne zemlje blatnjav, pun hidrofitne trave, opalog lišća i grančica. Samo dno je, pak, u drobinu od opala. Ove silicijske tvorevine takođe jasno ukazuju na prisustvo crnovrške rasedne linije duž koje je bilo i kretanja. Usled toga, sabirna oblast koju čini kontakt sa krečnjacima zadobila je združanu strukturu pa su tako stvoreni i dosta povoljni uslovi za upijanje padavina. Međutim, nivo stalno ovlažene hidrološke zone, odnosno izdani, ovde je dubok i u verovatnoj evoluciji snižavanja. Osim toga, i oticajna voda sa ovog gravitacionog izvora odmah ponire i nakon 20 m ponovo izbiја na površinu. Iz svih tih razloga, njegova izdašnost je mala, ali ne presušuje. Naime, 22. avgusta 1967. ona je iznosila svega 0,016 lit/sec ili blizu 58 litara za jedan sat, dok se u nižoj tački iskazivala još slabije. Uzrok tome može se tražiti i u sedmodnevnom odsustvu kiša, koje su 14. i 15. istog meseca ovom terenu možda malo više dale od 11,8 mm taloga negoli Nišu (up. 24), kao i u isparavanju. U drugim sezonama ovaj kapacitet, pretpostavlja se, treba da je nešto veći.

Navedenog datuma u 17,30 časova obavljeno je i merenje temperature vode. Tada je, po još uvek sunčanom vremenu i toplom vazduhu od 19,7°C, iznosila 14°C. Na ovako relativno visoku vrednost utiču ekspozicija otvorenog basena suncu i prodiranje njegovih zraka u dublju unutrašnjost nevezanog stenovitog mate-

rijala od kojih se ona zagreva. Stoga, iako otiče, postaje mlaka i neukusna. Uz to, naseljena je i žabama i raznovrsnim bubama. Otuda, prvenstveno je namenjena napoju stoke za šta se koriste i nekoliko manjih virčića ispod mesta isticanja. Međutim, kad bi se izвориšte prokopalo, očistilo i kaptiralo dobilo bi veći značaj.

9. Belovje. — U prostoru Crnog vrha, a južno od Nalivade, na 535 m postoji i jedan povremeni silazni izvor. Njegov sabirni basen je otvoren, plitak i nepravilnog kružnog oblika (2×1 m). Uz to, dno mu je, zbog humusnog i rezidualnog glinovitog pokrivača, postalo blatnjavo, zaraslo u hidrofitnu travu i naseljeno žabama. Ispod ovog zemljastog tla su opet opalske grudve i drobina čije prisustvo potvrđuje postojanje crnovrškog raseda. Međutim, on je hidrološki potpuno pasivan, jer izdan pripada pripovršinskom kontaktnom tipu. Stoga, iako je sabirna oblast većeg obima i u njoj postoje relativno povoljni uslovi za upijanje padavina, zbog uticaja toplotnih egzogenih faktora, ona podleže isparavanju i nije bogata. Pored toga, zasečena je i jednim topografskim odsekom od 3 m te se u suštini samo proceduje. S tim u vezi, voda je u basenu 22. avgusta 1967. mirovala, a po njenoj neznatnoj količini lako se zaključuje da i sasvim presušuje. Prema tome, ishrana izvorišta zavisi isključivo od direktnih padavina koje su ovde pre 7—8 dana ostavile nešto više od 11,8 mm taloga nelogi u Nišu (up. 24), jer je poznato da on sa visinom uvećava svoju vrednost. Ali, da je kiše bilo i više, protok se u ovom letnjem periodu ne bi javio. Tako su, pored izdašnosti, izostali i merni pokazatelji temperature. I ostale osobine su nepovoljne. Naime, voda je mutna i od truleži raznih biljnih i životinjskih otpadaka zagađena. Radi toga je prevashodno namenjena napoju stoke pa i to se čini samo u vreme aktivne faze isticanja.

10. Rosulja. — Kod Kupusarskih pojata, koje su severozapadno od sela Leskovika i blizu granične linije Niške kotline, na 562 m visine podignuta je improvizovana česma. Njen sabirni rezervoar je u obliku stubline, jer se sastoji iz izdubljenog panja kruškovaog drveta pobijenog u grlo izvora, potom od gvozdene lule sa promerom 2 cm i olučaste korube široke 6 cm niz koju otiče voda i, sa još 2—3 izvorčića, stvara barovito i blatnjavo zemljište. Prema tome, radi se o izvorištu rasutog tipa na opalskom terenu pokriven tankim laporovitim i glinovitim slojem neogena. I ove su silicijske mase izbile na jednoj leskovičko-rujničkoj uzdužnoj rasednoj liniji čija je aktivnost doprinela da i sabirna oblast bude dobrim delom rastrešena. Time su dobijeni i povoljni uslovi za upijanje atmosferskog taloga, njegovo slobodno podzemno dreniranje, cirkulisanje i usmeravanje u razne pravce. Tako je i izdan, koja se njime jedino hrani, u stvari, razbijena. Shodno tome, i pražnjenje joj je disperzivno i, zavisno od položaja pukotina, složeno. Otuda na ovom mestu, pored gravitacionih, ima i sifonskih žilica žive vode, ali su zato one slabog protoka što se vidi i po

kapacitetu česme koji je 22. avgusta 1967. imao svega 0,028 lit/sec ili 101 jednočasovni litar. On je dobijen sedmog dana od poslednjih dvodnevnihi kiša koje su obližnjem Nišu dale ukupno 11,8 mm (up. 24), ovde verovatno i više, ali se čini da ni kod većeg taloga, zbog prirode stena, ne bi bio veći.

Temperatura vode merena je istog datuma u 10,30 časova. Tada je po vedrom, sunčanom i toplom vremenu imala 12°C, a vazдушna 20,6°C. Prema toj vrednosti može se zaključiti da je izdan iznad neutralnog sloja i da prima spoljne uticaje te se zbog toga očekuju i manja kolebanja, ali u smislu ohlađivanja. Kad se tome doda da je voda još i bistra, nezagađena, bez ukusa i mirisa, lako podnošljiva, onda Rosulja ispunjava sve norme predviđene za pijeenje za šta uglavnom i služi. Uz to, koristi se i za napoj stoke, kao i u zalivanju bašti. Međutim, ako bi se kaptirali svi izvori i skupa sprovedi u gornji deo sela Leskovika, koji inače oskudeva u zdravoj vodi, dobiće mnogo više na značaju. Pre toga neophodno je izvesti i hemijske analize, jer ima indicija da ona sadrži i izvesne količine CO₂ pa je možda i malo mineralizovana.

11. Pešićev đeriz. — Zapadno od Leskovika kod Kupusarskih pojata, po sećanju ljudi, »do pre 40 godina« bio je neki sipedž. On je iskopom najpre pretvoren u kladenac pa u bunar dubok 3 m. Zatim je voda odayde kanalom (vodom), dugim 150 m i obložen kamenom i ćerpičem pa pokriven zemljom do 0,5 m debljine, sprovedena do Pešićeve pojate. Sada ona tu, u visini 340 m, gravitaciono izbija između dve poklopljene ćeramide uglavljene u topografski odsek i otiče prema otvorenim zemljastim virovima.

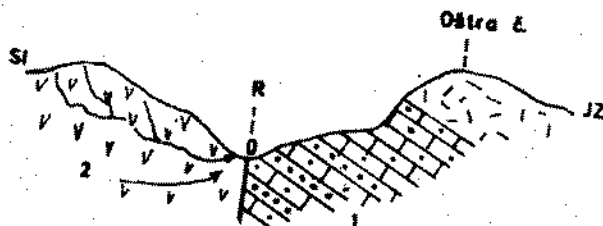
Izvorište i sabirna oblast je u zoni opala, ali ove stene pokriva deblji deluvijum te se upijanje padavina, jedne komponente u hranjenju plike izdani, i podzemna cirkulacija vrši dosta usporeno. Zbog toga je i kapacitet đjeriza mali, svega 0,050 lit/sec ili 180 jednočasovnih litara. On je izmeren 22. avgusta 1967., odnosno sedmog dana od poslednjih kiša koje su 14. i 15. istog meseca Nišu dale ukupno 11,8 mm (up. 24), a ovom terenu verovatno i nešto više, jer se njihova suma u izvesnoj meri povećava sa visinom. Samo, sigurno je da u ovom godišnjem dobu ni veća količina vodenog taloga bitno ne utiče na pojačanu izdašnost.

Zbog plitkog ukopa dovodnog kanala, voda, zavisno od vremenskih prilika, ima varijabilnu temperaturu. Tako je istog sunčanog dana u 9,30 časova na đerizu bila 16°C, a vazduhu 20°C. Zato je neugodnog ukusa, a od loše izvedenih koptažnih i drenažnih radova još i mutna te iz ovih razloga jedino služi za navodnjavanje bašti.

12. Studen i kladenac II. — Nalazi se u severoistočnom podnožju Oštre čuke na 518 m visine i u kompleksu hrastove i brestove šume. Njegov sabirni basenčić je prečnika 90 i dubine 25, ali sa vodenim stubom od samo 5 cm. Uz to je i otvoren pa zbog

toga ima muljevito, više blatnjavo, i lišćem pokriveno dno. Ukopan je u deluvijalni pokrivač male debljine ispod kojeg su opalske grudve manjeg volumena. To znači da je na samom rasedu koji se proteže od Leskovika i paralelno prati moravsko-zaplanjsku dislokaciju (up. 13, 37 i prof. 2). Međutim kretanja na njemu kao da su davno završena te je pukotinska struktura kod ovih silicijskih stena začepljena zemljastim slojem što onemogućava normalno upijanje padavina i njihovu slobodnu i dublju cirkulaciju. Otuda je i izdan vrlo plitka, odnosno pripovršinska, a ne isključuje se ni njena evolucija prema Studenom kladenecu III na šta upućuje i sama slaba podzemna vodena žica koja gravitaciono izbija iz korena jednog crnog trna. Upravo, njen dotok, izmeren 31. jula 1967., tj. odmah iza trodnevnih obilnih kiša (oko 20 mm), iznosio je 0,050 lit/sec ili 180 litara na sat. Međutim, dobija se utisak da i pri dužim padavinama on ne bi bio uvećan, jer na ravnomerni režim isticanja utiče šumska vegetacija koja dugo zadržava atmosferski talog.

Navedenog datuma u 15,30 časova, pri sunčanom vremenu, temperatura vod je pokazivala 11°C, a čvazdušna 28,4°C. Ova vrednost rezultira od samog položaja izvorskog basena kojeg okružuje šuma te tako deluje i vrlo osvežavajuće, mada nije i adekvatna svom nazivu. S obzirom da gusto drveće sprečava i mućenje, to se odlikuje još i bistrinom i nakiselim ukusom što svakako dolazi i od dodira sa silicijskim stenama. Po toj osobini, Studeni kladenec II eventualno se može uvrstiti u hladne i slabe kiseljake. No, ovu pretpostavku treba proveriti hemijskim probama pa ukoliko bude opravdana onda pristupiti raskrivanju izvorišta i kaptazi grla. Time bi se uvećao kapacitet i omogućila svrsishodnija eksploatacija. Ovako, ovu možda mineralno-lekovitu vodu, za sada jedino koriste retki čobani.



Prof. Hidrogeološki odnosi u sektoru Studenih kladenaca.
— 1. Peščari i peskoviti krečnjaci otriva; 2. Oligocenski opal; R, Leskovički rased, O, izvor

13. Studeni kladenec III. — Na 50 m udaljenja od prethodnog odnosno 100—150 m severozapadno od ranije obrađenog Studenog kladenca (up. 17, 80), postoji treće izvorište pod ovim imenom koje je ograđeno i pokriveno u jednoj vododerini (>funiji<) na 514 m visine. Basen mu je nepravilnog oblika i ukopan u rezidijum čija dvometarska debljina maskira kontakt otrivskih poščara i pesko-

vitih krečnjaka Oštre čuke s iedne i velikih blokova opala sa druge strane. Tako je i on, kao prethodni, na istom rasedu, a ni hidrogeologija im se mnogo ne razlikuje (prof. 2). Naime, i ovde su uslovi za ravnomerno upijanje dosta nepovoljni. No, s obzirom da se izdan hrani sa veće sabirne oblasti, koju pokriva šumska vegetacija, i eventualno od povlačenja vode iz prethodne, to je ona postojanija i bogatija. U stvari, njeni podzemni disperzivi najpre su gravitaciono usmereni na prostor od oko 100 m kvadratnih, a onda se probijaju prema kladencu i u vidu gustih kapljica descedentno proceduju kroz njegovu tavanicu. Samo ta količina vode nije mala što se vidi i po prelivu na kojem je 31. jula 1967. bilo 0,142 lit/sec ili preko 511 litara u jednom satu. No, ona je svakako i odraz dojučerašnjih trodnevnihi kiša čija se suma ovde ceni na 7 puta više negoli u obližnjem Nišu kojem su ukupno dale svega 3,3 mm. U sušnijim danima izdašnost ovog Studenog kladenca sigurno je manja s obzirom da su prolećne retenzije blizu površine i izložene osetnom isparavanju.

Temperatura vode spomenutog datuma u 15 časova, po tihom, sunčanom i toplom vremenu, bila je 11,5°C, a u vazduhu 28,4°C, te po toj vrednosti pripada freatskom tipu, mada bi prema nazivu objekata treba da bude i hladnija. Nezavisno od toga, ona u ovo doba dana i godine zaista osvežavajuće deluje. Uz to je i bistra, prozirna, čista, dok se na zidovima suda hvataju gasni mehurovi koji ukazuju na prisustvo CO₂, ali se na ukusu ne oseća. Zato se samo pretpostavlja da je to jedan nenaglašeni, možda i slabo mineralizovani, kiseljak. Pa ako se ova svojstva hemijskim analizama potvrde, onda je poželjno preduzeti i neke opsežnije tehničke i druge mere u cilju podizanja bolje kaptaze, spajanje sa prethodnim, veće zaštite i svestranije eksploatacije. Ovako, voda sa ovog kladenca služi uglavnom rećkim prolaznicima za piće, odnosno neiskorišćeno oćiće prema Rujnićkoj reci.

14. Bunar iznad Rujnika. — Iskopan je na 422 m visine, odmah više poslednjih kuća ovog sela na putu za Leskovik. Teren i tu izgrađuju opali, a povrhi njih leži plašt od rezidijalne zemljaste mase debljine 2 m. Na toj dubini je i izdan čija sabirna oblast zahvata malu površinu pa s tim u vezi ima i mali vodeni stub. On maskira način izviranja, koje treba da bude gravitaciono, i onemogućava merenje kapaciteta, a dubina hidroobjekta — i temperaturu. Inaće, po zelenim algama, što su ga 31. jula 1967. ispunjavale, on ne presušuje. Međutim, njegova jedina namena je za polivanje bašte.

15. Dojkinski kladenac. — Na 100 m iznad poslednjih kuća sela Rujnika, na desnoj strani istoimene rećice, i na visini 415 m postoji obzidan i pokriven basenčić prećnika 1 m i dubine 40 cm pun vode. Ukopan je u moćan deluvijalni oranićni sloj zemljišta ispod kojeg su opalske mase formirane na leskovićkom i drugim rujnićko-humskim rasedima u ovom delu Niške kotline (up. 9, 35,

37, 39, 41—3). Mada one nemaju direktnog uticaja na hidrogeologiju izvorišta, ovakvi tereni ipak pogoduju upijanju padavina, ali njihovo prodiranje preko površine u unutrašnjost, zbog relativno male sabirne oblasti i pretežno kompaktne strukture podinskih silicijskih tvorevina, ograničene je dubine. Stoga je izdan bliže površini i podložna isparavanju, odnosno osciliranju, dok se cirkulacija vode i njeno gravitaciono probijanje prema zidovima kladenca obavlja usporeno. Shodno tome, ima i slab kapacitet koji je 30 jula 1967. na prelivu iznosio jedva 0,525 lit/sec ili 90 jednočasovnih litara. On je dobijen nakon dvodnevnih kiša što se ovde, po kazivanju meštana, sedmostruko izručile u odnosu na Niš gde su izmerene 3,3 mm (up. 24). Prema tome, dobija se utisak da je njihov neposredni upliv na jačanje izdani slab i da ova stoga u ovo doba godine još uvek troši prolećne retenzije i to iz gornjeg dela stalno ovlažene hidrološke zone.

Temperatura je merena tačno u podne i tog navedenog, više sunčanog, dana u izvorskom basenu iznosila 12,5°C, a u vazduhu 25,9°C. Tako se i po njoj može konstatovati da je zastupljena vazodna komponenta na koju spoljni faktori ograničeno deluju. Ostala svojstva vode sadržana su u njenoj bistrini te je Runjičani koriste za pijeње, a najbliža kuća i u razne domaće potrebe, ali povremeno i za napoj stoke. Osim toga, planira se da bude bolje kaptirana i sprovedena u selo i to bi bio drugi pokušaj, jer je prvi neostvaren godine 1965. No, i dotle ovaj hidroobjekat treba brižljivije zaštititi i održavati, jer mu je dno pod mutljagom i otpacima lišća i grančica što ga u izvesnom smislu čini i malo zagađenim, iako je van naselja.

16. Pištak. — Idući po gornjem putu što od Rujnika vodi za Hum na visini 396 m nailazi se na jedan vrlo plitak (15 cm) izvorski basenčić sa dosta peloida. On je ukopan u tanak humusni deluvijum ispod kojeg leži rastresita drobina sačinjena od silifikovanih krečnjaka i opala. Njeno poreklo je isključivo tektonsko, jer su radijalni procesi i ovde bili intenzivni, duboki i dugo aktivni (up. 13, 39). Sa ovakvom stenskom strukturom dobijeni su povoljni uslovi za upijanje i sprovođenje padavina do izdani čije je hranjenje uvećano i time što sabirna oblast ima relativno ravnu površinu ili vrlo blage nagibe. Inače, po tipu treba da je klastokraška što donekle potvrđuje sifonski način pražnjenja i evolutivno snižavanje izvorišta za 10—12 m od prvobitne visine na udaljenju oko 100 m. Uzlazno kretanje vode ovde se sigurno vrši na kontaktu pomenutih karbontanih i silicijskih tvorevina, ali je izbijanje na grlu jako prigušeno te na tom delu dolazi do razlivanja i oslobađanja pritiska zbog čega nastaje pištanje pa otuda, valjda, i takvo ime. U stvari, vidno se javlja samo u jednoj tački, dok je zemljište unaokolo za 10 m kvadratnih jako ovlaženo. Zato se kapacitet 30 jula 1967. nije mogao tačno izmeriti pa je aproksimativno određen na 0,50 lit/sec, odnosno 180 litara u jed-

nom satu. On je usledio posle dvodnevnihi kiša koje su Nišu dale 3,3 mm (up. 24), a ovde, po kazivanju ljudi, sedam puta više. No, i ovaj talog bio je bez nekog upliva na uvećanje izdašnosti pa na osnovu toga lako se da zaključiti da u ovo doba godine uglavnom ističu prolećne retenzije iz gornjeg nivoa stalno ovlažene hidrološke zone.

Temperatura ovog sićušnog vrelca merena je pri vedrom sunčanom danu, ali sa velikom vlagom. Dakle, u 10,30 časova, kad se vazдушna popela na 23,9°C, ona je imala 13°C. Po ovoj vrednosti moguće je utvrditi da se voda u pripovršinskom delu ne samo sporo kreće kroz deluvijalni materijal, već da i delimično prima nadzemne uticaje. Međutim, to joj ne smeta da bude bistra i čista, a od ostalih osobina ima i naglašeni slankasti ukus. Zbog toga je stoka, posebno goveda, skoro napadno pije. Ipak, najvećim delom slobodno otiče i široko se razliva po livadi što je čini vlažnom i blatnjavom. To nameće potrebu da se grlo izvora otkopa, a prostor oko njega od 10—15 m kvadratnih očisti i izdrenira. Na taj način protok će se znatno povećati. Isto tako, neophodno je izvršiti i hemijsku analizu vode pa ako se zaista utvrde njena mineralna hloridna svojstva, tada preduzeti i druge odgovarajuće hidrotehničke mere u cilju kaptaže, zaštite i svestranijeg iskorišćavanja.

17. Lokve. — Na razvođu između Humske i Rujničke reke u visini 402—405 m ima 5—6 utoleglica u prečniku oko 2 m plitko ukopanih u rezidualni deluvijalni pokrivač opalisanih krečnjaka i opala. S obzirom da su gornje tvorevine slabopropusne, to se gravitaciona voda na ovakvim mestima povremeno zadržava na duže vreme i tako postaju zabarena što odgovara i samom nazivu lokalnosti. Ona su kao takva bila i 30 jula 1967., ali bez oticanja iako je kiša pre opservacije padala dva dana i ovom terenu ukupno dala oko 20 mm taloga, a Nišu samo 3,3 (up. 24). Prema tome, njihova zajednička izdan, koja ovde pripada pripovršinskom kontaktnom tipu, vrlo je siromašna. Uz to je izložena i direktnim sunčevim zracima i drugim spoljnim uticajima zbog čega su sve lokve prljave i zagađene pa im temperatura nije merena. Inače, namenjene su napoju stoke i spravljanju blata za izradu tugle. Iz tih razloga nisu pogodne za širu upotrebu, naročito ne za piće.

18. Rakita. — Na ovom mestu, koje je severoistočno od Rujnika i u vrhu suve, plitke, blago i široko razvučene Markove padine, nekada su na 500 m visine postojala dva kladenca. Danas su to rupčasti otvori duboki do 1 m sa vodenim stubom oko 30 cm. Oba su u rastresitom tankom rezidijumu ispod kojeg leži moćnija drobina od opala, a zatim verovatno dolaze i krupnije mase ovih silicijskih tvorevina. To je moguće, jer se i ovaj deo terena nalazi u zoni ukrštanja severnonišavskog i rujničko-humskog raseda. Tako cela sabirna oblast ima vrlo poroznu strukturu te se padavine dosta lako upijaju, čak i dublje od nivoa izviranja.

Otuda je gravitaciono proceđivanje vode u basene jako sporo i to uglavnom za vreme kiše. Isto je bilo i 31. jula 1967. kada su im zidove vlažile kapljice od trodnevnihi dojučerašnjih kiša čija se ukupna suma ovde ceni na oko 20 mm. Zbog ovakvih uslova, bivši kladenci i nemaju izdan u pravom značenju, već pripadaju slučajnim, verovatno povremenim, hidrološkim pojavama. Uz to, u njima je zadržana voda, usled neoticanja, plitkosti i nepokriveosti, direktno izložena spoljnim uticajima. Shodno tome, ona je topla, a od prisustva hidrofihnih biljaka, žaba i drugih organizama, još i prljava, odnosno zagađena. Zbog takvih prilika ni temperatura nije merena. Praktično nema ni nekog značaja, osim što povremeno služi za zalivanje jedne baštice siromašne i zemljištem i kulturama. Prema tome, na ove izvorke ne treba računati, čak ni onda kad bi se preduzele i savremene tehničke mere.

19. Savin klanenac. — Nalazi se istočno od najgornjih kuća sela Rajnika; tačnije, u Markovoj padini i na 472 m visine. Izvorski basenčić mu je mali i nepravilnog oblika, ali obzidan, pokriven i sa vodenim stubom 14 cm. Otvor za zahvatanje vode eksponiran je jugu i obrastao puzavicama i travom. Ovo bilje, kao i opalo lišće sa jednog brestovog drveta, pokriva peloidno dno koje je u humusnom deluvijumu debljine oko 2 m, dok se ispod njega rasprostiru raspadnute opalske tvorevine. Tako postoji relativno dobra porozna struktura za upijanje padavina i ishranu plitkokontaktne izdani, ali se stiče utisak da taj proces ipak sporo teče. Usled toga je i gravitaciono punjenje, odnosno pražnjenje, kladenca izuzetno slabo; upravo, voda se kod njega samo proceđuje i ponaša više kao stajaća. Takva je bila i 2. avgusta 1967., iako su između 28. i 30. jula pale dobre kiše (oko 20 mm). Međutim, postojeći tragovi nekanalisanе otoke ukazuju da u vreme dužih padavina i nekorišćenja nje ima i nešto više.

Navedenog datuma u 14 časova, pri vedrom sunčanom i veoma toplom danu, temperatura kladenca iznosila je 14°C, a vazdušna 30°C. Ova vrednost je u drugim satima i sezonama verovatno i niža kad ga senka drveta zakloni od direktnih sunčevih zrakova. Inače, voda je u njemu bistra, bezbojna, bez mirisa i ukusa tako da spada među najprijatnije i relativno najčistije u neposrednoj okolini. Zbog takvih osobina namenjena je jedino za piće, ali samo malom broju ljudi iz Huma i Rujnika. Neovisno od toga, neoticanje i plitko muljevito dno zahteva njenu povremenu bakteriološku analizu.

20. Donji Osoj. — Naziv je za jedan od više gravitacionih izvoraka u Markovoj padini, ali u sektoru Humskih lugova. Njegov bliže određeni položaj je glogovo drvo i kota isticanja 465 m. Svojevremeno je bio kladenac, a sada ga predstavlja otvoren i sa zapadne strane do 60 cm podzidani zemljasti basen sa vodenim stubom od 30 cm. Dno je peloidno i pokriveno opalim lišćem i naseljeno žabama, mirmorcima i raznim bubama. Ukopano je u

plitak površinski humusni sloj debljine 1 m ispod kojeg su oligocenske opalske mase i silifikovani krečnjak. Po ovim tvorevinama lako je zaključiti da se i ovo rasuto izvorište nalazi u rujničkoj rasednoj zoni i da sabirna oblast takođe ima razbijenu strukturu. Međutim, stiče se utisak da su mnoge i primarne i sekundarne pukotine stešnjene i ispunjene mineralnom supstancom ili zaptivene deluvijumom. Zbog toga je upijanje padavina i podzemna drenaža ograničenog domena pa izdan pre pripada pripovršinskom kontaktnom, negoli nekome drugom tipu. Takvi hidrogeološki odnosi negativno se odražavaju i na izdašnost vodene žice koja sporo dotiče sa zapada i daje svega 0,016 lit/sec, odnosno 58 jednočasovnih litara. Ona je dobijena 2. avgusta 1967., tj. trećeg dana od poslednjih trodnevnihi kiša koje su Nišu dale 3,3 mm taloga. No, iako ga je ovde bilo čak »sedam do deset puta više« isticanje se nije uvećalo. U stvari, promena se javlja samo u vreme duge suše kada, po poimanju ljudi, »malo opadne«. Nema sumnje, na takav nepromenjeni režim utiče okolna vegetacija, ali ne i na temperaturu vode koja je dotičnog dana u 12,30 časova imala 14°C, a vazдушna 30,2°C. To je verovatno posledica sunčanog vremena i dopiranje spoljne toplote do plitke izdani. Potom se odlikuje bistrinom, ali je po ukusu bljutava. Osim toga, u sezoni žetve često je zamućena i zaprljana od kvašenja slamene užadi za vezivanje snopova. No, to ne smeta žetaocima i drugim težacima da je koriste za umivanje i piće kao »odličnu«. S obzirom na ovu namenu, kao i zbog privođenja stoke na napoj, mora se povremeno i bakteriološki proveravati. Nisu naodmet ni hemijske analize, jer je ustaljene izdašnosti, povišene temperature i neuobičajenih drugih osobina. Uz sve to, radi bolje zaštite, donji Osoj treba otkopati i ponovo preobratiti u kladenac.

21. Čičulovski kladenac. — I on je u sektoru Humskih lugova; tačnije, u podnožju Golog brega i na visini 463 m. Takođe je razgrađen pa ga kao takvog odaje jedino razbacano kamenje unaokolo otvorenog ovalnog basena prečnika 1,5×1 m i sa vodenim stubom od 30 cm. Dno mu je muljevito, a kako leži ispod grana drveća još i pokriveno lišćem, dok po površini plivaju zelene alge koje ukazuju na njegovu stalnost, ali i slabu posećenost. Osim toga, protočan je i nakon 3 m nekanalisano se razliva po bujnoj travi što ga okružuje. Vodena žica što ga ispunjuje sporo se i više kapljičavo gravitaciono probija sa severa kroz tanak humusni sloj ispod kojeg leže opalisani krečnjaci i jedri opali iz poznate, već napred spomenute, rasedne rujničke zone. Njihova struktura dobrim delom je i pukotinska, ali relativno plitka izdan zbog male sabirne oblasti, ima slabu izdašnost. Tako je 2. avgusta 1967. davala svega 0,012 sekundnih litara ili 45 u jednom satu. Istina, ova količina je neznatna, ali stalna, jer režim isticanja reguliše okolni šumski plašt. Inače, usledila je tri dana od poslednjih trodnevnihi obilnih kiša (oko 20 mm). One i snežne padavine ujedno su i jedina komponenta u ishrani ovog kladenca.

Merenje temperature vode obavljeno je u 11 časova po sunčanom danu. U to vreme imala je $12,5^{\circ}$, a vazдушna $28,5^{\circ}\text{C}$, no ona sigurno varira s obzirom na malu dubinu izdani i južnu ekspoziciju izvorišta koje, nema sumnje, prima solarne i atmosfere uticaje. U svakom slučaju, ovo je njena dobra fizička osobina, jer u izvesnom smislu i osvežava. Uz to je još i bistra, bezbojna i sa ukusom šumske sredine. Zato prvenstveno služi za piće ljudima što povremeno borave po obližnjim pojatama, a 2—3 odvojena manja zemljasta virčića — i napoju stoke. Stoga, glavni sabirni basen treba bolje održavati, tj. češće čistiti i ponovo pretvoriti u kladenac koji će vodu štiti od spoljašnje prljavštine. Jer ovakva, kakva je sada, ona se pre upotrebe mora i bakteriološki proveravati.

22. Šopor. — U stvari, to su dva rasuta gravitaciona izvorka ispod Markove padine na 450 m nadmorske visine. Njihovi otvoreni ovalni sabirni basenčići prečnika 80×60 i 30×20 cm i dubine 15 cm udaljeni su jedan od drugoga pola metra i eksponirani jugu. Dno im je pokriveno muljem, bubama, žabama i mrmorcima te su vrlo prljavi. U većem ima i zelenih algi koje ukazuju na postojanost vode u njemu, dok manji možda i presušuje tako da ove pojave odudaraju od pravog naziva. Oba su ukopana u humusni deluvijum debljine 0,5—1 m. On pokriva opale i druge slične produkte, kao i silifikovane krečnjake što znači da se i ovaj sektor nalazi u rasednoj zoni Rujnika. Međutim, kao i kod prethodnih, mala je gustina pukotina ili su one u oblasti hranjenja ograničenog prostiranja i dobro zaptivene površinskim slojem. Stoga je izdan kontakt, plitka, slaba i promenljivog nivoa. Inače, njen stub zavisi od padavina koje se poslednji put izlučile obilno (oko 20 mm) između 28. i 30. jula 1967., dok su merenja obavljena 2. avgusta. Ovoga dana na zajedničkom curku izdašnost je iznosila 0,012 lit/sec ili nešto preko 43 litra za jedan sat. Po tome, pomenuta suma kiše kao da nije mnogo uvećala protok ili je taj uticaj već prošao za šta ima malo izgleda. To znači da se još uvek prazne prolećne akumulacije iz najvišeg dela ovlažene hidrološke zone.

Neznatna dubina podzemnih drenažnih žica, zatim otvorenost, osunčanost i zapuštenost izvorskih basena ima odraza i na temperaturu bistre Šopure. Naime, voda je u 13 sati, po vedrom, sunčanom i veoma toplom vremenu ($28,5^{\circ}\text{C}$), imala 16°C , ali ta toplina, iz navedenih razloga, preko dana i u toku godine verovatno se menja kao i sam ukus koji u ovo doba nije baš ugodan. Stoga je sve ređi čobani koriste više za napoj stoke negoli za piće što ne isključuje potrebu za njenom obaveznom bakteriološkom proverom. No, ima izgleda da bi se otkopavanjem grla i zaštitom jednog zajedničkog basena njen kvalitet, a možda i proticaj, znatno poboljšao. Samim tim i temperatura biće realnija.

23. Kostina česmica. — Na oko 180 m ispod Šopura i 435 m visine postojao je ovaj hidroobjekt sve do 1957. godine. Sada je na tom mestu otvoreni sabirni zemljasti basen sa osama $1 \times 0,8$ m i

dubine 12 cm oko kojeg su razgrađeni manji krečnjački blokovi. Dno mu je u humusnom sloju te sadrži peloid, a ispod njega se rasprostiru opali i druge silifikovane tvorevine iz rujničke rasedne zone. Prema tome, geološko tektonska struktura i hidrogeologija je ista kao i kod prethodnih izvoraka. Shodno tome, i ovde je izdan plitka, kontaktna i, iako ima veću sabirnu oblast, slabe izdašnosti o čemu svedoči i sam protok. Naime, i Kostina česmica je 2. avgusta 1967. davala, kao i Šopur, 0,012 lit/sec ili nešto iznad 43 jednočasovna litra, mada su poslednje trodnevne kiše obilno pale (oko 20 mm) na par dana ranije. To znači da u ovo doba godine one nemaju veći značaj na protok, ali zato »nikada ne presušuje« što ovo izvoriste čini zagonetnim i zanimljivim za proučavanje.

Sporo gravitaciono probijanje nejake podzemne vodene žice kroz humusni sloj i južna ekspozicija njenog grla povišava joj temperaturu koja je navedenog datuma u 12,30 časova iznosila 16°C, a vazдушna 28,9°C. Veruje se da je to i njena približno najveća vrednost. U ostalim satima i drugim sezonama mora da je niža. Prema tome, radi se o toplom, ali ne i termalnom izvorku. Njegovu bistru, bezukusnu i pitku vodu koriste uglavnom čobani i mali broj slučajnih prolaznika iz Rujnika i Huma isključivo za piće. Ova namena ujedno zahteva i bolje održavanje, odnosno zaštitu basena kojeg zasipa trunje i nastanjuju žapčici. Važna je i provera temperature, osobito u hladnijem periodu godine.

24. Livade. — Pripada ataru sela Huma. Tačnije, ovaj silazni izvorak je između Cvetkovog dela i ranije opisanog Dutkinskog kladenca u otrivskim sedimentima (up. 17, 81) i na visini 480 m. On ispunjava otvoreni zemljasti improvizirani basen nepravilnog oblika sav obrastao hidrofilnim, barskim i livadskim, biljem, žabokrečinom i zelenim algama što ukazuju na postojanost vode u njemu, dok po muljevitom dnu žive mrmorci. U celini predstavlja jedno plitko ulegnuće prečnika 1—1,5 m u rastrešenom humusnom materijalu ispod kojeg se verovatno prostiru opali i kristalasti krečnjaci čiji se izdanci vide 80 m severnije. Međutim, sabirna oblast izgleda da je vrlo mala, a tektonska struktura nedovoljno razbijena ili dobro zaptivena recentnim slojem pa se upijanje padavina i njihova cirkulacija obavlja veoma sporo i plitko. Stoga je izdan pripovršinskog, eventualno kontaktnog, tipa i, s tim u vezi, veoma slaba. Kad se tome doda i prigušeno procedivanje kroz bujnu hidrofilnu travnu vegetaciju i blatnu sredinu, onda nije slučajno što je i voda mrtva, tj. zabarena. Čak se dobija utisak da je njeno obnavljanje pre direktno od padavina, negoli podzemno. U oba slučaja, prilikom obilaska 2. avgusta 1967., ona nije imala protok, iako se kiša ovde obilato izlucila na 3—5 dana ranije, naročito 28. jula (skupa oko 20 mm). A ukoliko se radi o hidrološkim zonama, što nije utvrđeno, onda je Livade u prelaznoj.

Istoga datuma u sutonu (oko 19 časova), posle vrlo toplog dana, temperatura vode bila je 14°C, a vazduha 24,5°C, ali se za vreme

videla verovatno uvećava za stepen-dva. Prema tome, na to izvoriste iako i znatno utiču spoljašnji faktori. Zato je i bljutavog ustajalog ukusa, barskog mirisa i, nema sumnje, od blata i raspadanja biljaka još i zagađena. Pa i pored toga ljudi je koriste za pijenje. Iz tih razloga neophodne su bakteriološke analize. Međutim, raskrivanjem grla, odnosno češćim čišćenjem i zaštitom sabirnog basena dobio bi se protok, realnija temperatura i sigurno zdravija voda.

25. Bezimeni kladenac. — Podignut je tačno na jugozapadu od Cvetkovog dela, koji je na desnoj strani epigenetski zasećene doline Humske reke, odnosno ispod puta Rujnik—Brenica i na visini 455 m. Dno ovog malog pokrivenog hidroobjekta, sa olučasto izvedenom i takođe kamenom podzidanom žicom, ukopano je u humusni deluvijum debljine 1 m. Ispod tog plašta su opali, a 100 m severnije i baremski krečnjaci. Dotične tvorevine su, s obzirom na blizinu severnonišavskog raseda, razbijene i pod Cvetkovim delom pretvorene u osuline pa je tako neposredna sabirna oblast, čiji prostor ne prelazi 600 m kvadratnih, veoma povoljna za upijanje padavina i njihovo sprovođenje do izdani koja leži na većoj dubini od nivoa isticanja. To znači da se kladenac nalazi u njenom gornjem delu pa otuda i objašnjenje zašto sadrži malu količinu vode. U stvari, 2. avgusta 1967. ona je bila stajaća bez obzira što su obilne kiše pale između 28. i 30. jula (oko 20 mm), a u Nišu ukupno 3,3 mm (up. 24). Međutim, prema postojećem suvom kanalu koji indicira oticanje, gravitacioni dotok u proleće i u kasnoj jeseni sigurno se uvećava, jer su tada padavine učestanije i akumulacije u perature na osnovu koje bi se bliže odredilo njeno poreklo.

Istog dana u 19,30 časova, po tihom, vedrom i toplom vremenu (24°C), temperatura vode bila je 14°C. Zbog toga, i ustajalosti, ima bljutav ukus, ali je bistra i bez mirisa. Nezavisno od takvih ne sasvim pogodnih osobina ljudi je, naročito u žetvi, koriste za pijenje. Shodno tome, kladenac bi se morao bolje održavati i povremeno bakteriološki pregledivati. Ne treba izostaviti ni proveru temperatura na osnovu koje bi se bliže odredilo njeno poreklo.

26. Topoljak. — Ranije je bio više poznat pod imenom *Korube*, ali njih odavno nema. Tačno je na SSZ od vrha Humske čuke gde ga na 417 m visine opkoljava šumarak od vrba i topola po kojim se tako i naziva. Njegovo grlo svojevremeno je bilo kaptirano i za 100 m sprovedeno do Humske reke u »veoma staru česmu«. Od nje danas postoji samo razrušeni zid visok oko 1,5 m, razbacana parčad stena unaokolo i jedan izdubljeni blok što je nekada ležao ispod lule, kao i tri ceramide umetnute u dovodni kanal preko kojih se voda sliva.

Izvorišni sektor pokriva deluvijalni humusni sloj te se sastav podine određuje posredno preko obližnjih nestratifikovanih baremskih krečnjaka, oligocenskih opalskih masa i bigra. Ove tvorevine ujedno čine i sabirnu oblast koja je od intenzivne radijalne tek-

tonike postala prilično razbijena i permeabilna. Međutim, dopiranje padavina do nedefinisane izdani, kao njenu možda jedinu komponentu u hranjenju, ipak je otežano, jer mnoge pukotine zaptiva recentno zemljište. Uz to, ovakve hidrogeološke prilike usporavaju i gravitaciono isticanje pa je kapacitet Topoljaka 30. jula 1967. iznosio samo 0,066 sekundnih, odnosno 238 jednočasovnih litara. On je dobijen posle dvodnevni padavina od blizu 20 mm taloga, dok se u Nišu istovremeno izlučile ukupno 3,3 mm (up. 24). Prema zamućenosti vode, koja traje još od jučerašnje kiše, zaključuje se i to da je varijabilan, ali zbog okolne vegetacije, što zahvata oko 10 ari površine i reguliše vodni režim, ne presušuje niti ima velika dodavanja.

Temperatura je izmerena u 9 časova po maglovito-tmurnom i vlažnom, ali toplom vremenu. Tada je izvor pokazivao 14°C, a vazduh 21°C te nema sumnje da nju određuju solarni uticaji koji prodiru kroz gornji sloj zemljišta gde se i padavine duže zadržavaju. Zbog toga, voda i nije ponajboljeg kvaliteta. I izvorski basen se retko čisti te je dno muljevito i pokriveno raspadnutim biljnim materijama što truljenjem prouzrokuju njenu bljutavost. Pa ipak, pastiri, težaci i retki lovci koriste je za piće. Otuda je neophodna potreba da se kaptaža ponovo preuredi i bolje zaštiti, a nekadašnja česma renovira. Uz to, valja je još koji put posetiti i određivati njene fizičko-hemijske osobine ne bi li se konačno došlo do zaključka o njenom pravom poreklu s obzirom da u blizini ima i termomineralnih izvora.

27. **Zmijanac.** — Tačno je na zapad od prevoja na Humske čuki, desno od korita istoimenog toka i na 359 m nadmorske visine, ali se do njega najlakše stiže uzvodno od sela Huma na oko 500 m udaljenja. Basen mu je u celini pravougaoni 50×30 cm, ograden i potpuno pokriven komadima krečnjačkih stena te tako predstavlja dobro zaštićen kladenac. U njega je uglavljeno tanko izdubljeno stablo dužine 2—2,5 m čijim žlebom voda direktno otiče u reku.

Ovaj izvor dolinskog tipa spominje i J. Marković-Marjanović, ali ga vezuje »za neogeni teren« (8, 65). U stvari, neposredna okolina sagrađena je od oligocenskih opala, bigrova, bigrovitih krečnjaka i od njihovih osulina. Svi ti litološki predstavnici dobrim delom su vodopropusni, a naročito sunderast i kavrenozan kompleks Humske čuke. U stvari, ovakva struktura zahvata celu sabirnu oblast, a ova je uz to i u prostoru izrazite tektonike iskazane snopom raseda od kojih jedan vodi njegovom zapadnom stranom (up. 13, 39, 45). Tako je omogućeno lako upijanje i do 80% padavina, njihova slobodna do 105 m, možda i dublja, vertikalna cirkulacija, drenaža i formiranje razbijene polukraške pukotinske izdani. Međutim, mimo očekivanja, u njenom hranjenju ne učestvuje i komponenta rečne vode, jer je ona za vreme osmatranja bila zamućena, a kod izvorske nije. Inače, mlazna žica danas živo izbija gravitaciono i u nivou dodira rastresitog recentnog sloja i nave-

denih karbonatno-silicijskih masa, ali se primećuje i jedan minijaturni obluk odmah iznad kladenca koji inicira mesto ranijeg isticanja. Po tome, izdan, odnosno stalno ovlažena hidrološka zona, samo se u holocenu snizila za najmanje jedan metar. No, ovo evolutivno povlaćenije vodonosnog horizonta izgleda da nije mnogo poremetilo kapacitet Zmijanca koji je 28. jula 1967. iznosio 0,5 sekundnih ili 1800 jednočasovnih litara. On je usledio odmah po prestanku obilnih kiša što su istoga dana Nišu dale samo 2 mm taloga (up. 24), a ovde, po pričanju ljudi, sigurno oko 20 mm. Samo, prema bistrini vode, te padavine nisu imale nikakvog udela na pojačano isticanje. Kako se lučile i pre 9 dana, takođe u maloj količini (0,2 mm), to je moguće bezrezervno tvrditi da u ovoj sezoni uglavnom nastaje pražnjenje prolećnih retenzija.

Merenje temperature obavljeno je po mutnom i prohladnom vremenu. Naime, u 17 časova, pri vazdušnoj od 19°C, voda je imala 14,5°C. Ovako relativno visoka vrednost, pored stabilnosti režima izdašnosti, upućuje na pretpostavku da u hranjenju izdani možda neznatno učestvuje i rashlađenja termalna komponenta što je, s obzirom na izrazitu radijalnu tektoniku Humske čuke, sasvim moguće. Uz to, nije isključiva ni pretpostavka da su na izvesnoj dubini prisutni i magmatiti s kojima je ona u kontaktu pa se tako delom i minerališe. Ove osobine kao da potvrđuju i zapažanja ljudi da je »uvek bistra«. Kad se tome doda da je još i čista, bez ukusa i mirisa, onda je pojmljivo zašto je Humljani i drugi slučajni prolaznici koriste isključivo za pijeње. Sve to nalaže da se Zmijanac hemijski analizira i povremeno prati njegova temperatura. Pa ukoliko rezultati budu povoljni (sadržaj retkih elemenata i stalni ili približni stepen zagrejanosti i drugo), izvorište treba otkopati, rekapirati i sprovesti u jedan veći zajednički rezervoar u koji bi se dopremila voda i sa ostalih izvora što imaju slične osobine već ranije istaknute kako u oligocenskim tako i u drugim slojevima. Na taj način ne samo što će selo Hum dobiti na značaju nego i ceo ovaj kraj Niške kotline.

28. Bezimeni izvor. — U jugozapadnom podnožju Humske čuke, kod druge vodenice, odnosno pri dnu levog dolinskog odseka na 1 m od istoimene reke i na visini 335 m postoji otvoreni basenčić veličine 80×25×5 cm. Njega ispunjava slobodno isticanje, ali u tom procesu sufozijom i oburvavanjem zemljišta grlo se zarojava te predstoji mogućnost da vremenom bude sasvim zatrpano ili skrenuto na neku drugu stranu. Utoliko pre što se ono nalazi i u siparskoj bigrovitoj drobini, kao i u poznatoj tektonskoj zoni u kojoj su radijalni pokreti, izgleda, povremeno dejstvovali sve do kraja pliocena, a oslabljeni i do završetka diluvijuma. Ove rasedne linije, po J. Marković-Marjanović, zahvatile su i sam bigar zbog čega je on zadobio i »odlomitski karakter« (8, 66, 70—1; 13, 25, 39, 45). Šabirna oblast je pak, u ogolelom horstu Humske čuke čija šupljikava, kavernozna ili raspadnuta i rastresita struktura upija naj-

manje dve trećine padavina i vrlo dobro pogoduje njihovoj drenaži, a debljina mase — vertikalnoj i horizontalnoj cirkulaciji i formiranju dubljih pukotinskih izdanskih polukraških sistema. Tako je glavna akumulacija vode u njenom kompleksu odakle ona disperzivno zalazi u neogeni i deluvijalni zagat ili izbija na liniji njihovog dodira. Shodno tome, oko nje se javljaju par sekundarnih izvorišta među kojima spada i ova gravitaciona žica što dolazi sa severa u snazi od 0,100 lit/sec ili 360 litara za jedan sat. Ovaj protok dobio je 30. jula 1967. nakon dvodnevne kiše koje su Nišu ukupno dale 3,3 mm, a ovom kraju znatno više. Međutim, prema bistrini vode, taj atmosferski talog kao da nije mnogo uticao na izdašnost. Prema tome, ovde se uglavnom praznile prolećne retenzije čiji se nivo u ovo doba godine nalazio u gornjem delu stalno ovlažene hidrološke zone.

Temperatura vode merena je u 8 časova po vlažnom vremenu i navedenog datuma imala 16°C, a vazдушna 19,5°C. Ova visoka vrednost može se tumačiti dvojako; ili je prouzrokovana prodorom spoljašnjih toplotnih uticaja u izdan kroz aluvijalni nanos i nasuljani raspadnuti materijal, ili dotiče i juvenilna, znatnim delom, ohlađena komponenta. Obe pretpostavke imaju svog opravdanja, mada je stvarnost logički bliža drugoj koju donekle potkrepljuje još bistrina, neosetna tvrdina i bljutav ukus. Ove fizičko-hemijske karakteristike nameću i potrebu da se voda podvrgne hemijskoj analizi i čestoj proveru jednakog stepena zagrejanosti. Nakon toga preduzeti otkopavanje grla i snižavanje nivoa isticanja, zatim njegovu kaptažu, izgradnju većeg rezervoara i ostalo što bi imalo veću korist od sadašnje jedine upotrebe za piće sve ređim čobanima i retkim prolaznicima. I u slučaju da je čisto freatska, tj. mlaka, postojeći sabirni basen morao bi da se održava, jer preči opasnost da bude potpuno ispunjen denudacionim i drugim nanosima.

29. Crkveni izvor. — Poslednji je, i sa naučno-istraživačkog aspekta najzanimljiviji, u rujničko-humskoj grupi. On se nalazi na 365 m nadmorske visine odmah iznad Humske crkve u koju je svojevremeno i bio sproveden. Međutim, izgradnjom lokalnog vodovodnog sabirnog rezervoara za Spomen česmu u selu (sl. 1), s obzirom na neposrednu blizinu, rekaptiran je 1936. godine(?) i uvučen u taj sistem. Tako se danas (16. avgusta 1967.) na tom mestu uopšte ne poznaju tragovi ranijeg isticanja*.

U stvari, izvoriste je pod istočnom stranom Humske čuke koju, kao što se zna, izgrađuje preneogeni bigar i ograničavaju istoimeni rasedi među kojima jedan vodi pored crkve i produžava dalje na SI (up. 13, 25, 39, 45). Uzvišenje čini i sabirnu oblast čija je struktura vrlo permeabilna, tipično sunderasta, te se upijanje padavina i

* Vodovod je sproveden sa Preobraženjskog vrela koje ističe iz otrivskih krečnjaka. Ono je ranije obrađeno (up. 17, 85), ali se tom prilikom ispustilo ne samo njegovo korišćenje preko Spomen česme već i sa ostalih desetak takvih hidroobjekata raspoređenih na razvodnoj mreži po Humu.

njihova podzemna drenaža lako obavlja i usmerava ka dubljoj, verovatno zajedničkoj, polukraškoj izdani prethodnog bezimenog, a možda i drugih, izvora. Prema tome, to bi bio samo jedan njen nešto jači i verovatno prelivno-gravitacioni disperziv u tom kom-



Sl. 1. Spomen česma u Humu sa vodom dovedenom iz Preobraženjskog vrela i Crkvenog izvora

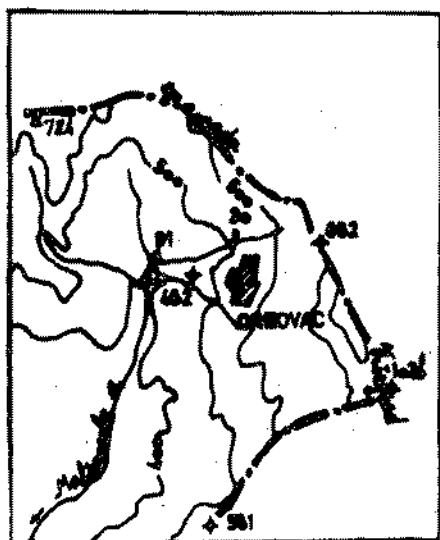
pleksu sa rashlađenim termalnim osobinama na šta upućuju i nekoliko dosta indikativnih činjenica. Prva i osnovna je što Humsku čuku izgrađuje isključivo šupljikav bigar koji kao takav prevashodno nastaje deponovanjem CaCO_3 iz toplih vodenih rastvora što sa gasovima izbijaju na rasedima. Druga se zasniva na navodima J. Cvijića da je limnokvarcit »kupastog brega« iznad Huma »starija termalna tvorevina« (1 268—9, 272)*. Treću potvrđuje J. Marković-Marjanović po kojoj iz »bezdani« u najnižem pećinskom otvoru iste čuke »zimi izbija vodena para (i) ukoliko nije (i sam njen bigar) termalnog porekla« (up. 8, 69, 73). Četvrta dopunjuje treću, jer se iste emanacije javljaju i iz vodenog rezervoara ne samo u zimskoj sezoni već skoro redovno kad vreme zahladi, posebno ujutru i uveče. Petoj ide u prilog pomen M. Kostića da i u ovom delu Kalafata postoje reliktnne termalne pojave »ponajviše vezane za komplekse Humske čuke« i da tu izbija »nekaptirana hipoterma« koja je »u vezi sa budimskim gasnim radioaktivnim strujanjem«, a dolaze »iz pukotina termalnih sedimenata susednog brda Vinika« (up. 5, 132, 137; 7, 69). Mada se iz ovih navoda ne može odrediti njena prava lokacija, je nije »na severnonišavskom rasedu«, ipak i taj podatak je značajan za opravdanost ovakve pretpostavke.

* Odgovarajuće pojave briga postole i u drugim delovima zemlje, naročito kod banja i banjica. Međutim, ovakvih »izolovanih partija« zapazila je i Z. Sučić-Protić na Golubačkim planinama. One su »i danas u kontaktu sa izvorima«, dok se nedaleko od njih javlja i jedno »termalno vrelo« (up. 23, 74—5).

Šesta je što i obližnji izvori, kao na primer Brod ili kod Humskog manastira, obrađeni u dodirnim otrivskim i baremskim slojevima (up. 17, 84—5; 18, 58—9), imaju sličnosti sa Crkvenim. Razlika u njihovoj temperaturi, koja verovatno ne prelazi 2°C, može se pripisati jedino nejednakim uslovima cirkulacije kroz jedriju krečnjačku (sporija i veći upliv kraške vode) i porozniju bigrovitu masu (brže kretanje i kraća udaljenost od termalne izdani). Sedmu potvrđuje njihova grupisanost na relativno malom odstojanju. Osmu objašnjava da se voda, pored pića, nekada koristila i za pranje rublja kao na Banjici u Gornjem Matejevcu (up. 15, 84—5). I poslednja, njena toplina, i pored mešanja sa hladnijom komponentom Preobraženjskog vrela, primetno se oseća i na Spomen česmi. Međutim, prava temperaturna vrednost, koja treba da se kreće oko 16°C, kao i druga u svakom slučaju razblažena fizičko-hemijska svojstva, zbog totalne zatrpanosti grla, prilikom posete navedenog datuma, ostala su nepoznata za ovu ne tako davno veštački iščezlu i za termalnu hidrologiju ovog terena važnu banjicu.

IZVORIŠTA U ATARU SELA OREOVCA

Poslednja dva izvora iz eventualnih oligocenskih tvorevina nalaze se na istočnom delu Niške kotline u neposrednoj blizini Oreovca. Njihov produžni broj bio bi 30 i 31 (sk. 2).



Sk. 2. Razmeštaj izvorišta u oreovačkoj grupi

30. Crvenac. — Na kraju je pomenutog sela idući Railu, odnosno izbija na desnoj strani potoka Dobrič i na visini 535 m. Grlo

mu je rasuto, jer se predstavlja sa više gravitacionih kapljičavih disperziva koji su pod odsekom visokim do 2 m skupljeni u jedan zajednički dren i sprovedeni u mali basenčić odakle voda ističe preko uglavljene drvene korube duge 80 cm i ispod nje se nekanalisano razliva. Mada ime nosi po crvenkastoj boji mlađe serije slojeva u njegovoj neposrednoj blizini, u profilu izvorišta mestimično proviruju i zelenkasti trošni peščari i lapori slični onim u pojasu prema Popovoj glavi, dok su nedaleko još i kredni krečnjaci. Sve te tvorevine su u zoni oreovačkog raseda, ali on nema uticaja na hidrologiju izvorišta pošto je dubina izdani oko 10—15 m i hrani se atmosferilijama; eventualno prima i neznatnu količinu kraške komponente, jer sabirna oblast delom zahvata i čisto karbonatne terene. Prema tome, ona je freatskog tipa. Međutim, zbog debljine povlate, infiltriranje vode do nje preko topografske površine vrši se otežano, ali postojano, pa je i takva izdašnost. Naime, ona je 10. jula 1968. iznosila 0,077 sekundnih ili 276 jednočasovnih litara, dok su poslednje jače kiše pale pre 16 dana i Nišu dale 25 mm, ne računajući i 1 mm od 4. istog meseca (up. 25), a ovde verovatno i više od ove sume. Prema tome, isticanja su iz stalno ovlažene, ali vodom već osiromašene hidrološke zone iz koje se prazne prolećne akumulacije.

Navedenog datuma u 13,30 časova, po sunčanom i ne baš toplom vremenu (oko 20°C), temperatura izvora bila je 12°C što ukazuje da do izdani ne dopiru spoljašnji uticaji ili su oni minimalni. Zato je i isticanja voda bistra, čista, bez ukusa i mirisa, laka i pitka. Ove osobine, pored proceđivanja kroz deblju krovinu gustih slojeva, dobrim delom su određene i šumskim zastorom sabirne oblasti. Inače, isključivo služi za pijenje, uglavnom težacima. S obzirom na tu namenu, nužno je povremeno obavljati njen bakteriološki pregled, a izvorski basen uvećati i bolje zaštititi.

31. Izvor kod Đurine vodenice. — Do njega se najlakše stiže od jušća Durlanskog potoka u Oreovački idući drugim uzvodno. U stvari, njegov otvoreni basen prečnika 80 cm leži na 390 m apsolutne visine u podnožju vegetacijom obraslog obalskog odseka. U njega se voda silazno i sporo stae, alo zbog ispunjenosti lišćem, grančicama i peloidom stub joj je svega 10 cm. Izbija na kontaktu deluvijalne nasuljane i porozne zemljaste mase izmešane krečnjakom drobinom i slabije vodopropusne zelenkaste gline i lapora koji mogu biti i neogene starosti i čija je tektonika mirna. Tako, iako se izvorište nalazi u zoni oreovačkog raseda, on nema nikakvu ulogu u ishrani izdani. Nju opskrbljuju prvenstveno atmosferske padavine sa grbine sekundarnog razvođa između navedenih potoka. Uz to, sigurno se u nju infiltrira i potočna komponenta s obzirom da je i u nivou nanosnog korita. Stoga je postojana i tokom najsušnijih leta. Međutim, mada joj je cela sabirna oblast sačinjena od nesortiranog materijala i krupne granulacije, usled male površine i zapremine akvifera njena izdašnost je siromašna. Naime, 12.

jula 1968. bila je svega 0,033 sekundnih ili blizu 119 jednočasovnih litara, dok se poslednje obilnije kiše izlučile pre 18 dana. Njihova količina u Nišu iznosila je 25 mm, a na ovom terenu verovatno, zbog veće visine, i nešto više od toga (up. 25). U drugim sezonama ona je svakako veća, jer se tada nivo stalno ovlažene zone izdigne, naročito od jesenjih i zimskih retenzija.

Temperatura izvora dotičnog datuma, između 12,30 i 13 časova, po sunčanom ali i vetrovitom vremenu sa oko 18°C, iznosila je 12,5°C. Prema tome, kao i prethodni, pripada freatskom tipu. Voda je još dobro filtrirana i u vezi s tim bistra, bezbojna, čista, bez mirisa, ukusa, laka i u ove dane osvežavajuća. U dugim intervalima prožimaju je i gasovi, no oni su izgleda proizvod procesa raspadanja lišća po dnu basena što ne smeta pri piću. Stoga je ljudi, pretežno težaci, u tu svrhu i upotrebljavaju. No, kako je koriste i za napoj stoke, mora se zaštititi od direktnog zagađenja, a povremeno i bakteriološki analizirati.

ZAKLJUČAK

Oligocen Niške kotline, predstavljen bigrom, opalima i uškriljenim laporcima, zauzima mali prostor. Uz to, kod sela Oreovca je i nesiguran mada se ne može sa sigurnošću tvrditi ni to da ceo kompleks i stratigrafski stub između dva oreovačka potoka sve do Selišta pripada samo neogenu. Iz svih tih razloga, kao i zbog vodo polupropustljivih osobina poslednje dve vrste stena, javlja se i relativno mali broj izvorišta — svega 31. Ali, i ove lokalnosti su dovoljne da se izvuku neki zaključci i donekle dobije hidrogeološka slika i takvih tvorevina koje do sada sa te strane nisu bile proučavane. Tako se stiče utisak da skoro i ne postoje bitne razlike između njih i slojeva druge starosti u pogledu sadržaja i pojave podzemnih voda. Istina, par izvora mogu doticati i iz mlađih geoloških sredina, naročito broj 30 i 31, i da se pojedini hrane isključivo iz otrivskih i baremskih krečnjaka, ali isto tako postoji mogućnost da i neki ranije opisani u njima dobijaju vodu sa pretpostavljenih oligocenskih terena u zoni Rujnika i Huma. Dalje, izdani su im mahom plitke i po tipu kod lapora kontaktne, u opalima pukotinsko-razbijene i u bigru polukraške. Za njih je karakteristično da se na 25 mesta prazne gravitaciono, na jednom (br. 13) gravitaciono-descendentno, ali ima i jedan prelivno-gravitaciono (br. 29) i tri sifonska isticanja i to iz čistih silikatnih stena (br. 6, 10 i 19), a za sedmi po redu se pretpostavlja da je istog takvog tipa što do sada nije bilo poznato u hidrogeologiji ovakvih silikatnih stena.

Na pojavu izvora više je uticala dolinska tekstura, odnosno reljefna razuđenost oboda kotline, negoli tektonika, mada se ne može apstrahovati ni njena uloga osobito kod polomljenih slojeva. S obzirom na to, izdani su najčešće slobodne i samostalne, ali sa

ograničenim površinama sabirnih oblasti i siromašne vodom o čemu svedoči i sama izdašnost izvora. Naime, prema poznatoj klasifikaciji E. O. Majncera (up. 21, 53), od njih 31 samo jedan bi pripadao šestoj grupi od 0,1 do 1 lit/sec, 17 sedmoj od 0,01 do 0,1, a 10 osmoj u koju idu oni ispod 0,01; poslednji nemaju isticanje ili je ono u tragu. Ostala tri su nakategorisana, jer je jednom grlo kaptirano, a dva preko leta presahnjuju. Doduše, 29 osmatranja i merenja su vršena tokom jula i avgusta 1967. i dva 1968, tj. u vreme malih padavina, odnosno kad im srednje mesečne količine, prema M. Milosavljeviću iznose 42 i 40, a po D. Dukiću 44 i 37 mm (up. 3, 25; 22, 182) i istodobno vladaju visoke temperature, a s tim u vezi vrši se i pojačana evaporacija, ali verovatno da ni u drugim sezonama njihov kapacitet nije mnogo veći. Prema tome, navedene vrednosti bile bi realne ili vrlo bliske minimumu koji leti iscrpljuje uglavnom prolećne podzemne retenzije. Međutim, one se odnose i važe samo za navedene godine, jer za druge količina atmosferskog taloga ne mora da bude ista. Iz tih razloga, pri merenju izdašnosti ovde se nije uzimala u obzir ni mesečna ni godišnja suma već proteklo vreme od poslednjih kiša.

Temperature izvora takođe su neujednačene čemu je najčešći uzrok nejednaka dubina izdani, odnosno debljina i poroznost krov-
nih sedimenata, kao i ekspozicija mesta prema sunčevim zracima, dok nadmorska visina uopšteno utiče na postupno opadanje njihove veličine, jer je najniže isticanje na 325 m i ima 14°C, a najviše na 562 m sa 12°C (ne računajući Suvi kladenac na 602 m, jer prilikom obilaska nije imao vodu), mada se između ovih granica mogu uočiti i inverzije. Tako npr. pod brojem 12 i 13 imaju 11 i 11,5°C, a nalaze se na 518 i 514 m itd. Oni su ujedno i najhladniji. Pored ostalog, u njihove podzemne rezervoare sigurno dopire i zimski hladan vazduh preko nekih pukotina i tamo se zadržava sve do leta. U drugu spadaju 8 njih sa 12—13°C čija je izdan verovatno najbliža neutralnom sloju, jer se srednja godišnja temperatura vazduha za nišku oblast kreće oko 11,8°C (up. 22, 150). U treću idu 9 sa 14—14,5°C, četvrtoj pripadaju četiri sa 16°C, a samo jedan ima 18°C. Kod preostalih 7, zbog kaptaze, zagađenosti ili nedovoljne količine vode u basenu, temperatura nije izmerena i tako ostala nepoznata. Ali, i iz ovoga pregleda može se izvesti zaključak da je najveći broj izvora freatskog tipa. Međutim, upoređenjem sa Cvi-
ljevim srednjim temperaturama, koje za istočnu Srbiju iznose od 9 do 11°C (up. 2, 37), samo prva dva mogu da im se pripoje. Njima je izdan verovatno ispod neutralnog sloja. Druge treba da se nalaze u njegovom nivou ili iznad i da primaju spoljne toplotne uticaje. To su dakle tople ili mlake, ali ne i termalne. Mada se ne sme zanemariti ni ta komponenta, jer prema savremenoj klasifikaciji (up. 4, 18), vode sa preko 15°C mogu biti i takvih osobina. Toj grupi eventualno bi pripali i izvori navedeni brojevima 6, 27, 28 i 29, iako dva-tri mogu biti i pseudotermalni. Tako sa njim hidrogeologija oligocenskih tvorevina postaje ne samo složena već sa

naučnog gledišta i zanimljiva. Samo ova problematika biće uprošćenija i jasnija ako se detaljnije ispituju ili bar češće proveravaju temperature s obzirom da im navedene brojčane vrednosti u drugim sezonama mogu biti i niže za stepen-dva.

Isticajna voda zbog pretežno plitkih izdani i pripovršinske cirkulacije, uglavnom je meka i presna, mada se rastvaranjem bigrovitih i laporovitih naslaga ponaša i kao hidrokarbonatna, alkalna i podnošljivo tvrda (do 20 dh), dok iz silikatnih i silifikovanih stena dolazi nešto malo nakisela. Slabo naglašena mineralizacija zastupljena je uglavnom kod izvora broj 1, 6, 10, 12, 13, 16 i 27 koji su ovakve osobine zadobili od verovatnog prisustva već ohlađenih juvenilnih gasova i rastvora što sobom nosi raselinska komponenta. Mada u nju ne treba mnogo sumnjati, naročito u zoni Humske čuke i opalskih stena nastale uglavnom iz vrelih rastvora, ipak su neophodne i hemijske analize vode radi svake sigurnosti. Posebno su zanimljivi pod brojem 6 i 16; prvi, još zbog kulturnih obreda, a drugi — po sadržaju hlorida što nesumnjivo dolazi od rastvaranja nekog sonog gnezda sačuvanog u baremskim slojevima do kojeg je doprla vadozna kraška voda u toku aktiviranja raseda u postoligocenu pa zatim, naknadnom migracijom, ponovo izbila na površinu kao razblažena i hladna murijatična.

Na kraju, proučeni izvori najvećim delom su bistri, čisti, bez mirisa i ukusa te shodno tome ljudi ih najviše upotrebljavaju za pijenje. Međutim, samo njih desetak imaju svežu i za domaću upotrebu odgovarajuću vodu. Uz to, u mnogim slučajevima se koriste i za napoj stoke što je normalno za brdska područja pa su izloženi povremenom zagađivanju, a za vreme kiše neki i mućenju. Stoga je ponekad potrebna i njihova bakteriološka kontrola, dok se zaštita sabirnih basena i kaptaža putem obzidavanja i pokrivanja podrazumeva. Ovim akcijama, zatim ograđivanjem i uređivanjem prilaza, kao i pošumljavanjem okoline, dobiće se sigurno na kvalitetu vode, a izvođenjem stručne drenaže i na količini što može korisno poslužiti i za izgradnju malih (lokalnih) vodovoda, mada je u međuvremenu (1978.) i na tom polju nešto učinjeno, ali samo za selo Hum. Ovi poduhvati biće posebno značajni za termomineralne izvore. Pojedinačno, njihova voda mogla bi se upotrebljavati za tople leje pod plastenicima i staklenicima i tome slično. Prikupljena, pak, u jedan zajednički rezervoar imala bi izvanrednu ulogu u kupanju a možda i u lečenju ljudi ne samo sa navedenih terena severnog niškotlinskog oboda, nego i sa šireg područja Kalafat planine koja je već poznata po ovakvim retkim hidrogeološkim pojavama (up. 5, 127—136; 6, 172—5; 7, 65—70; 7a, 35; 9, 136—8; 12, 189; 14, 154, 161, 166; 15, 84—5; 17, 85—6, 94—6; 18, 47—8, 52, 58—9; 19, 49—50, 54, 57).

L I T E R A T U R A

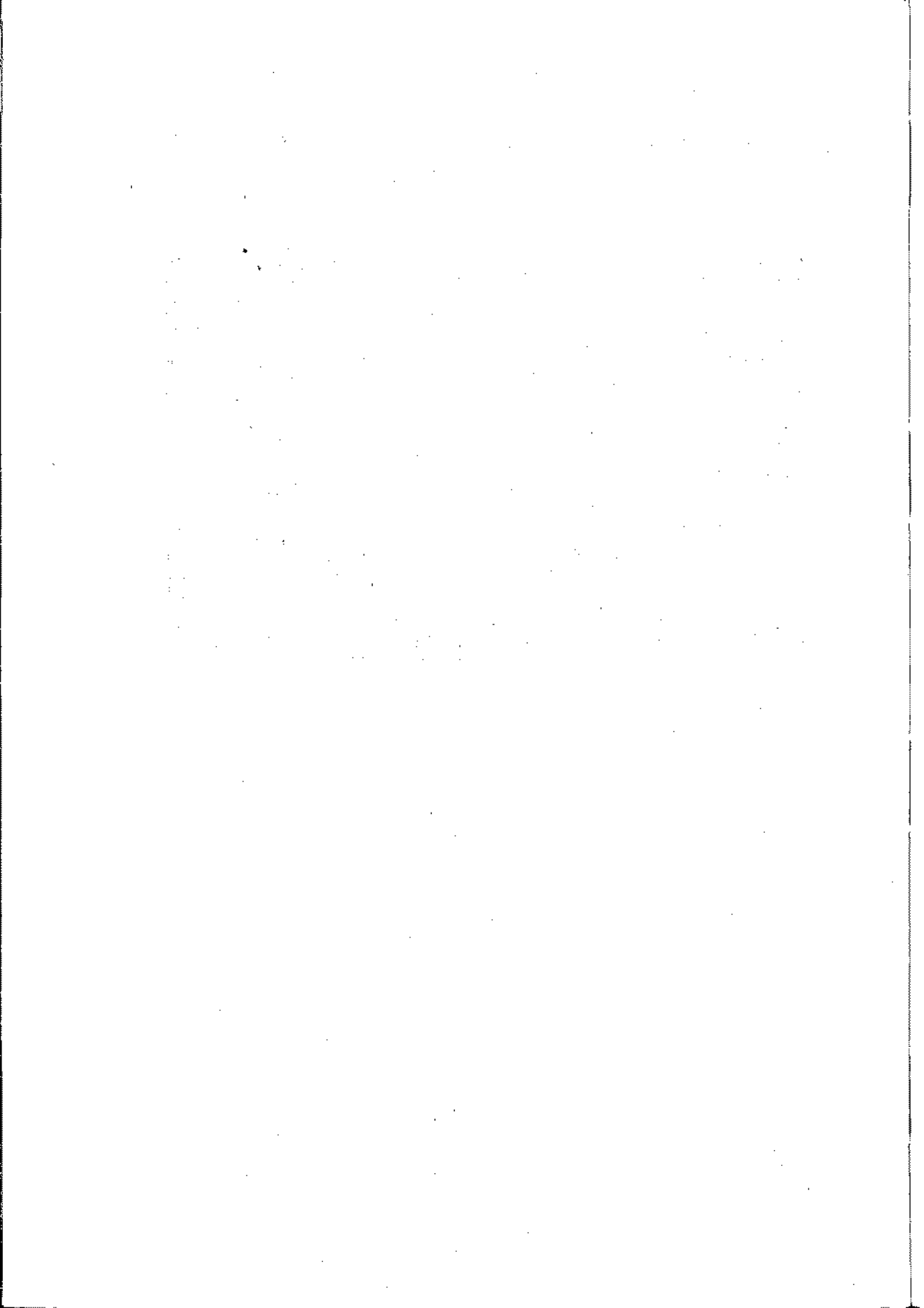
- [1] Cvijić J.: 1903. *Novi rezultati o glacialnoj eposi Balkanskoga poluostrva*. Glas Srpske kraljevske akademije nauka, knj. LXV, Beograd.
- [2] Cvijić J.: 1926. *Geomorfologija II*, Beograd.
- [3] Dukić D.: 1975. *Hidrografske osobine istočne Srbije*. Zbornik radova Geografskog instituta »J. Cvijić«, knj. 26, Beograd.
- [4] Đurović R.: 1963. *Hidrogeološka sistematizacija termalnih voda*. Vesnik Zavoda za geološka i geofizička istraživanja, knj. III, serija B, Beograd.
- [5] Kostić M.: 1978. *Raritetne termalne pojave u dolini Svetojovansko-matejevačke reke (Niška kotlina) i njihov turističko-geografski značaj*. Zbornik radova Geografskog instituta »J. Cvijić«, knj. 30, Beograd.
- [6] Kostić M.: 1979. *Kroz region Kalafata*. Globus, knj. 11, Beograd.
- [7] Kostić M.: 1979. *Termalno-geografske odlike regiona Kalafata i njihov turistički značaj*. Ekonomika, knj. 3—4, Niš.
- [7a] Kostić M. i Martinović Ž. M.: 1965. *Mogućnosti i značaj za turizam severne podgorine Kalafata*. Privredni glasnik, br. 5, Niš.
- [8] Marković-Marjanović J.: 1953. *O stratigrafskom položaju bigra kod Niša*. Geološki anali Balkanskog poluostrva, knj. XXI, Beograd.
- [9] Martinović Ž. M. i Kostić M.: 1965. *Terma kraljansko Topilo*. Glasnik Srpskog geografskog društva, knj. XLV, 2, Beograd.
- [10] Martinović Ž. M.: 1973. *Hidrogeološke odlike saveznog dela Niške kotline*. Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, knj. I, Priština.
- [11] Martinović Ž. M.: 1947. *Izvori na severnom kraju Niške kotline*. Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, knj. II, Priština.
- [12] Martinović Ž. M. i Kostić M.: 1975. *Popišićka Banjica*. Zbornik radova Geografskog instituta »J. Cvijić«, knj. 26, Beograd.
- [13] Martinović Ž. M.: 1976. *Niška kotlina — geneza i evolucija*. Posebna izdanja Srpskog geografskog društva knj. 43, Beograd.
- [14] Martinović Ž. M.: 1977. *Izvori u permskim crvenim pešćarima kao prirodni resursi na severnom obodu Niške kotline*. Niški zbornik, knj. 3. Niš.
- [15] Martinović Ž. M.: 1977. *Mogućnost za korišćenje podzemnih voda na zapadnom delu sela Gornji Matejevac*. Ekonomika, knj. 2, Niš.
- [16] Martinović Ž. M.: 1977/1978. *Izvori u titovalendiskim krečnjacima Niške kotline*. Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, knj. V, Priština.
- [17] Martinović Ž. M.: 1979. *Izvori u otrivskim slojevima na severnom obodu Niške kotline*. Niški zbornik, knj. 8, Niš.
- [18] Martinović Ž. M.: 1982. *Odlike i ekonomski značaj izvora iz baremskih slojeva na severnom obodu Niške kotline I*. Ekonomika, knj. 2. Niš.
- [19] Martinović Ž. M.: 1982. *Odlike i ekonomski značaj izvora iz baremskih slojeva na severnom obodu Niške kotline II*. Ekonomika, knj. 3—4 Niš.
- [20] Martinović Ž. M.: 1983. *Pregled izvora iz senonskih krečnjaka na obodu Niške kotline*. Geografska istraživanja, knj. 4, Priština.
- [21] Meinzer E. O.: 1923. *Outline of ground water Hydrology with definitione Water Supply*, Washington.
- [22] Milosavljević M.: 1969. *Klimatske odlike Velike i Južne Morave*. Zbornik radova Geografskog instituta »J. Cvijić«, knj. 22, Beograd.
- [23] Sučić-Protić Z.: 1961. *Stratigrafija i tektonika Golubačkih planina*. Geološki anali Balkanskog poluostrva, knj. XXVIII, Beograd.
- [24] *Podaci sa hidrometeorološke stanice u Nišu*.
- [25] *Dekadni agrometeorološki bilten*. Izdanje Hidrometeorološkog zavoda SRS, Beograd.

HYDROLOGY SPRINGS IN THE OLIGOCEN (?) OF NIŠ BASIN

Zivorad M. Martinović

Summary

In this work it is given the review of 31 springs from the supposing oligocenic marle, limetuff and opal which clasp relatively small area around village Hum, Rujnik and Oreovac located north of town Niš. In these rocks the underground waters are predominantly shallow, at marle contagious, in opal cracked and in limetuff semi-carstic. The greatest number of them (25) get empty gravitationally, one (№13) gravitationally-descedentially, one over pour-gravitationally and four (№ 6, 7, 10 and 19) siphonic. In all of the underground waters there is a lack of water which can be seen through the fertility of springs. Thus, according to the wellkown classification of E. O. Meinzer (literature 21, 53), only one belongs to the sixth group (0,1 — 1 lit/sec), 17 to the seventh (0,01 — 0,1 lit/sec) and 10 to the eight (under 0,01 lit/sec). The capacity of one spring has not been established yet because of the captage, and two have been run dry. Their temperatures are different too. Two springs are the coldest with 11 and 11,5°C, then 8 have 12—13°C, 9 are with 14—14,5°C and four indicate 16°C; only one is 18°C. The measures of the rest 7 have not been done yet. From this review follows that almost all springs have freatic type. However, those ones under numbers 6, 27, 28 and 29 happens to be cooled thermes, and 1, 10, 12, 13 and 27 also slighly mineralized, especialy 6 and 16 because of their water which is sourish, saltish and moderately hard. The mentioned quolities issued from guly and August of 1967. and 1968. when the middle-monthly atmospheric falls were few (42—44 and 37—40 mm) and the temperatures of air high (22,7 and 22,2°C). The studied springs are mainly clear, without smell and taste and that is the reason why the passangers use their water for drinking, rare shepherds also for watering of cattle, while only one (№ 29) is captaged and transmissed in the local aqueduct of village Hum.



OSVRT NA NEKE KARAKTERISTIČNE OSOBINE URBANIZOVANOSTI PROSTORA JUGOZAPADNE SRBIJE

— Demografski aspekti —

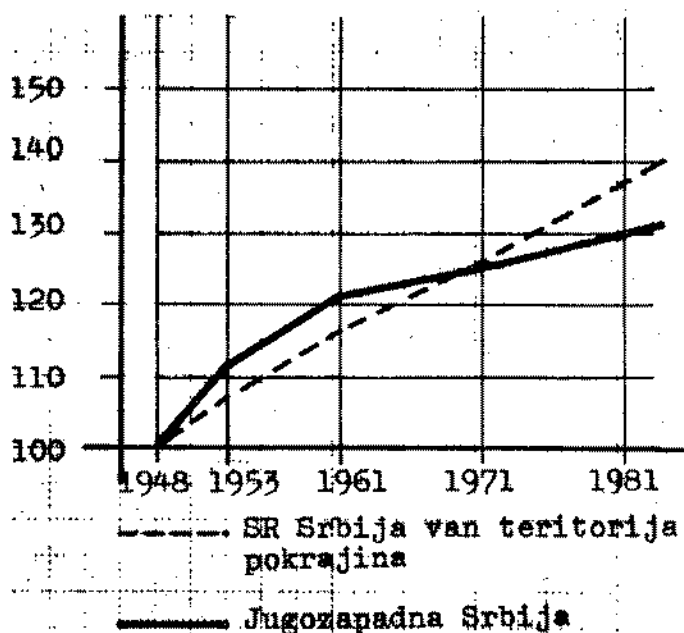
Dr Safet Nurković

UVOD

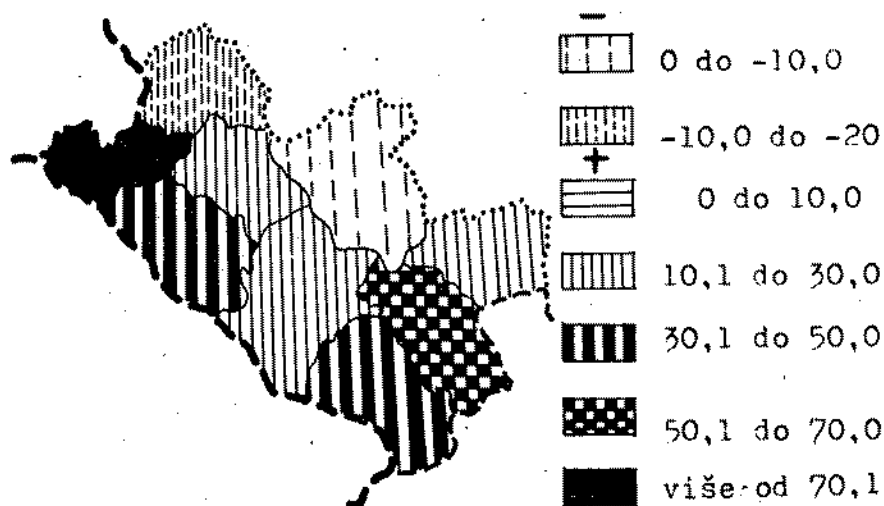
Imajući u obziru poslijeratno razdoblje populacijskog razvitka Jugoslavije, SR Srbija van teritorija pokrajina je imala, u odnosu na ostala područja (republike i pokrajine), uz SR Hrvatsku, SAP Vojvodinu i SR Sloveniju, relativno nižu stopu porasta stanovništva (stope porasta stanovništva u periodu 1948—1981 kretale su se u SR Hrvatskoj 20,9%, SAP Vojvodini 21,7%, SR Sloveniji 30,5%, Uzem teritoriju Srbije 36,6%, SFR Jugoslaviji 40,4%, SR Crnoj Gori 54,5%, SR Bosni i Hercegovini 59,5%, SR Makedoniji 64,7% i SAP Kosovu 116,0%). Međutim, i u okviru nje evidentne su razlike između pojedinih regija, između ruralnih i urbanih cjelina kao i unutar pojedinih regija. U tom pogledu područje Jugozapadne Srbije, sa nešto usporenijom populacijskom dinamikom (povećanje stanovništva za cijelo poslijeratno razdoblje iznosilo je 03,1%), predstavlja tipičan primjer i vrlo je karakteristično za proučavanje raznih demografskih fenomena. Mi smo se, u ovom radu, opredelili za analizu osobina urbanizovanosti ove specifične regionalno-geografske cjeline (pod pojmom »Jugozapadna Srbija« ovde obuhvatamo onaj dio SR Srbije van teritorija pokrajina koji pripada Središnjem planinskom prostoru Jugoslavije izdvojen pod nazivom DINARSKI STAROVLAŠKO — RAŠKI PROSTOR) (16, 409—416 i 7,437—438).

OSNOVNA OBILJEŽJA POPULACIJSKE DINAMIKE

Prije nego što prijedemo na analizu urbanizovanosti prostora Jugozapadne Srbije, potrebno je, ukratko, da se osvrnemo na neka obilježja populacijske dinamike jer od toga bitno zavisi dinamika



Slika 1. — kretanje stanovništva Jugozapadne Srbije u poređenju sa SR Srbijom van teritorija pokrajina u periodu 1948—1981
 (1948=100,0)



Slika 2. — Porast — Pad stanovništva jugozapadne Srbije po opštinama u periodu 1948—1981

gradskog stanovništva. Tu posebno pominjemo:

- usporenu populacijsku dinamiku tokom cijelog poslijeratnog razdoblja (stopa od 30,1‰ na to ukazuje),

- veoma malo povećanje stanovništva u posljednjem međupopisnom periodu (1971—1981) od 4,1‰,

- relativno visok prirodni priraštaj u posljednjem međupopisnom periodu (1971—1981) od 13,6‰,

- negativni migracijski saldo u posljednjem desetogodištu (1971—1981) od -9,5‰,

- osjetno smanjenje stanovništva ruralnih naselja u zadnjem međupopisnom intervalu od -10,7‰ i

- izrazito povećanje stanovništva gradova u posljednjem međupopisnom periodu (1971—1981) od 49,3‰.

Iza ovih opštih podataka kriju se elementi regionalnih i mikro-regionalnih specifičnosti populacijske dinamike Jugozapadne Srbije i njenih pojedinih dijelova (14). Veoma je važno pri ocjeni dinamike procesa urbanizacije uzeti u obzir dinamiku kretanja ukupnog stanovništva te ćemo se ovdje osvrnuti na neke njene karakteristike, kako za regiju u cjelini, tako i za njene pojedine dijelove (opštine). Naime, Jugozapadna Srbija sa povećanjem ukupnog stanovništva za cijeli poslijeratni period (1948—1981) od oko 30,1‰ ne obezbeđuje povoljan populacijski rast gradova. Posmatrano po opštinama razlike su vrlo izrazite. U proteklom poslijeratnom razdoblju u dvije opštine broj stanovnika je smanjen (Ivanjica i Čajetina), tri opštine imale su veoma mali porast stanovništva (Raška, Nova Varoš i Sjenica) koji je znatno ispod republičkog prosjeka, jedna je imala povećanje na nivou republičkog prosjeka (Tutin), a tri su imale višu ili znatno višu stopu povećanja od republičkog prosjeka (Priboj, Prijepolje i Novi Pazar). Ovako nepovoljna dinamika kretanja stanovništva opština Jugozapadne Srbije u poslijeratnom periodu ukazuje na dosta slabe mogućnosti populacijskog rasta starih i diferencijaciju novih gradskih naselja na ovom prostoru.

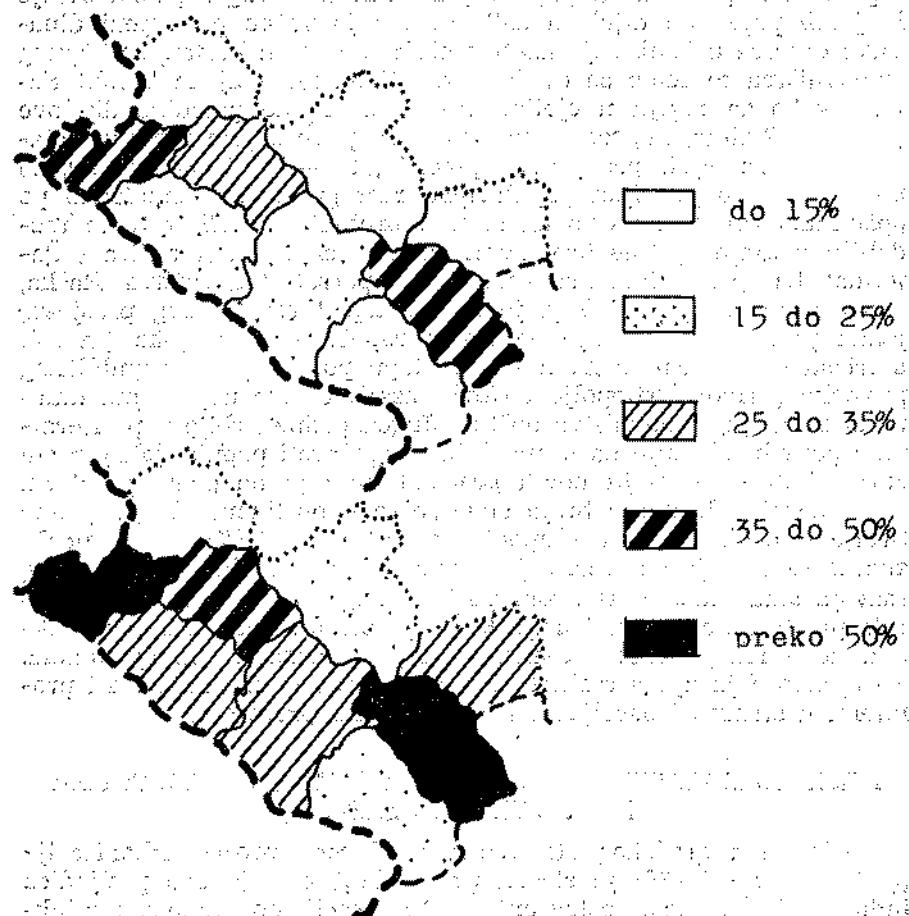
Međutim, kretanje broja stanovnika u opštinama Jugozapadne Srbije u posljednjem međupopisnom intervalu (1971—1981) pruža znatno temeljniju sliku za ocjenu stanja i tendencija diferenciranog razvoja stanovništva. U ovom periodu najjasnije se je izdiferencirala prostorna slika tendencije kretanja broja stanovnika kao funkcija nejednakog društveno-ekonomskog razvitka u tim opštinama. To ujedno objašnjava različitu dinamiku procesa urbanizacije i promjenu u strukturi naseljenosti izazvane tim procesom.

NEKE KARAKTERISTIKE URBANIZOVANOSTI PROSTORA JUGOZAPADNE SRBIJE

Dinamika gradskog stanovništva odnosno proces urbanizacije (3, 37—69 i 4,7—35) je složen proces koji nastaje kao posljedica industrijalizacije kao opšteg univerzalnog socijalno-ekonomskog faktora, a ogleda se u koncentraciji industrije i stanovništva u gradovima.

vima, razvitku saobraćaja, naglom uvećanju i razgranavanju tercijarnih djelatnosti, intenziviranju ekonomskih veza, kulturnom napretku i sl.

Prema popisu od 31. marta 1981. godine područje Jugozapadne Srbije je imalo oko 118.585 stanovnika nastanjenih u devet gradova (Priboj, Prijepolje, Nova Varoš, Čajetina, Ivanjica, Sjenica, Tutin, Novi Pazar i Raška) i četiri naselja gradskog tipa, mada još nedovoljno izdiferencirana (Baljevac i Jošanička Banja i Banja u opštini Raška, Partizanske Vode u opštini Čajetina i Kolovrat koji je po popisnim kriterijumima iz 1971. godine imao status grada ali je 1981. godine, zbog blizine, stopljen sa Prijepoljem te se više ne iskazuje kao posebno naselje) (1, s. 10). Dakle, svaki treći stanovnik Jugozapadne Srbije (35,8% ukupnog stanovništva) živeo je u naseljima koja su po popisanim kriterijumima imala status grada (4, 7—35; 8; 9,204—205 i 10,225—226).



Slika 3. — Učešće gradskog stanovništva u ukupnom stanovništvu za opštine Jugozapadne Srbije u 1971 i 1981. godini

U upoređenju sa SR Srbijom van teritorija pokrajina (47,8%) stepen urbanizovanosti prostora Jugozapadne Srbije (35,8%) je znatno niži, te time predstavlja jedan od najmanje urbanizovanih prostora u okviru nje. Međutim, treba napomenuti da je tempo urbanizacije prostora Jugozapadne Srbije, obzirom na ubrzanje razvika privrede, koji je evidentan značajno intenziviran. To se osobito odnosi na dva posljednja međupopisna perioda (1961—1971 i 1971—1981). Tako je u međupopisnom intervalu 1961—1971 učešće stanovništva naselja gradskog tipa u ukupnom stanovništvu povećano sa 14,6% u 1961 na 25,0% u 1971. godini, dok je na kraju posljednjeg međupopisnog intervala (1971—1981) to učešće iznosilo 35,8%. Upoređenje dinamike ukupnog i gradskog stanovništva u istom periodu je vrlo interesantno i treba ga pomenuti. Naime, ukupno stanovništvo Jugozapadne Srbije u zadnjem međupopisnom periodu poraslo je za 4,4%, a gradsko za 49,3%, dok je stanovništvo ruralnih naselja izrazito smanjeno i to za 10,7%.

Promjene u strukturi naseljenosti posljedica su procesa opšteg ekonomskog i društvenog napretka. Mada su faktori promjena brojni (ekonomski, društveni, psiholoski i ostali) i njihovi uticaji različiti, ipak se može istaći primarno značenje ekonomskih činilaca. Ekonomski razvitak u Jugozapadnoj Srbiji, mada regionalno vrlo diferenciran, uslovio je stvaranje novih i transformaciju starih naselja. Broj gradskih naselja ovog regiona porastao je sa četiri u 1961. (Priboj, Prijepolje, Nova Varoš i Novi Pazar) na trinaest u 1981. godini (Priboj, Prijepolje, Nova Varoš, Novi Pazar, Sjenica, Raška, Tutin, Ivanjica, Čajetina, Kolovrat koji je stopljen u Prijepolje, Partizanske Vode u opštini Čajetina, kao i Baljevac i Jošanička Banja u opština Raška) te podspješio razvoj raznih djelatnosti sekundarnog i tercijalnog sektora privrede koji su obično vezani za gradska naselja.

Važno je, takođe ukazati i na prostorne karakteristike dostignutog nivoa urbanizovanosti, odnosno prikazati i objasniti diferencijaciju stanja i razvoja gradskog stanovništva pojedinih dijelova (opština) Jugozapadne Srbije. To nam ujedno može poslužiti za ocjenu budućeg razvoja »aglomeracijske« strukture i naseljenosti ovog dolinsko-visokopovršsko-planinskog regionalnog kompleksa.

Jedna od osnovnih karakteristika strukture naseljenosti prostora Jugozapadne Srbije jeste izrazita neravnomjernost razmještaja gradskog stanovništva (vidi podatke u tabl. 1). Podaci pokazuju da se je gradsko stanovništvo Jugozapadne Srbije koncentrisalo u njegovom limskom (27,7% i raškom dolinskom kompleksu (42,0%). Ove dvije izrazito urbanizovane zone Jugozapadne Srbije apsorbiraju oko 2/3 gradskog stanovništva (69,7%). Istovremeno se na jugoistoku formira mezoregionalni centar (Novi Pazar) oko kojeg je već stvoren prsten sekundarne koncentracije gradskog stanovništva (Sjenica—Novi Pazar—Tutin—Raška), dok je cio sjeverni dio (Priboj,

Tabl. 1
Dinamika ukupnog i gradskog stanovništva Jugozapadne
Srbije u periodu 1971—1981 po opštinama

OPŠTINE	STANOVNIŠTVO						Učešće gradskog u ukupnom stanovništvu			Učešće ukup- nom st. Jugoza- padne Srbije			Učešće u ukupnom gradskom stanov- ništvu Jugozapadne Srbije		
	Ukupono stanovništvo			Gradsko stanovništvo											
	1971	1981	indeks 1971-81	1971	1981	Indeks 1971-81	1971	1981	promj.	1971	1981	promj.	1971	1981	promj.
Priboj	32.548	35.200	108,1	13.034	18.925	140,4	40,0	52,0	+12,0	10,3	10,6	+0,3	16,4	15,4	-1,0
Prijepolje	44.022	46.920	106,5	7.933	14.543	183,3	18,0	31,0	+13,0	13,9	14,2	+0,3	10,0	12,4	+2,3
Čajetina	19.224	17.098	88,9	2.033	1.237	60,8	10,6	7,2	-3,4	6,0	5,2	-0,8	2,6	1,0	-1,6
Nova Varoš	22.740	22.523	99,0	5.718	8.565	149,8	25,1	38,0	+12,9	7,2	6,8	-0,4	7,2	7,2	0,0
Ivanjica	39.233	37.887	95,6	5.507	8.765	159,2	14,0	13,1	+9,1	12,4	12,4	-1,0	6,3	7,4	+1,1
Sjenica	36.622	35.570	97,1	8.812	11.146	126,4	23,1	31,3	+7,2	11,5	10,7	-0,8	11,1	9,4	-1,7
Novi Pazar	64.326	74.000	115,0	28.950	41.099	142,0	45,0	65,5	+10,5	20,3	22,3	+2,0	36,4	34,7	-1,7
Tutin	29.444	32.779	111,3	3.525	6.233	176,8	12,0	19,0	+7,0	9,3	9,9	+0,6	4,4	5,3	+0,9
Raška	29.367	29.475	100,4	3.935	8.712	221,4	13,4	29,6	+16,2	9,2	8,9	-0,3	4,9	7,3	+2,4
Jugozapadna Srbija	317.526	331.434	100,4	79.447	118.585	149,3	25,0	35,8	+10,8	—	—	—	—	—	—

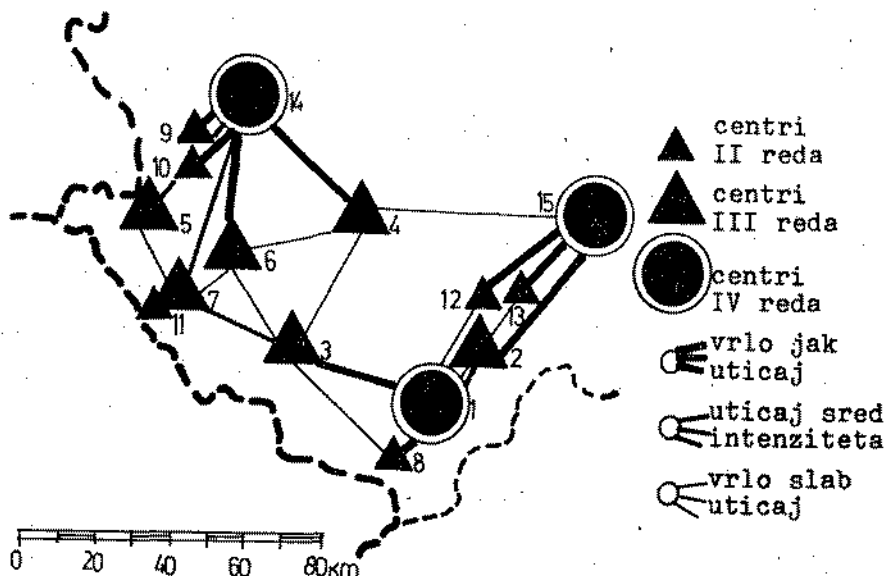
IZVOR: Popis stanovništva i stanova 1971, knj. IX, Sa
 vezni zavod za statistiku, Beograd, 1973.

Popis stanovništva, domaćinstava i stanova 1981,
 Konačni rezultati, Osnovna obilježja po opštinama i regi-
 onima, Bilten 206, Republički zavod za statistiku, Beograd,
 1982.

Prijepolje, Nova Varoš, Ivanjica, Čajetina i Partizanske Vode) gravitacijski orijentisan prema Titovim Užicama (6,365-376 i 17,13-27)

Sva gradska naselja Jugozapadne Srbije, izuzev Novog Pazara koji u najnovije vrijeme poprima karakter centralnog naselja IV stupnja, pripadaju grupi centralnih naselja III stupnja, sa izuzetkom Tutina i Čajetine sa jednostranom urbanom strukturom (i ako su opštinski centri), kao i Partizanskih Voda, Baljevca i Jošaničke Banje imaju obilježja centralnih naselja II reda (nijesu opštinski centri, nedostatak funkcija centra višeg reda i dr.) (5,365-367 i 6,237-249). Kako vidimo, urbana mreža Jugozapadne Srbije je jako rijetka. Nju čine:

- Novi Pazar jedini centar IV reda,
- Priboj, Prijepolje, Nova Varoš Sjenica, Raška i Ivanjica kao centri III reda i
- Tutin, Čajetina, Partizanske Vode, Baljevac i Jošanička Banja kao centri II reda.



Slika 4. — Centralna naselja Jugozapadne Srbije prema karakteru centraliteta i njihov međusobni odnos. 1. Novi Pazar, 2. Raška, 3. Sjenica, 4. Ivanjica, 5. Priboj, 6. Nova Varoš, 7. Prijepolje, 8. Tutin, 9. Čajetina, 10. Partizanske Vode, 11. Kolo vrat, 12. Baljevac, 13. Jošanička Banja, 14. Titovo Užice, 15. Kraljevo.

Geografski razmještaj hijerarhijski formirane mreže urbanih centara Jugozapadne Srbije odraz je složenih faktora društveno ekonomske organizacije prostora. Po prvi put nakon rimskog perioda, može na ovom prostoru utvrditi postojanje određene hijerar-

hijski formirane mreže urbanih centara nastale krajem XV i tokom XVI vijeka koja predstavlja osnovu savremene mreže urbanih centara Jugozapadne Srbije (15).

Ako posmatramo stepen urbanizovanosti pojedinih opština Jugozapadne Srbije uočićemo značajne razlike. Najniži stepen urbanizovanosti (uzimajući udio gradskog stanovništva u ukupnom) u 1981. godini imale su opštine Čajetina (7,2%), Tutin (19,0%) i Ivanjica (23,1%), a najviši Novi Pazar (55,5%) i Priboj (52,0%). Viši nivo urbanizovanosti od prosjeka za Jugozapadnu Srbiju imala je još opština Nova Varoš (38,0%).

Promjene u »aglomeracijskoj« strukturi stanovništva Jugozapadne Srbije u periodu 1961—1981 kao posljedica društvenih i ekonomskih promjena, veoma su značajne, a i prostorno diferencirane. Kontingent gradskog stanovništva u 1981. godini povećan je za 249,2% u odnosu na 1961. godinu, a rezultat je prirodnog priraštaja i mehaničkog priliva stanovništva u gradovima, i transformacije pet mješovitih naselja u gradove (Sjenica, Ivanjica, Čajetina, Tutin i Raška). U tom periodu se Kolovrat, Partizanske Vode, Baljevac i Jošanička Banja transformišu u gradska naselja mada još nedovoljno afirmisana i izdiferencirana. Relativno najintenzivniji porast gradskog stanovništva imale su opštine Priboj (233,2%), Prijepolje (218,5%) i Nova Varoš (167,7%), što je u saglasnosti sa intenzivnijim društveno-ekonomskim razvitkom ovog u odnosu na ostale dijelove prostora Jugozapadne Srbije. Priboj, Prijepolje i Nova Varoš u okviru ovog dijela SR Srbije u naznačenom periodu značajno se afirmišu kao jezgra dinamičnijeg razvitka industrije i ostalih djelatnosti sekundarnog sektora što se je odrazilo u snažnom privlačenju stanovništva iz šire okoline i intenzivnom urbanizovanju ovog prostora, za razliku od najvećeg dijela prostora Jugozapadne Srbije (sa izuzetkom Novog Pazara) koji je i dalje zadržao tipično ruralni karakter (npr., kod Čajetine, Tutina i Sjenice).

ZAKLJUČAK

Prethodno izložene konstatacije potvrđuju nam direktnu međuzavisnost stepena urbanizovanosti i dostignutog nivoa sveukupnog društveno-ekonomskog razvitka. Prostrana diferenciranost ovih osnovnih komponenti ističe u prvi plan seoski (ruralni) karakter središnjeg (Sjenica i Tutin) i sjevernog dijela Jugozapadne Srbije (Čajetina i Ivanjica), te gradski (urbani) karakter sjeverozapadnog (Priboj, Prijepolje i Nova Varoš) i jugoistočnog dijela (Novi Pazar). Ovo je još jedna potvrda okupljanja stanovništva i aktivnosti u urbanim centrima u dolini Lima i Raške, odnosno tendencije formiranja populacijske i privredne koncentracije u prirodno i saobraćajno najpovoljnijim dijelovima Jugozapadne Srbije.

L I T E R A T U R A

- [1] Bilten Republičkog zavoda za statistiku, br. 206, Beograd, 1982.
- [2] C. Kostić, *Selo i grad, Kriterijumi razlikovanja, Sociologija sela*, br. 11—12, Agrarni institut, Zagreb, 1966.
- [3] D. Vogelink, *Urbanizacija kao odraz privrednog razvoja FNRJ*, Beograd, 1961.
- [4] I. Ginić, *Dinamika i struktura gradskog stanovništva Jugoslavije, Institut društvenih nauka, Centar za demografska istraživanja*, Beograd, 1967.
- [5] I. Vrišer, *Uticajne sfere jugoslovenskih gradova i drugih središta*, Zbornik IX kongresa geografa Jugoslavije, Sarajevo, 1974.
- [6] I. Vrišer, *Centralna naselja u Jugoslaviji*, Zbornik VIII kongresa geografa Jugoslavije, Skoplje, 1968.
- [7] J. Đ. Marković, *Geografske oblasti SFRJ*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1972.
- [8] M. Macura, *Jedan nov kriterijum za razgraničenje gradskog i seoskog stanovništva*, II godišnji sastanak Jugoslovenskog statističkog društva, Beograd, 1968.
- [9] M. Friganović, *Demogeografija, Stanovništvo svijeta*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
- [10] M. Vresk, *Osnove URBANE geografije, Školska knjiga*, Zagreb, 1976.
- [11] Prvi rezultati popisa stanovništva 1981. godine u SFRJ po republikama, Savezni zavod za statistiku, Beograd, 1981.
- [12] P. George, *Précis de géographie urbaine*, Presses universitaires de France, Paris, 1961.
- [13] S. Nurković, *Regionalne osobenosti populacijske dinamike Jugozapadne Srbije u poslijeratnom periodu i tipovi kretanja stanovništva 1971—1981. godine*, Referat saopšten na simpozijumu: »Aktuelni problemi demografskog razvika u SR Srbiji« u Arandelovcu oktobra 1982.
- [14] S. Nurković, *Appandice de la connaissance de la formation du réseau urbain de turco-orientale de Sandjak de Novi Pazar au XV-ème et XVI-ème siècle et l'importance des ses elements dans la structure urbaine contemporaine*, Fourth international congress of turcollogy, 20—15. IX 1982, Istanbul.
- [15] V. Rogić, *Regionalizacija Središnjeg planinskog prostora Jugoslavije*, Zbornik IX kongresa geografa Jugoslavije, Sarajevo, 1974.
- [16] V. Rogić, *Regionalizacija Jugoslavije*, Geografski glasnik, br. 35, Zagreb, 1973.

VËSHTRIM MBI DISA VEÇORI KARAKTERISTIKE TË URBANIZMIT TË HAPËSIRËS SË SERBISË JUGPRERENDIMORE

— Aspekte demografike —

Dr Safet Nurković

Rezyme

Punimi paraqet vështrimin sintetik të problematikës së urbanizimit të hapësirës së Serbisë jugperëndimore. Analiza e kësaj problematike tregon varshmërinë e drejtpërdrejtë të shkallës së urbanizimit dhe të nivelit të zhvillimit të gjithëmbarshtëm të arritur shoqëro-ekonomik. Diferencimi hapësiror i këtyre komponenteve themelore e vë në plan të parë karakterin fshatar (rural) të pjesës qendrore (Sjenica dhe Tutini) dhe të pjesës veriore

(Ivanjica dhe Çajetina) të Serbisë jugperëndimore, dhe karakterin urban të pjesës veriperëndimore (Priboj, Prijepe dhe Nova Varosh) dhe të pjesës juglindore (Novi Pazar). Kë është edhe një konstantim i koncentrimit të popullsisë dhe të aktiviteteve në qendrat urbane në luginën e Limi dhe të Rashkës, përkatësisht tendenca e formimit të koncentrimit popullativ dhe ekonomik në pjesët më të volitshme në pikëpamje natyrore dhe komunikative të Serbisë jugperëndimore.

THE URBANIZATION SHARACTERISTICS OF THE SPACE IN TE SOUTH-EASTERN SERBIJA

— demographic aspects —

Dr. Safet Nurković

Summary

This work is a synthesised presentation of the problematics relating to the urbanization of the space in the South-Eastern Serbia. The analization of this aspects indicat direct enterdependence of the scale of urbanization with the level of social development. The space differentiation components are shown in the firts plase by the rural character of central part (Sjenica and Tutin), and the Northen part of South-Eastern Serbia (Ivanjica and Caejtina), while the urban character in North-Western part (Priboj, Prijepe and Nova Varosh) and in the South-Eastern part (Novi Pazar). This is still one confirmation for the aglomeration of population and the activities in the urban centers in the vally of Lim and Raška, respectively the tendence of the creation of population and economic concentration in the parts with sutable natural and communication conditions.

KORELACIONI NË MES TË LARTËSISË MBIDETARE DHE PJESËMARRJËS SË SIPËRFAQEVE TË PUNUESHME, ARAVE DHE SIPËRFAQEVENËN MISER DHE GRUR

Asllan Pushka

Për ekzistimin e lidhshmerisë në mes të relievit dhe përhapjes së sipërfaqeve të punueshme dhe atyre nën ara dihet, mirëpo se sa është ajo lidhje e ngusht varet prej rrethanave konkrete.

Metodologjie e punës. — Për të treguar në lidhshmeri të till është dashur t'i kemi shenimet për sipërfaqet në mes të izohipsave e pastaj t'i llogarisim vlerat e lartësisë mesatare (X_1) të çdo komune. Pasi i kemi llogaritur këto vlera, atëhere i kemi vënë në marrdhanje me katër variabla tjera të varëshme: (X_2) me pjesëmarrjen e sipërfaqeve të punueshme, (X_3) me pjesëmarrjen e sipërfaqeve nën ara, (X_4) pjesëmarrjen e sipërfaqeve nën grur dhe (X_5) me pjesëmarrjen e sipërfaqeve nën miser. Më tutje kemi llogaritur koeficientin e korelacionit dhe të regresionit, për të treguar në shkallën e lidhjes dhe të ndikimit të lartësisë mbidetare (X_1) në pjesëmarrjen e sipërfaqeve të punueshme, nën ara, nën grur dhe nën miser, në nivel të komunave.

Analiza e rezultateve. Vlerat e koeficientit të korelacionit të variablës së pavarshme me variablat e varëshme janë pothuajse të gjitha të larta, dhe kanë kahje negative, sepse ne rritjen e lartësisë mesatare të komunave po zvoglohet pjesëmarrja e sipërfaqeve të punueshme, e atyre nën ara, grur dhe miser. Koeficienti i korelacionit në mes të lartësisë mesatare dhe pjesëmarrjes së sipërfaqeve të punueshme e ka vlerën -0.826 (lidhje e ngusht negative), ndërsa koeficienti i regresionit e ka vlerën $Y_c = 112,2 + (-0,0524)X_1$ çka do të thotë se me rritjen e lartësisë mesatare për 100 metra, pjesëmarrja e sipërfaqeve të punueshme ndaj sipërfaqeve bujqësore zvoglohet për 5,24%.

Vlerat ekstreme të lartësisë mesatare në KSAK lëvizin në mes të 494,7 metra në komunën e Klinës dhe 1958,8 metra në komunën e Dragashit (vlera mesatare 818,7 metra), kurse vlerat ekstreme të pjesëmarrjes së sipërfaqeve të punueshme sjellen në mes të 20,5%

në komunën e Dragashit dhe 90% në komunën e Klinës (mesatarja e Kosovës 69,9%). Në 14 komuna pjesëmarrja e sipërfaqeve të punëshme është mbi mesatarën e Krahinës, kurse në 8 komuna nën këtë vlerë. Komunitat e rrafshit të Kosovës dhe komunitat qendrore e kanë pjesëmarrjen më të lartë të sipërfaqeve të punëshme se sa mesatarja e Kosovës, ndërsa komunitat periferike nën mesataren, sepse pjesa e konsideruar e territorit të tyre gjendet në viset malore të Sharrit, Maleve të Nemura, Mognës dhe Koponikut.

Vlera e koeficientit të korelacionit në mes të lartësisë mesatare (X_1) dhe pjesëmarrjes së sipërfaqeve nën ara (X_2) është $-0,63$ (lidhje e konsideruar negative), ndërsa vlera e koeficientit të regresionit $Y_c = 102,3 + (-0,0383)X_1$ çka tregon se me rritjen e lartësisë mesatare për 100 metra, pjesëmarrja e sipërfaqeve nën ara zvogëlohet për 3,83%. Vlerat ekstreme të pjesëmarrjes së sipërfaqeve nën ara sjellen prej 40,7 në Dragash (ndaj sipërfaqeve të punëshme) deri në 91% në komunën e Lipjanit. Në 11 komuna pjesëmarrja e sipërfaqeve nën ara është mbi 71,4% (sa është mesatarja e Krahinës), ndërsa në 11 komuna kjo pjesëmarrje është më e vogël se mesatarja e Krahinës. Sikurse tregojn shenimet për pjesëmarrjen e arave ndaj sipërfaqeve të punëshme është mjaft e lartë dhe paraqet potencial të konsideruar ekonomik në prodhimtarinë bujqësore. Pjesëmarrja relativisht e lartë e sipërfaqeve nën ara është njëkohësisht tregues (indikator) i strukturës së prodhimtarisë bujqësore, ku mbizotëron lavertaria dhe tregues i strukturës relievore të Krahinës.

Në Krahinë sipërfaqet nën grur marrin relativisht më pak pjesë në sipërfaqet nën ara dhe drithra se sa ato nën miser. Mesatarja e pjesëmarrjes së sipërfaqeve nën grur në vitin 1980 ka qenë 35,8% ndërsa për miser 43,9%. Deri në vitet e 60-ta të këtij shekulli në strukturën e sipërfaqeve nën drithra misri ka pas pjesëmarrje më të lartë dhe se popullsia është ushqyer shumë më tepër me bukë misri se sa sot. Me futjen në përdorim të llojeve të reja të grurit (italiane, sovjetë dhe tonat) që japin rendimente më të larta se sa llojet e vjetra vendase, pastaj me ndryshimet strukturale të popullsisë, me ngritjen e standardit të popullsisë dhe ndryshimet në strukturën dhe mënyrën e të ushqyerit, pjesëmarrja e sipërfaqeve të mbiellura me grur është rritur dukshëm. Kështu, tani në 13 komuna pjesëmarrja e sipërfaqeve nën grur qendron mbi mesatarën e Kosovës (35,8%), ndërsa në 9 komuna nën këtë vlerë.

Pjesëmarrja e sipërfaqeve nën grur qendron në korelacion të lartë negativ ($-0,70$) me lartësinë mesatare. Vlera e koeficientit të regresionit prej $Y_c = 62,3 + (-0,0328)X_1$ tregon se me rritjen e lartësisë mesatare për 100 metra, pjesëmarrja e sipërfaqeve nën grur zvogëlohet për 3,28%. Vlerat ekstreme të pjesëmarrjes së sipërfaqeve nën grur sjellen prej 8,6% në komunën e Dragashit deri në 49,1% në Suharekë.

Intervali në mes vlerave ekstreme të pjesëmarrjes së sipërfaqeve nën miser është më i gjërë se sa të gruri, sepse pjesëmarrja

më e ulët është 5,1% në komunën e Dragashit dhe 78,3% në atë të Deçanit. Në rastin e parë kur i kemi përfshirë të gjitha komunat kemi fituar vlerë të ulët të koeficientit të korelacionit $-0,330$, sepse në të kanë ndikuar vlerat e larta të komunës së Deçanit dhe Pejës (61,4%). Pasi i kemi eliminuar vlerat për këto dy komuna, kemi fituar vlerë të lartë të koeficientit të korelacionit prej $-0,817$.

Me eliminimin e dy rasteve të cekura, ndryshon edhe vlera e koeficientit të regresionit prej $Y_c = 60,3 + (-0,0203)X_1$ në $Y_c = 74,94 + (-0,0434)X_1$, çka do të thotë se me rritjen e lartësisë mesatare për 100 metra zvoglohet pjesëmarrja e sipërfaqeve nën miser për 2,03% respektivisht për 4,34%. Dy komunat, Deçani dhe Peja kanë pjesëmarrje të lartë të sipërfaqeve nën miser, sepse kanë më pak sipërfaqe të punëshme dhe aso nën ara, respektivisht nën drithra, si dhe për shkak të mundsive më të mëdha të ujitjes së sipërfaqeve nën këtë kulturë. Kultivimi i misrit në komunat e Dukagjinit ka një traditë me të gjatë, andaj edhe mbiellet në sipërfaqe më të mëdha.

Duke i përcjellur shenimet për pjesëmarrjen e sipërfaqeve nën drithra dhe shkallën e punësimit të popullsisë në përgjithësi mund të shohim një lidhje negative në mes tyre. Me rritjen e normës së punësimit të popullsisë dhe zhvillimit më të madh ekonomik, zvoglohen sipërfaqet nën drithra, më që rriten sipërfaqet nën kulturat industriale, kulturat foragjere, përime dhe pemë. Ekonomia më e zhvilluar në përgjithësi dhe bujqësia në veçanti, ndikojnë në zgjerimin e strukturës së degëve të bujqësisë dhe si rezultat i këtij ndikimi kemi përhapjen e sipërfaqeve me kulturat tjera përpos atyre nën drithra.

Prej vlerave të koeficientit të korelacionit të variablave të cekura mund të përfundojmë se ekziston lidhje e ngushtë në mes të lartësisë mesatare dhe pjesëmarrjes së sipërfaqeve të punëshme, sipërfaqeve nën ara, nën grur dhe miser.

KORELACIJA IZMEDIU NADMORSKE VISINE I UDELA OBRADIVIH POVRŠINA, NJIVA, I POVRŠINA POD PŠENICOM I KUKURUZOM

Dr Asllan Pushka

Rezime

Da postoji zavisnost između reljefa i rasprostranjenosti obradivih površina kao i površina pod njivama zna se odavno, međutim, mi smo hteli da pokažemo kolika je ta zavisnost u konkretnom slučaju SAP Kosova.

Pomoću metoda korelacije i regresije na osnovu podataka o prosečnoj nadmorskoj visini teritoriji opština i udelu obradivih površina na poljoprivredne površine, njiva na obradive i udela površina pod pšenicom i kukuruzom u odnosu na površine pod njivama, došli smo do sledećih rezultata.

Između prosečne nadmorske visine i udela obradivih površina postoji visoka negativna korelacija ($r = -0,826$), a koeficijentom regresije možemo tvrditi da sa povećanjem prosečne nadmorske visine za 100 m udeo obradivih

površina se smanjuje za 5,24%. Također, između nadmorske visine i udela površina pod njivama postoji znatna negativna korelacija ($r=-0.63$). Koeficijent regresije pokazuje da sa povećanjem visine za 100 metara, udeo njiva se smanjuje za 3,83%.

Udeo površina pod pšenicom stoji u visokoj negativnoj korelaciji ($r=-0.70$) sa prosečnom nadmorskom visinom. Za svakih 100 m prosečne nadmorske visine udeo površina pod pšenicom se smanjuje za 3,28%. U slučaju razmeštaja površina pod kukuruzom u odnosu na prosečnu nadmorsku visinu dobili smo nizak koeficijent korelacije od -0.33 . Posle eliminacije podataka za opštinu Dečane i Peć, dobili smo visoku negativnu korelaciju ($r=-0.817$). U ovim opštinama uzgoj kulture kukuruza ima dugu tradiciju, a i mogućnosti navodnjavanja uticali su na povećanje udela površine pod ovom kulturom. Visoki udeo površina pod kukuruzom nije u skladu sa prosečnom visinom kao u ostalim opštinama. Pa povećanjem visine za 100 m udeo površina pod kukuruzom se smanjuje za 2,0% odnosno za 4,4%.

SHKALLA E PËRPUTHSHMËRISË SË REGJIMIT TË RESHJEVE NË KSA TË KOSOVËS

Asllan Pushka

Sinopsis. Metoda e korelacionit të rangut është treguar e përshatshme për të caktuar shkallën e përputhshmerisë së regjimit të reshjeve. Në bazë të rezultateve të arrijtura kemi konstatuar se ekziston përputhje e vogël në mes të regjimit të reshjeve në Dukagjin dhe në regjionin e Kosovës ($r=0.42$). Përputhshmeri të lartë në regjimin e reshjeve tregojnë stacionet në rrafshin e Kosovës. Stacionet në rrafshin e Dukagjinit tregojnë përputhshmeri diçka më të vogël. Stacionet e Gjakovës, Pejes dhe Istogut nuk tregojnë kurfar përputhshmerie me stacionet në rrafshin e Kosovës, ndërsa stacioni i Suharekës tregon përputhje të vogël me ato të Prizrenit e të lartë me regjimin e reshjeve në stacionet e rrafshit të Kosovës. Klina tregon ngjajshmeri në regjimin e reshjeve si me stacionet e Dukagjinit njashu edhe të Kosovës. Sij duket në ngjashmeri të regjimit të reshjeve ndikon më tepër burimi i reshjeve se sa edhe vet afersia territoriale.

Sasia dhe regjimi i reshjeve në Dukagjin (802 mm) e në Kosovë (635 mm) tregon për një ndryshueshmeri në mes të këtyre dy pjesëve. Regjioni i Kosovës gjindet në kalimin prej klimës semi-aride në semihumide, ndërsa regjioni i Dukagjinit i takon viseve me klimë të mesme semihumide.¹⁾

Hyrje. Duke i analizuar shenimet për sasinë e reshjeve mesatare vjetore dhe mujore në gjashtë stacionet e rrafshit të Dukagjinit dhe gjashtë në ato të Kosovës të botuara në studimin «Korovska flora i vegetacija Kosova»,²⁾ e verejta se ekzistojnë dallime të konsiderueshme në regjimin e reshjeve. Një ndryshim i tillë më shtyri që t'i hyj punës rreth përcaktimit të shkallës së përputhshmerisë së regjimit të reshjeve në 12 stacione.

¹⁾ Momčilo Kojić, Dragoslav Pejčinović: Korovska flora i vegetacija Kosova, Priština, 1982, faqe 13.

²⁾ Ibid, faqe 14.

Metodologjia e punës. Për të treguar shkallën e përputhshmërisë në regjimin e reshjeve në mes të këtyre 12 stacioneve meteorologjike na muar mendja se me metoden e korelacionit të rangut do të arrijmë deri te rezultatit i duhur. Prej tabelës së reshjeve mujore, për 12 stacione e punuam tabelën e vlerave të rangimit të myajve sipas sasisë së reshjeve, pastaj i llogaritëm koeficientet e korelacionit të rangut për çdo çift të stacioneve duke e punuar në këtë mënyrë amzën e korelacioneve për 12 stacione (12×12). Më në fund e llogaritëm edhe koeficientin e korelacionit të rangut për shenimet mesatare të Dukagjinit dhe Kosovës.

Analiza e rezultateve. Duke i ranguar stacionet sipas sasisë së reshjeve nëpër muaj mund t'i nxjerrim këto përgjithsime: maksimumi i reshjeve në stacionet e rrafshit të Dukangjinit (përpos Suharekës) është në muajt e fundit, në nentor (Peja, Istogu, Klinë) dhe dhjetor (Prizreni e Gjakova).

Maksimumi i reshjeve në rrafshin e Kosovës është në muajin e majit (Ferizaj, Prishtinë, Kamenicë) dhe të qershorit (Gjilan e Podujevë). Maksimumi në Mitrovicën e Titos është në muajin e nentorit sikurse në Pejë, Istog e Klinë, ndërsa në Suharekë në muajin e qershorit sikurse në Gjilan dhe Podujevë.

Minimumi i reshjeve në stacionet e Dukangjinit është në muajt e verës gusht (Prizren, Gjakovë, Pejë) dhe në muajin shkurt (Istog e Klinë), ndërsa në Suharekë në muajin mars. Minimumi i reshjeve në stacionet e Kosovës është në muajin e marsit në katër stacione (Ferizaj, Prishtinë, Mitrovicë dhe Podujevë) dhe në muajin shkurt në dy stacione (Gjilan dhe Kamenicë).

Derisa muajt e dimrit në Dukagjin pos Suharekës, janë me plot reshje, sidomos muajt e nentorit, dhjetorit dhe janarit, ndërkah në rrafshin e Kosovës ata janë me pak reshje. Në muajin mars dhe korrik nuk ka përputhje në sasinë e reshjeve (sipas rangimit) në mes stacioneve të Dukagjinit. Muaji shkurt është muaji me sasi më të vogla të reshjeve në 8 stacione, katër në Dukagjin dhe katër në Kosovë. Në muajin gusht në pesë stacione të Dukagjinit dhe në katër të Kosovës ka poashtu pak reshje. Muajet ku më së shumti ka përputhje në mes të stacioneve meteorologjike në dy rrafshet janë: gushti (11 stacione), dhjetori (8), shkurti (8) dhe prili (8), pastaj pasojnë muaji i majit (7), qershori, tetori dhe nentori (nga 7).

Në stacionet e rrafshit të Kosovës ka më shumë përputhje në regjimin e reshjeve se sa në mes të atyre të rrafshit të Dukangjinit. Është interesant të cekim se përputhja në mes të stacioneve në shumicën e rasteve është në mes dy e tri stacioneve dhe vetëm në dy muaj (mars dhe nentor) në rrafshin e Kosovës përnga rangimi përputhen nga katër stacione (Ferizaj, Prishtinë, Podujeva dhe Mitrovica e Titos, respektivisht Kamenica).

Për të pa forcën e përputhjeve dhe kahjen e lidhjeve në regjimet e reshjeve në mes 12 stacioneve do të japim amzën e koeficientëve të korelacionit të rangut.

	Pz	Gja	Pe	Is	Kl	Su	Fe	Pr	MT	Po	Gji	Ka
Pz	1.0	0.67	0.60	0.47	0.87	0.47	0.40	0.60	0.62		0.41	0.65
Gja	0.67	1.0	0.89	0.79	0.87							
Pe	0.60	0.89	1.0	0.79	0.67							
Is	0.79	0.79	0.78	0.78	0.92			0.44	0.57		0.45	0.46
Kl	0.87	0.67	0.67	1.0	1.0		0.50	0.61	0.71	0.44	0.57	0.55
Su						1.0	0.71	0.65	0.77	0.55	0.68	0.95
Fe					0.50	0.71	1.0	0.86	0.89	0.80	0.83	0.76
Pr	0.60				0.61	0.65	8.86	1.0	0.90	0.86	0.68	0.74
MT	0.62			0.57	0.71	0.77	0.89	0.90	1.0	0.83	0.80	0.85
Po						0.55	0.80	0.86	0.83	1.0	0.73	7.65
Gj					0.57	0.68	0.83	0.68	0.80	0.73	1.0	0.80
Kam	0.65				0.55	0.93	0.76	0.74	0.85	0.65	0.80	1.0

Vrejtje: vlerat më të vogla se 0.40 nuk janë marrë parasysh.

Sikurse shifet nga amza e korelacioneve Klina dhe Prizreni kane në shumë raste të përputhshmerisë me stacionet tjera, pastaj vijn Mitrovica e Titos (9 raste), Istogu, Prishtina dhe Kamenica me nga tetë raste përputhshmerie, Ferizaji e Gjilani kanë nga shtatë raste, Syhareka e Podujeva nga gjashte dhe Peja e Gjakova nga vetem katër raste përputhshmerie.

Në disa raste mund të diktohet ligjshmeria se sa ma afer që janë stacionet në mes vedi aq më e lartë është përputhshmeria dhe anasjelltas, me rritjen e distancës zvoglohet shkalla e përputhshmerisë. Prej kësaj rregulle diferencohet sidomos Suhareka e në disa raste edhe Prizreni. Suhareka ka ngjajshmeri të vogël vetem me Prizrenin prej stacioneve në rrafshin e Dukangjinit (0,47) edhe pse në mes vedi janë larg vetem 20 km. Suhareka nuk ka ngjajshmeri regjimi në reshje me stacionet tjera të rrafshit të Dukangjit, por ka përputhshmeri me të gjitha stacionet e Kosovës, e sidomos lidhje të ngusht ka me Kamenicën, Mitrovicën e Titos dhe Ferizajin. Prizreni përputhje më të madhe ka me Klinën (0,87) dhe Istogun (0,79) se sa me Gjakovën dhe Pejën. Regjimi i reshjeve në Gjakovë ka afersi më të madhe me regjimin e Pejës (0,89) dhe të Istogut (0,79) e diç më të vogël me atë të Prizrenit dhe të Klinës (0,67). Peja ka përputhshmeri më të madhe me Gjakovën (0,89) pastaj me Istogun (0,78), Klinën (0,67) dhe më pak me Prizrenin (0,60), Këto të dhëna na flasin për burimet e ndryshme të reshjeve në stacionet e rrafshit të Dukangjit e sidomos ka ndryshime në mes të stacioneve që shtrihen afer Bjeshkëve të Nemura (Gjakova, Peja, Istogu) dhe atyre afer Sharit (Prizreni e sidomos Suhareka). Prizreni më tepër korespondon me Klinen dhe Istogun se sa me Gjakovën dhe Pejën, më që si duket retë udhëtojnë në drejtimin veri-jug ose anasjelltas përgjat luginës së Drinit të Bardh. Si duket në rrafshin e Kosovës retë udhëtojnë në drejtimin e shtrirjes së maleve në dy anët e rrafshit të Kosovës, e shpesh here vazhdojnë prej Ferizajit e Kaçanikut kah Gjilani e Kamenica, ose prej Prishtinës kah Gjilani e Kamenica. Këtë konstatim na e arsyetojnë vlerat e koeficienteve në mes të stacioneve në regjionin e Kosovës. Kështu psh. Ferizaji ka përputhshmeri me Mitrovicën e Titos (0,89), Prishtinën (0,86), Gjilanin (0,83), Podujevën (0,80), Kamenicën (0,76) dhe Suharekën (0,71) e më pak me Klinën (0,50). Prishtina ka përputhje me të madhe me Mitrovicën e Titos (0,90), Podujevën e Ferizajin (0,86), Kamenicën (0,74), e diçka më pak me Gjilanin (0,68), Suharekën (0,65), Klinën (0,61) dhe Prizrenin (0,60). Pozita gjeografike e Mitrovicës së Titos është e till që i mundson lidhje me ma shumë stacione edhe në distancë më të madhe, deri në Suharekë, Prizren, Klinë dhe Kamenicë. Pozita gjeografike e disa stacioneve është e till që mundson bashkimin e reve dhe shperndarjen e tyre prej burimeve të ndryshme, respektivisht prej drejtimeve të ndryshme. Të tilla janë: Prizreni, Klina, Mitrovica, Prishtina dhe Kamenica. Ndryshimet në regjimin e reshjeve në mes të disa stacioneve brenda regjionit të Dukangjinit dhe në mes të dy regjioneve, që nuk

janë shumë larg në mes vedi, na detyrojnë që të mendojmë për burimet e ndryshme të reshjeve, ngase pozita gjeografike e Kosovës është e tillë që mundson depërtimin e reve nga drejtimet e ndryshme nëpërmjet të luginave të lumenjve që territorin e Kosovës e lidhin me territoret tjera të vendit tonë dhe me detin Adriatik nëpërmjet të Drinit të Bardh.

Në këtë kontekst ndikim luajn patjetër llojllojshmeria e relievit, e lidhjeve me regjionet tjera për rreth Kosovës, e drejtimit të shtrirjes së maleve dhe fushave, e mbylljes në disa anë dhe e hapjes në anet tjera. Ndoshta rall kund në një hapsirë kaq të vogël mund të hasim në ndryeshushmeri të regjimit të reshjeve si në Kosovë.

Për të pa shpërndarjen e reshjeve sipas sasisë (në intervale), muajve dhe sipas stacioneve meteorologjike do të japim këtë tabelë të kombënuar: (shih faqen që vijon).

Nese e bejm diferencimin e muajve sipas sasisë së reshjeve nën 50 mm (grupi i parë), pastaj në mes të 50 e 100 mm (grupi i dytë) dhe mbi 100 mm (grupi i tretë) do të shofim se cilët muaj kanë më shumë frekuenca në cilat intervale.

Në grupin e parë (nën 50 mm) bejnë pjesë këta muaj:	
gushti me 11 raste me interval prej	40—50 mm,
shtatori me 5 raste	40—50 mm,
janari me 5 raste	40—50 mm,
shkurti me 5 raste	30—40 mm,
marsi me 5 raste	30—40 mm.

Në këtë grup mbizotrojnë rastet nga regjioni i Kosovës, nga 30 raste gjithsej sa janë shpërndar, 22 janë nga regjioni i Kosovës dhe vetem 8 nga ai i Dukagjinit.

Në grupin e dytë në mes të 50 dhe 100 mm bejnë pjesë këta muaj:	
maji me 6 raste në intervalin më mes	70—80 mm,
nentori me 6 raste	60—70 mm,
korriku me 6 raste	50—60 mm,
dhjetori me 5 raste	50—60 mm,
prili me 5 raste	50—60 mm,
tetori me 4 raste	60—70 mm, dhe
qershori me 4 raste	50—60 mm.

Në grupin e dytë të muajve me reshje në mes 50 e 100 mm janë shpërndar 84 stacione prej tyre 44 të regjionit të Dukagjinit dhe 40 stacione të Kosovës.

Në grupin e tretë të muajve me ma shumë se 100 mm na paraqiten vetem tre muaj: nentori me 3 raste në disa intervale mbi 100 mm, dhjetori me 2 raste dhe janari me 1 rast. Me ma shumë se 100 mm reshje në muaj lajmerohen 6 raste prej tyre 3 here Gjakova, 2 here Peja dhe një here Klina. Sikurse shifet me ma shumë se 100 mm reshje në muaj lajmerohen vetem stacionet e rrafshit të Dukagjit.

Intervali	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	frequ- enc.
150—140 mm												Gja	1
140—130 „											Gja		1
130—120 „													0
120—110 „											Pe		1
110—100 „	Gja										Kl	Pe	3
100— 90 „	Pe										Is		2
90— 80 „			Gja	Gja	Gja Fe	Po			Gja	Gja Pe			8
80— 70 „		Gja Pe	Pe		Pz Kl Su Pr Po Kam	Su Fe Gji			Su	Kl	Po	Pz Is Kl	18
70— 60 „	Pz Is Kl			Pe Is	Pe Gji	Fe MT Kam	Su Fe			Pz Is Fe Pr	Pz Su Fe Pr MT Gji	Su Gji	24
60— 50 „	Su	Pz	Pz	Pz Kl Su Su Fe Pe	Is MT	Kz Is Kl Pr	Pz Gja Pe Kl Gji Kam	Fe	Pz Pe Fe Kam	Su MT Po	Kam	Pr MT Po Fe Kam	33
50— 40 „	Fe MT Po Gji Kam	Kl Su Fe Po	Is Fe Kl Su	Pr MT Gji Kam		Gja	Is Pr MT Po	Pz Gja Pe Is Kl Su Pr MT Po Gji Kam	Is Kl Pr MT Po	Gji Kam			40
40— 30 „	Pr	Is Pr MT Gji Kam	Pr MT Po Gji Kam						Gji				12
	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	144

STEPEN PODUDARNOSTI REŽIMA PADAVINA U SAP KOSOVU

Dr Asllan Pushka

Rezime

Pomoću metoda koeficijenta korelacije ranga odredili smo stepen podudarnosti režima padavina u 12 meteoroloških stanica SAPK. Na osnovu dobijenih rezultata došli smo do konstatacije da postoji mala do znatna podudarnost u režimu padavina između Metohije (Dukagjina) i Kosova ($r=0.42$). Visoka podudarnost u režimu padavina postoji između meteoroloških stanica Kosovske regije, a nešto slabije se podudaraju režimi padavina u Metohijskoj (Dukađinskoj) regiji. Režim Đakovice, Peći i Istoka ne pokazuju nikakvu sličnost (podudarnost) sa režimima ostalih meteoroloških stanica SAPK. Interesantno je spomenuti slučaj Suve Reke, čiji režim padavina pokazuje malu do znatnu podudarnost sa režimom Prizrena i ako su međusobno daleko samo 20 km, ne pokazuje nikakve sličnosti sa ostalim stanicama Dukadijske kotline, a pokazuje veliku sličnost sa nekim stanicama Kosovske kotline kao npr. sa Kamenicom, Titovom Mitrovicom i dr. Klina pokazuje više sličnosti sa režimima padavina kako Metohijskih tako i Kosovskih stanica. Ovakve razlike u podudarnosti režima padavina treba tražiti u geografskom položaju i otvorenosti prostora Kosova uticaju sa jugozapada, severa, istoka i juga. Ovi uticaji utiču na menjanje izvora vlažnosti tokom godine od jedne stanice do druge.

PËRMBAJTJA — SADRŽAJ

MATEMATIKË — MATEMATIKA

	Fq. — Str.
<i>M. Berisha, H. Turku, R. Kastrati dhe F. Berisha</i>	
Funksionet çift nga klasa H_p^ω dhe modulet e vazhdueshmërisë	5
<i>Muharrem Q. Berisha</i>	
Zbatimi i moduleve të vazhdueshmërisë në vlerësimin e koeficientëve Fourier të funksionit nga klasa H_p^ω — — — — —	11
<i>Muharrem Berisha dhe Ruzhdi Kastrati</i>	
Mbi modulet e vazhdueshmërisë dhe koeficientet Fourier të serive lakunare në H_p^ω — — — — —	19
<i>Fehim Dedagji</i>	
O matriçnoj triangulaciji operatora klase $\mathcal{C}_{p,p>0}$ — — — — —	29
<i>Cemal Dolićanin</i>	
Epikikli hiperboličke ravni i njihova »paralelnost« — — — — —	33
<i>Minir Efendia</i>	
Prava $\mathcal{C}_p$ — trivialnost — — — — —	39
<i>Emrush Gashi</i>	
Bimoduli i radikali — — — — —	49
<i>Qamil Haxhibeqiri</i>	
Resolutions of maps of pairs — — — — —	57
<i>Isak Hoxha</i>	
Komutatorët e operatorëve në hapësirën e Hilbert-it — — — — —	63
<i>Isljam Şehu</i>	
O uniformnom korektnom Cauchyjevom problemu u Banachovom prostoru — — — — —	73
<i>H. Turku, M. Berisha, I. Hoxhaj</i>	
Një kriter i interpolimit në hapësirën H^2 — — — — —	83

FIZIKË — FIZIKA

<i>R. Bejtullahu, J. Moser i H. Spahiu</i>	
Fresnelova difrakcija në tankoj prizmi koja pokriva polovinu pukotine — — — — —	89
<i>Jahi Hoxha, Lutfi Istrefi dhe Ahmet Veseli</i>	
Shpërndarja e dendësitetit të rrymës gjatë procesit të zbrazjes elektrike në magnetronin planar — — — — —	97

<i>L. Istrefi</i>		
Diagnostika e plazmës »Z-pinç« me koncentrim të madh elektro- nesh — — — — —		105
<i>Jahja Koka</i>		
Funksioni i korelacionit të rrjetës optike dhe projekcionit të saj —		117
<i>Jahja Koka</i>		
Shfrytëzimi i një koncepti jokonvencional statistikorë në hu- lumentimin e deformimit — — — — —		125
<i>J. Moser i R. Bejtullahu</i>		
Difrakcija na pukotini snopa lasera u prvom modu — — — —		131
<i>Zahadin Shemsidini</i>		
Hulumtimi i kalimeve fazore në sulfidin e bakrit superjonik me metodën e dilatimit termik — — — — —		141
<i>Branko Teofilov</i>		
Molekulaska struktura, osobine kristala i deformacije tela — —		149
<i>N. Urli i R. Maljiçi</i>		
Dobiveni efekti nakon grijanja p-CdSb do temperature 550 K —		157
<i>Ahmet Veseli dhe Gani Jashari</i>		
Metodat e orbitaleve molekulare në llogaritjen e energjive të molekuleve benzenoide — — — — —		169
<i>Ahmet Veseli, Lutfi Istrefi dhe Jahi Hoxha</i>		
Llogaritja e distancës në mes të atomeve të karbonit dhe oksig- jenit — — — — —		179

BIOLOGJI — BIOLOGJIA

<i>Beqir Hundozi</i>		
Hordeo-caricetum distantis Mic. 1957 u vegetaciji Kosova — —		189
<i>Ferat Rexhepi</i>		
Endemiket e Kosovës — — — — —		203
<i>Ferat Rexhepi</i>		
Endemiket e Ballkanit në florën e maleve të larta të Kosovës —		211
<i>Ferat Rexhepi</i>		
Fitocenoza Quercetum trojanae Dukagjini — — — — —		221

GJEOGRAFI — GEOGRAFIJA

<i>Ibrahim Ahmetaj</i>		
Rrafshina e Millanoviqit në horstin e Dukagjinit — — — —		237
<i>Muharrem Cërabregu</i>		
Kontributi i M. V. Coronellit për hartografinë e pjesës qendrore te Evropës Juglindore — — — — —		249
<i>Riza Çavolli</i>		
Fizionomska regionalizacija zapadno dreničkog podrđa — — —		261
<i>Qazim Lleshi</i>		
Mikroregija »Bjeshkët e Nemuna« — prokletijska — — — —		265

Zivorad M. Martinović

Hidrologija izvorišta u oligocenu (?) niške kotline — — — — 289

*Safet Nurković*¹

Osvrt na neke karakteristične osobine urbanizovanosti prostora
Jugozapadne Srbije — — — — — 319

Aslan Pushka

Korelacioni në mes të lartësisë mbidetare dhe pjesëmarrjes së
sipërfaqeve të punueshme, arave dhe sipërfaqeve nën misër dhe
grur — — — — — 329

Aslan Pushka

Shkalla e përputhshmërisë së regjimit të reshjeve në KSA të
Kosovës — — — — — 333

Red. teknik — Teh. urednik

NIJAZI HASHANI

Korektorë — Korektori

AUTORËT — AUTORI

Tirazhi — Tiraž
500 primeraka

Štampa: Štamparija »Bakar« — Bor