

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
UNIVERSITETI I BEOGRADIT

---

# ЗБОРНИК

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ

VI

СВЕСКА Б

# BULETIN

I PUNIMEVE SHKENCORE  
TË FAKULTETIT FILOZOFIK TË PRISHTINËS

VI

ВЛЕНИ Б

ПРИШТИНА — PRISHTINË

1969









UNIVERSITÉ DE BELGRADE

RECUEIL DES TRAVAUX

DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE ET DE LETTRES

AN 1967

ЗБОРНИК  
ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ  
VI, СВ. Б

UNIVERSITÉ DE BELGRADE

---

# RECUEIL DES TRAVAUX

DE LA FACULTÉ DES LETTRES ET SCIENCES  
À PRIŠTINA

VI

PRIŠTINA

1969

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
UNIVERSITETI I BEOGRADIT

---

# ЗБОРНИК

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ

VI

СВЕСКА Б

# BULETIN

I PUNIMEVE SHKENCORE  
TË FAKULTETIT FILOZOFIK TË PRISHTINËS

VI

ВЛЕНИ Б

ПРИШТИНА — PRISHTINË

1969

Редакциони одбор —Kës hilli Redaktues  
Comité de Rédaction

Др ДАНИЛО БАРЈАКТАРЕВИЋ  
Др БОГУМИЛ ХРАБАК  
Др ДЕРВИШ РОЖАЈА  
Др ЖЕЉКО КУЋЕР  
ИМЕР МЕРОВЦИ

Главни и одговорни уредник  
Др ДАНИЛО БАРЈАКТАРЕВИЋ  
ред. проф. универзитета

Напомена: У овој књизи сваки аутор вршио је коректуру свог рада.

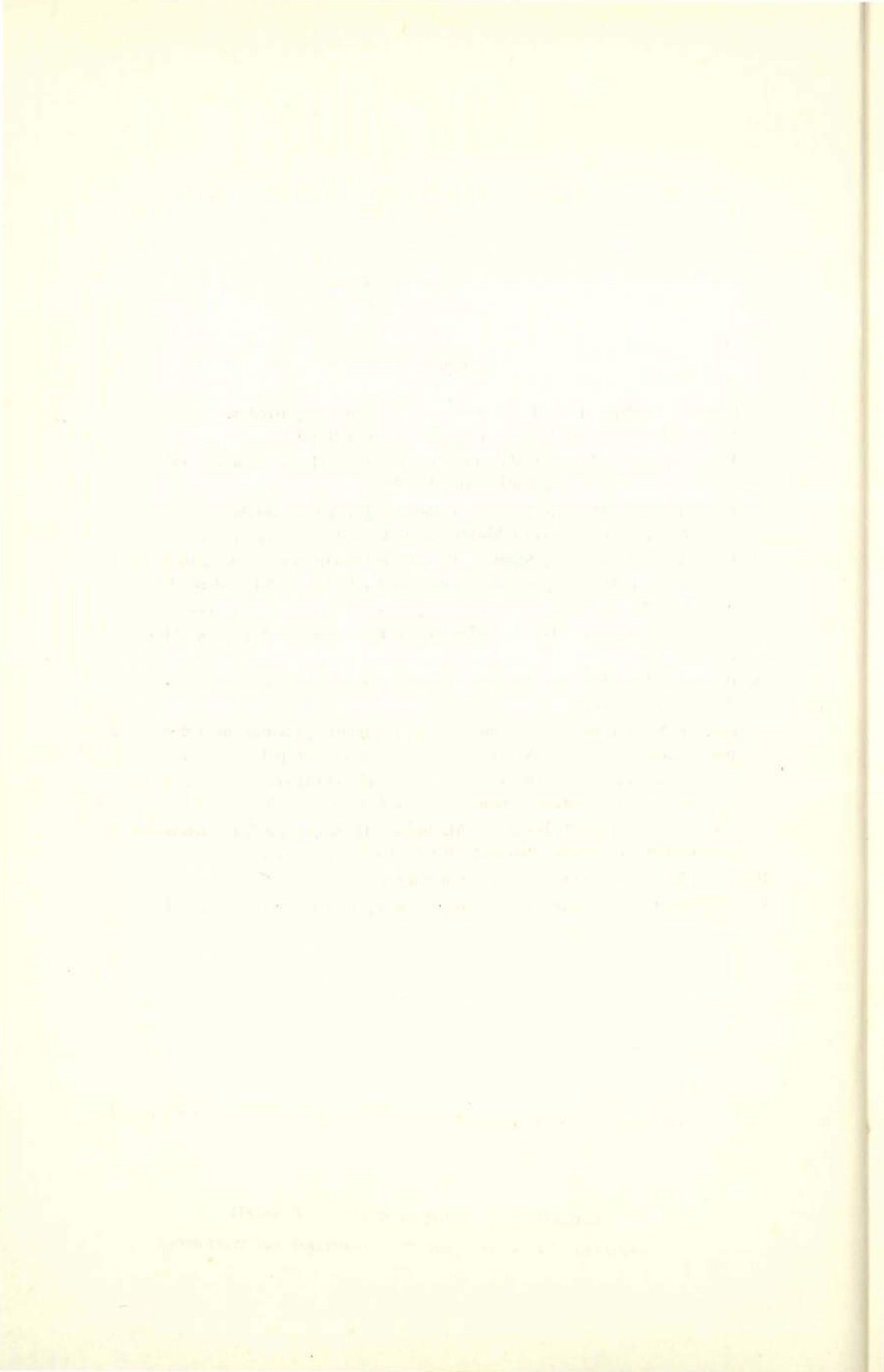
Издаје Филозофски факултет у Приштини

---

Универзитетска печатница — Скопје. Тираж 700 примерака

## C A D P Ж A J

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Bogumil Hrabak, Putnici iz hrišćanske Evrope o privrednim prilikama slovenskih zemalja na Balkanu pod Turcima u XVI veku.....                                                    | 1   |
| 2. Vilim Vajgand—Mileta Jaredić—Elisaveta Stanišić—Merita Šehdulje, Određivanje cinka u koncentratu rude iz rudnika Trepča.....                                                     | 47  |
| 3. Vilim Vajgand—Elisaveta Stanišić, Titracija nekih jonova metala u prisustvu polarizovanih Volframovih i Molibdenovih elektroda.....                                              | 51  |
| 4. Vilim Vajgand—Elisaveta Stanišić, Titracija bakra etilendia mintetrasirčetnom kiselinom u prisustvu polarizovanih elektroda od platine, bakra zlata i legure zlata i bakra ..... | 63  |
| 5. Koviljka Stanković — Tomić, Prilog poznavanju livadske vegetacije Mokre planine (Kosovo) .....                                                                                   | 71  |
| 6. Bedri Kamberi, Primena dipolnih momenata za određivanje strukture koordinacionih jedinjenja.....                                                                                 | 75  |
| 7. Богдан Дамњановић, Неки примери непрекидних функција чији Фурије-рови редови конвергирају неравномерно или дивергирају .....                                                     | 113 |
| 8. Radivoje Ž. Marinović—Dragoslav R. Pejčinović, O pH vrednosti kore drveća i naseljima lišaja hanthoria parietina L (l.) th. fr. na kori drveća.....                              | 151 |
| 9. Feriz D. Krasnići—Radivoje Ž. Marinović, O rasprostranjenju tetraspora ulvacea kütz. u vodama Beloga Drima na Kosovu.....                                                        | 159 |
| 10. Ymer Merovci, Nji gjeneralizim i integralit (ap) .....                                                                                                                          | 163 |
| 11. Ejup Hamiti, Disa kuptime dhe teorema te gjeometris metrike .....                                                                                                               | 171 |





Dr BOGUMIL HRABAK

## PUTNICI IZ HRIŠĆANSKE EVROPE O PRIVREDNIM PRILIKAMA SLOVENSKIH ZEMALJA NA BALKANU POD TURCIMA U XVI VEKU

Putopisi kao historijski izvori se očigledno ne mogu upoređivati sa većinom druge naučne dokumentacije u kojoj manje dolaze do izražaja subjektivni momenti sastavljača građe. Pa ipak, zbog velikog nedostatka izvornog materijala za period osmanlijske vladavine u južnoslovenskim zemljama, počev od druge polovine XIX stoleća ovi izvori informacije bili su vrlo popularni (i to kod Bugara i znatno kasnije zbog naročito velikog nedostatka povесnih vrelа, pre pojave prevoda turskih dokumenata). O naučnoj vrednosti zabeležaka starih putnika prvi je kod Srba pisao Jovan Ristić (1854), koji je smatrao da u odsutnosti boljih izvora, uz primenu stroge kritike, historičari se mogu služiti starim putopisima, iako su oni površni kad opisuju izgled zemlje, pružaju odlomke iz javnog i domaćeg života, kao i sitnice i slučajnosti na koji se savremeni hroničari i ne osvrću.<sup>1</sup> Kasnije je taj rad nastavio u Beogradu Čeda Mijatović<sup>2</sup>, a kod Hrvata Petar Matković<sup>3</sup>, koji je zadužio evropsku osobito geografsku nauku svojim krajnje predanim i dugogodišnjim radom na iznalaženju i komentarisanju putopisa o balkanskim zemljama u XVI stoleću. Ovaj interes je iznova podstaknut između dva svetska rata, kad se u nauci osetila puna nedovoljnost izvornih obaveštenja za „tamni” turski period. Nije teško zapaziti da su se na srpskoj strani putopisima iz XVI i XVII veka sve do skora bavili stručnjaci koji nisu bili ni historičari ni geografi.<sup>4</sup> U bugarskoj nauci redaktor bečkog časopisa *Мирозрeнue* Dobrović je još 1851. godine objavio deo putopisa Vratislava iz Mitrović, no K. Jireček je

<sup>1</sup> Јован Ристић, *О историчној важности усјомена старијих путника...*, Гласник Друштва србске словености VI, Београд 1854, 209—10.

<sup>2</sup> Ч. Мijatović, *Пре триста година*, Гласник Србског ученог друштва XXXVI, Београд 1872. — Он је резигнирано писао: „... али у њима једва ако буде што за земљописе; за историка нема ништа” (198); држао се путописа насталих у пратњи аустријских дипломатских мисија и налазио је да извесну корист могу пружити за утврђивање старих путева (197—8).

<sup>3</sup> Текстови под заједничким називом *Putovanja po Balkanskom poluotoku XVI veka* објављени су у *Radu JAZU* 49, 56, 62, 71, 84, 100, 105, 112, 116, 129, 130, 136 а неки оригинали у *Starinama* X, XIV, XX, XXII.

<sup>4</sup> Из ове групе стручњака био би последњи Зоран Константиновић својом докторском дисертацијом *Deutsche Reisebeschreibungen über Serbien und Montenegro*, München 1960 (на стр. 21—37 и 37—49).

prvi skrenuo pažnju na naučnu vrednost starih putopisa<sup>5</sup>. Taj posao nastavio je, dosta oslanjajući se na Matkovića Ivan Šišmanov<sup>6</sup>, čije nepotpune i nedovoljno sistematske rezultate prilično koriste i savremeni bugarski privredni historičari.

Još je P. Matković (1878) ustanovio da su promenjeni motivi putovanja u novom veku u odnosu na motive u srednjem veku: u srednjem veku putovali su najviše hodočasnici na Hristov grob, dok su kasniji putnici obično bili članovi diplomatskih misija na sultanovom dvoru u Carigradu. Turska ratovanja u balkanskim zemljama u XV veku nagnala su putnike da se služe morskim putevima, tako da su putopisi iz toga vremena krajnje retki; uostalom, srednjevekovni putopisi ne upoznaju čitaoca sa životom i običajima zemalja i naroda, već su više prilika za iskazivanje pobožnosti. Sa širenjem orbita i sa otvaranjem i američkog kontinenta i Srednjeg i Dalekog Istoka promenjene su ne samo svrha putovanja nego i interesi putopisanja, a takvi tekstovi postali su dosta česti, skoro pomodni, i trebalo je da prošire čovekova znanja i obrazovanje.<sup>7</sup> Šišmanov je razradio ove misli i utvrdio nekoliko interesovanja i interesa putopisa u novom veku, te periodizirao putopisanje prema sadržanim karakteristikama na tri stadija — 1) potreba za praktičnim znanjima i obaveštenošću pri putovanju; 2) traganje za ostacima klasične starine; 3) nastojanja da se utvrde osobenosti naroda. Pored didaktičkog cilja (da se putopisima prošire znanja), postojao je i konkretniji cilj — da se prate političke promene pa i uočavaju društvena kretanja.<sup>8</sup>

Naročito zbog ovih konkretnih potreba, opisivanje prilika u zemljama agresivnog Otomanskog carstva, koje se upravo u XVI veku nalazilo u naponu snage i predstavljalo urgentnu opasnost za hrišćansku Evropu, postalo je veoma poželjno i popularno. Orijentalno-levantinski način života po gradovima takođe je izazvao radoznalost ljudi vičnih peru iz sasvim drukčije, uglavnom katoličke sredine. Kao rezultat svega toga nastali su mnogobrojni putopisi po turskim zemljama.

Vrednost putopisa o slovenskim zemljama pod vlašću bosforskih sultana u XVI stoleću nije ni izdaleka ujednačena. Putnici su dolazili iz raznih zemalja i sa raznim nacionalnim osobinama, bavili su se različitim poslovima, imali su različita predznanja, poznajući ili ne znajući slovenske jezike, i najzad, morao je postojati i različiti interes u vezi sa opisivanjem pri putovanju, a što je moglo uticati na pojave različitih tendencija. Kad je reč o privrednim prilikama, drukčije je stvari posmatrao, na primer, stručnjak poznate Fugerove firme Hans Dernšvam nego biskup Antun Vrančić iz istog putničkog karavana. Članovi austrijskih diplomatskih misija pokazivali su političke tendencija, kojih na primer nije bilo kod Mlečana, realnih trgovaca, koje su ekonomski uslovi života znatno više interesovali. Karlo Rim iz Holandije,

<sup>5</sup> *Стари пътуешествия по България от 15—18 столетие, Периодическото издание III (1882), IV (1883), VII (1884).*

<sup>6</sup> *Стари пътувания през България в посока на римски военен път от Белград за Цариград, Сборник за народни умотворения, наука и книжнина IV, София 1891 (допуна из његовог пера и пера других има и у књ. VI ове периодике).*

<sup>7</sup> P. Matković, n. n., *Rad* 42 (1878), 58, 166 и 183—4; *Rad* 49 (1879), 103.

<sup>8</sup> Ив. Шишманов, n. n., 375—77.



zemlje naprednog stočarstva, često je govorio o toj privrednoj grani, i u celini je nešto pozitivnije gledao na stanje nego politički zainteresovani putnici iz austrijskih zemala, Opšta vrednost informacija zavisila je, prirodno, i od same ličnosti putopisca, tj. inteligencije i opšteg obrazovanja, sposobnosti posmatranja, živosti duha, lične pokretljivosti, ličnih naklonosti, interesovanja i poznavanja jezika. Biskup Vrančić govorio je o teškoćama u doznavanju činjenica čak i kad se poznaje jezik domorodaca zbog toga što se lokalno stanovništvo, iz političkih razloga, klonilo razgovora sa diplomatskim predstavnicima jedne neprijateljske države; uostalom, i obavezni turski pratioci, čauši, budno su pazili na kontakte ljudi diplomatske misije koju su sprovodili.<sup>9</sup> Najzad, i kod jednog istog putopisca mogu se naći detaljnije ili sumarno napisane partije ne samo s obzirom na profesionalnu pažnju putopisca, nego i kad je reč o pojedinim deonicama puta, jer prosto uslovi putovanja nisu omogućavali da se uvek sa istom intenzivnošću zapaža i beleži. U svakom slučaju postoje neposredna, detaljna opažanja ali i paušalne ocene. Uostalom, pored pravih putopisa, postojali su i putnički itinerari, siromašni relevantnim podacima.

Zbog svega toga teško je uopšteno govoriti o vrednosti i osobito pouzdanosti vesti iz putopisa. Čak i pri najboljim uslovima putopisanja, putopisci su o zemlji kroz koju su putovali, govorili samo sa druma, bez mogućnosti da se duže zadržavaju i da u dodiru sa stanovništvom i predstavnicima lokalnih vlasti provere svoje obično samo vizuelne opservacije. Prirodno je da su bili pouzdaniji u opisu fizičkih predmeta i pojava koje se i vizuelno mogu shvatiti, ili ako su duže boravili u Turskoj, nego u opisivanje kompleksnijih pojava, kod utvrđivanja uzroka ovih, kod navođenja brojeva, kad se povode za starijim literarnim navodima i uopšte kad su morali da se oslone na neprovereni kratkotrajni utisak. Korišćenje vesti iz putopisa biće, svakako, intenzivnije ako postoji mogućnost da se oni ukrste i izlože kritici iskaza pomoću pouzdanijih izvora druge vrste.

Putopisi su se do sada u našoj nauci više koristili u etnografsko-geografskim istraživanjima, na primer trgovačkih saobraćajnica, narodnih pesama, običaja i nošnje. U bugarskoj historijskoj literaturi pojedini podaci su isturani i u prvi plan istraživanja privredno-historijskih prilika, gde su, razume se, tako pojedinačni, izolovani i nekritikovani, više delovali kao ilustracija. U ovom radu učinjen je pokušaj da se navodi iz putopisa sistematizuju kao dokumentacija u izučavanju ekonomske prošlosti. Sasvim je prirodno da pri takvom radu neki putopisi su jedva došli do izražaja, dok su neki intenzivno korišćeni i često su navođeni; u ove druge naročito spadaju Hans Dernšvam, Paolo Kontatini, Štefan Gerlah, Katarin Zen i nešto manje B. Kuripešić i A. M. Pigafeta. Ovakav tretman (koji se vidi po izričitom citiranju u osnovnom tekstu odnosno u prebacivanju vesti nekih putopisaca u napomene) svesno je primenjivan, jer putopisci koji su se više bavili privrednim fenomenima, imali su i izvesne kriterije pri davanju ocena ili pri zapažanju, što je uticalo na ujednačeno davanje iskaza i karakteristika, naročito kad je reč o prvim partijama ovoga rada. Pri tome nije, osim izuzetno, obavljeno poređenje sa novim izvornim podacima kvalitetnijih izvora, nego je primenjeno komenta-

<sup>9</sup> Rad 71 (1884), 13.



risanje na bazi postojećih mogućnosti historiografije. Iznaženje i analiza kvalitetnih izvora o privredi balkanskih zemalja u XVI veku tek su upravo počeli, i još ne omogućuju veće i inventivnije kompariranje. Taj metodološki zadatak biće učinjen kasnije, u okviru jednog većeg istraživačkog poduhvata, kad dokumentacioni uslovi to budu omogućavali.

U prostornom pogledu obuhvaćene su Bosna i Hercegovina u uvećanom opsegu pod Turcima u XVI veku (sa dalmatinskom Zagorom i Novopazarskim sandžakom, ali bez Slavonije, jer nije na Balkanu), Srbija sa Kosovom u sandašnjim granicama, Makedonija sa egejskim delom do ispred Soluna i drugih gradova sa neslovenskom većinom stanovništva i Bugarska u današnjem obimu. Izuzetno, kad je reč o trgovinskim centrima sa slovenskom okolinom, govorilo se o trgovini i zanatstvu i u tim gradovima (Drinopolj, Siderokapsa) odnosno o centrima ribarstva na donjem Dunavu, jer su oni živeli i od ribe sa slovenskog dela Dunava.

# 1. FIZIČKI IZGLED TERENA PORED VELIKIH VOJNIČKIH I TRGOVAČKIH DRUMOVA U XVI Veku

Bosna je neposredno posle pada Jajca i zaključenog delovanja Jajačke krajine bila retko naseljena i privredno zapuštena. To stanje je zabeležio Benedikt Kuripešić, koji je Bosnom proputovao 1530. godine. On je pisao: „Kraljevina Bosna nije prema svojoj veličini gusto naseljena. Raspitao sam se i saznao da za to imaju tri uzroka: prvo, narod mnogo umire od kuge; drugo, Srbi i Martolozi bježe mnogo radi teških nameta i tereta; treće, najvažnije, što turski car uzima i odvodi iz zemlje mlade i okretne ljude, kao što je prije rečeno [...] Vidi se i to da je Bosna za vrijeme hrišćana bila vrlo lijepa i dobro obrađena zemlja [...] Pored puteva je zemlja najslabije obrađena zbog toga što im Turci, putujući tamo amo, silom oduzimaju sve što imaju, a ne plaćaju za to ništa. Otimaju im i trgaju zalogaj iz usta kao divlji i bijesni psi, vuci ili lavovi. Zbog toga siroti ljudi bježe sa cijelom svojom imovinom u planine i na plodne pašnjake daleko od puteva, pa tu obrađuju svoju zemlju.<sup>1</sup> Ipak, Kuripešić nije propustio da zabeleži i ubave terene. Tako, 30. avgusta 1530. on je kod Kamengrada putovao dosta dugo lepom poljanom.<sup>2</sup>

Nešto pozitivniji fizički opis Bosne, na putu od Šibenika do Sarajeva dao je mletački poklisar Toma Kontarini (1528.). Iako pominje vrletne i pogibiljne gore, njemu je Bosna lepa zemlja, sa dosta vode, prostranih polja koja su često položena po brežuljcima i lepih lugova, tako da obiluju žitom.<sup>3</sup> Mlečanin Katarin Zen (1550.) video je ubavu ravnicu kod Kupresa odnosno oko Lašve prijatne doline, polja i šume, iako su prolazili gorovitim visinama; predeo istočno od Hodidjeda predstavljao je za njega lep i rodan kraj, a prostor oko Prače ispunjavale su pitome doline i prijatne šume sa izvorima i krasnim

<sup>1</sup> B. Kuripešić, *Putopis kroz Bosnu, Srbiju, Bugarsku i Rumeliju 1530*, Sarajevo 1950, 31.

<sup>2</sup> Исто, 13

<sup>3</sup> P. Matković, *Putovanja po balkanskom poluotoku XVI veka*, Rad JAZU 71, Zagreb 1884, 1. — Ради скраћеног цитирања у будуће ће се наводити само број периодике,

vidicima.<sup>4</sup> Slično njemu, dva putnika na pravcu Šibenik — Livno zapazili su (marta 1574.) da je Petrovo Polje (jugozapadno od Drniša) „rodna ravna dolina”.<sup>5</sup> Zapuštenost, i to zbog vrlo malog broja žitelja koji su živeli u krajnjoj bedi konstatovao je (1573.) ne samo za Bosnu nego i za Srbiju, Makedoniju i druge turske balkanske zemlje, A. Badoar.<sup>6</sup> Drugi jedan putnik (Konstantin Garcon) u isto vreme (1572.) zapazio je da je zemlja kojom su prolazili bila vrlo rodna, ali raseljena.<sup>7</sup>

Povoljnije prikaze dobili su izvesni predeli Hercegovine. U dnevniku o putovanju mletačkog baila u Carigradu Paola Kontarinija (1580.) kod Cernice su zabeleženi lepi senokosi a Tjentište se prikazalo kao vrlo rodno.<sup>8</sup>

Novopazarski sandžak je 30-ih godina XVI veka ostavio različiti utisak na prolaznike. Strogi Kuripešić zatekao je dugu lepu poljanu na putu iz Nove Varoši ka reci Uvcu (septembra 1530.)<sup>9</sup>, dok je K. D. Šeper, tri godine kasnije (avgusta 1533.) video močvare i blatnu poljanu kod Sjenice.<sup>10</sup> To sjeničko polje je Mlečanima Katarinu Zenu (1550.) i Paolu Kontariniju (1580.) bilo dobro naseljeno. Lep predeo sa stokom svake vrste zabeležio je prvi od pomenutih i za Prijepolje.<sup>11</sup>

Za Srbiju se pojavljuje nešto slično: južniji delovi, Toplica i Kosovo Polje bili su bolje obrađeni i naseljeni nego severna Srbija i predeo uz Carigradski drum do Niša.

Kraj između Beograda i Smedereva (jula 1555.) bio je zarastao kao prava pustinja u hrastovo džbunje i šumu, te je bio nesiguran za prolaz: tek ponekad bi se po ravnici i po brežuljcima ugledale njive i vinogradi, pa su se još raspoznavale međe između pojedinih njiva i vinograda.<sup>12</sup> Oko Smedereva prostirala se lepa i plodna ravnica, a oko same varoši nalazili su se uzorni i veliki vinogradi.<sup>13</sup> Situacija se, izgleda, samo pogoršala dvadesetak godina kasnije, jer se na putu od Smedereva ka Grockoj prostirala šuma a od Grocke ka Beogradu šuma i neobrađena polja, tako da su se tek pred samim Beogradom počela javljati rodna polja i vinogradi; tu se za Štefana Gerlaha (jul 1578.) otvarao novi svet: izašavši iz šume, tu je nastajao prekrasan pejisaš.<sup>14</sup> Grocka je Dernšvamu (avgusta 1553.) izgleda kao pusto srpsko selo kraj jednog rukavca Dunava.<sup>15</sup>

<sup>4</sup> P. Matković, *Dva talijanska putopisa po balkanskom poluotoku iz XVI veka* *Starine X*, Zagreb 1878, 205 i 206; *Rad* 62 (1882), 96.

<sup>5</sup> F. Rački, *Prilozi za geografsko-statistički opis bosanskog pašaluka*, *Starine XIV* (1882), 193; *Rad* 124 (1889), 65.

<sup>6</sup> *Rad* 124, 2.

<sup>7</sup> Исто, 4.

<sup>8</sup> *Rad* 124, 63 i 79. — Јануара 1574 и Француз Филип Дифрен-Канеј је закључио да је Церница смештена у доста плоднм крају (М. Ј. Динић, *Три француска путописа XVI века о нашим земљама*, *Годишњица Николе Чујића* 49, Београд 1940, 98).

<sup>9</sup> В. Курепешић, н. д., 27.

<sup>10</sup> *Rad* 62, 59.

<sup>11</sup> Исто, 98; *Rad* 124, 65; *Starine* 207.

<sup>12</sup> F. Babinger, *Hans Dernschwam's Tagebuch einer Reise nach Konstantinopel und Kleinasien* (1553—55), München—Leipzig 1925, 265; М. Влаинац, *Из путописа Ханса Дершвама* 1953—55. године, посебан отисак из *Брисџа* XXI, Београд 1927, 46.

<sup>13</sup> Dernschwam, 260; Влаинац, 45.

<sup>14</sup> *Rad* 116 (1893), 53—55.

<sup>15</sup> Dernschwam, 5; Влаинац, 7.



Srbija južno od Grocke i Smedereva izazivala je još lošije impresije. Deonicu od Smedereva do Jagodine poznati privredni stručnjak kuće Fugera, Hans Dernšvam, dva puta ga je opisao (avgusta 1553. i jula 1555.). On je tu video ranije obrađene njive i vinograde, koji su tada samo ovde-onda bili obrađeni, ili je zemlja bila svuda zarasla i divlja.<sup>16</sup> Za kraj severno od Jagodine, na primer, pisao je da je ranije izgleda bio sav plodan, pod njivama i vinogradima a da je tada bio pust, zabataljen, i zarastao sitnogoricom. I za oblast južnije konstatovao je da je nekad bila plodna.<sup>17</sup> Selo južno od Smedereva, Livada, bilo mu je pustao oko njega neobrađen, i tu su od hrane mogli naći samo ječma, sena i vina.<sup>18</sup> Prilikom povratka u domovinu Dernšvam je bio nešto manje kritičan, tako da mu je predeo od Jagodine na sever izgledao lep, ravan i šumovit, gde se nalazilo još srpskih sela a svuda po strani bilo je i lepih njiva i malih privlačnih vinograda; ponegde se moglo videti da je od vinograda načinjena njiva.<sup>19</sup> Biskup Antun Vrančić, koji je avgusta 1553. godine putovao u istom karavanu u kome i Dernšvam, pokazivao je blagost u ocenjivanju, te je, na primer, južno od Smedereva zabeležio prostranu, rodnu i lepu zemlju.<sup>20</sup>

Južno od Jagodine Dernšvam je (jula 1555.) video lepu i plodnu zemlju koja nije bila obrađena, nego sva zapuštena i zarasla. Pokraj puta nalazila su se selišta, u kojima tada nije bilo ničega osim starih rupa koje su služile za smeštaj žita. Na svim stranama prostirali su se zaparloženi vinogradi, koje su stanovnici mestimice ipak obrađivali; to su, u takvim slučajevima, bili odlični, lepi, niski i prostrni vinogradi, koji su se pored puta „veselo” pružali, slično vinogradima pored Dunava od Beča ili čak dalje do Badena.<sup>21</sup> Južnije, kod sela Braljina, pružala se priyatna i velika ravnica sa masnom zemljom, na kojoj kao i na susednim brežuljcima je nekad uspevalo žito i rađalo grožđe.<sup>22</sup>

Okrenutost prošlosti odlikovalo je Dernšvama (avgusta 1553.) i u Nišu, za koji je pisao da je, izgleda, nekad bio velika varoš; okolni brežuljci su mu, isto tako, izgledali ranije plodni, pošto su se na nekim mestima još mogli poznati njive i vinogradi; tada je i tu sve bilo pustao i zaraslo.<sup>23</sup> Putopisac K. D. Šeper (avgusta 1533.) video je s jedne strane veliku goru a s druge strane močvaru i blato.<sup>24</sup> Predeo istočno od Niša, gde je putnicima sa Zapada u XVI veku počinjala Bugarska, Dernšvamu je bio rodniiji nego Srbija

<sup>16</sup> D e r n s c h w a m, 260; В л а и н а ц, 45 — С њ и м с е с л а ж е С а л о м о н Ш в а ј г е р (децембар 1577.), који за крај између Колара и Смедеревске Паланке каже да је предео ретко насељен и рђаво обрађен, иако је земља родна и може много људи и стоке да прехране; његов караван је у току три дана путовања наишао само на пет рђавих села (Rad 116, 88).

<sup>17</sup> D e r s c h w a m, 7 и 6; В л а и н а ц, 10 и 8.

<sup>18</sup> D e r n s c h w a m, 6; В л а и н а ц, 8.

<sup>19</sup> D e r n s c h w a m, 260; В л а и н а ц, 45.

<sup>20</sup> A. V e r a n c s i c s, *Őszes munkái* I, közli Szalay Láslo, MHH, Scr. II, Pest 1857, 301; Rad 71, 22.

<sup>21</sup> D e r n s c h w a m, 258; В л а и н а ц, 44.

<sup>22</sup> D e r n s c h w a m, 257; В л а и н а ц, 43.

<sup>23</sup> D e r n s c h w a m, 7—10; В л а и н а ц, 10.

<sup>24</sup> Rad 62, 5.

(do Niša), ali i on je bio pust i malo naseljen; tu su od hrane mogli dobiti ječma, sena, kokoši i pogače.<sup>25</sup> I biskupu Vrančiću je „Donja Mezija”, kako je zvao taj kraj, imala veća i plodnija polja.<sup>26</sup> Dolina Nišave od Niša za tri sata puta je i Mlečaninu Paulu Kontariniju bila vrlo rodna, kao što se i istočnije, ispred Klisure među neobrađenim ubavim gorama moglo naći lepo i rodno polje.<sup>27</sup> Jedan Italijan, nešto manje kritički orijentisan (jula 1550.) našao je da selo Klisura u dolini Nišave obiluje svim što je potrebno za život.<sup>28</sup> Ravnica oko Niša pokazivala je dobro obrađena polja sa mnogo kitnjastih sela.<sup>29</sup>

Caribrod je Dernšvamu izazivao utisak bednog bugarskog sela, a kraj oko njega bio mu je ugodan, sa crnicom zemljom koja je bila pusta.<sup>30</sup> Predeo istočno od toga mesta nije mu se činio tako plodan kao nekad, ali je ipak zabeležio nepožnjene žitarice na poljima; vinograda mu je izgledalo da je ranije bilo mnogo, ali su tada favorili pusti i zarasli.<sup>31</sup> Na deonici drumu od Caribroda do sela Belice njegov saputnik Vrančić video je dosta stena, ogoljenih šuma i mnogo manje obrađenih polja, jer su se žitelji zbog stalne pljačke od Turaka prolaznika radije predavali napasanju ovaca.<sup>32</sup> Ono što je mnogo kasnije (1580.) video Paolo Kontarini slagalo se s onim što je u pogledu terena primetio biskup Vrančić: selo Dragoman bilo je smešteno u dobokoj, kamenitoj i nerodnoj dolini, ograđenoj šumovitim gorama.<sup>33</sup>

Deo Srbije pored Dubrovačkog drumu od Kopaonika preko Toplice do Niša realističnije je kvalifikovan. Mlečanin Paolo Kontarini (maj 1580.) na zapadnim padinama Kopaonika zapazio je „najubavije pašnjake”, a nešto istočnije, pri spuštanju u ravnicu šume, divljačne i neobrađene terene, a opet dalje izvrsne pašnjake za konje.<sup>34</sup> Dolina Toplice bila mu je lepa, sa livadama i šumama ili vinogradima po strani. Teren mu je izgledao neobrađen, jer nije bilo žita, mada je dolina bila ubava i rodna i mogla je biti najkrasnija među svim dolinama. Od varošice Grguri prostirala se prijatna ali malo obdelana ravnica U istočnom delu Toplice, ka Moravi, pored guste šume, videli su se vrlo dobri pašnjaci za konje, neobrađeni brežuljci i obrađena dolina.<sup>35</sup> Kontarinijev zemljak Katarin Zen (1550.) bio je u stanju da ostavi optimistički zapis o ravnom topličkom polju, na kome je video mnogo ruža i drugog cveća, u drugim zemljama nevidenog.<sup>36</sup> Teren prema Moravi

<sup>25</sup> Dernschwam, 12; Влаинац, 13.

<sup>26</sup> A. Verancsics, н. д. I, 310.

<sup>27</sup> Rad 124, 84.

<sup>28</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 210.

<sup>29</sup> Rad 62, 99.

<sup>30</sup> Dernschwam, 13; Влаинац, 13—14. — При повратку Дерншвам је дао позитивнији приказ: „На целом том путу између Софије и Цариброда предео је био леп, испресецан брежуљцима, добро обрађен, веома плодан са црном земљом, са виноградама са обију страна” (Dernschwam, 255; Влаинац, 41).

<sup>31</sup> Dernschwam, 14; Влаинац, 14.

<sup>32</sup> A. Verancsics, н. д. I, 314.

<sup>33</sup> Rad 124, 85. — Штефан Герлах (јуна 1578.) описао је предео између Софије и Драгомана као коју обрађен које необрађену раван са родним пољима (Rad 116, 43).

<sup>34</sup> Rad 124, 66.

<sup>35</sup> Исто, 66—67.

<sup>36</sup> Rad 62, 99.



i Nišu bio je obrađen sa mnogo vrlo lepih hrišćanskih sela čije su kuće bile sagrađene od drveta.<sup>37</sup> Nemcu Melhioru Sajdlicu (1551.) Toplica je bio lep, ravan predeo.<sup>38</sup> Italijan Ramberti (1534.) zapisao je da je Toplica ne samo prijatna i lepa nego i plodna oblast, koja obiluje svim životnim namirnicama.<sup>39</sup> Prema Francuzu Pjeru Leskalopjeu (marta 1574.), Toplica je ravnica prošarana brežuljcima, obilna u svemu, gde čovek odahne od teškoća na predjenom putu.<sup>40</sup>

Na padinama gora koje su okružavale Kosovo Polje prema Felisku Petančiću (1502.) nalazila su se mnoga sela; u njegovom spisu pominje se močvara pored jezera Horavice (danas: Robovačko jezero).<sup>41</sup> Putujući južnim rubom Kosova Polja, iz Prizrena za Skoplje, jedan mletački bezimeni putopisac (1559.) prolazio je kroz veoma lepa polja, u potpunosti obrađena.<sup>42</sup> Uz put koji je vodio iz Novog Brda za Vranje preko Topolnice nizala su se sela a njihovi atari bili su dobro obrađeni (u jesen 1530.).<sup>43</sup> Na istom putu, ali dalje na istok nalazio se primerno obdelan kraj Znepolje.<sup>44</sup>

Sofijsko polje bilo je bolje obrađeno. O njemu se B. Ramberti (1534.) izrazi kao i jako prostranoj i lepoj ravnici, najvećim delom obrađenoj, gde raste mnogo žita i pirinča, a koja je zarubljena brežuljcima zasađenim vinogradima; na polju je bilo ispaše za nebrojenu i raznovrsnu stoku.<sup>45</sup> I Katarinu Zenu (jula 1550.) ugodno i prostrano sofijsko polje bilo je dobro obrađeno, sa mnogo sela.<sup>46</sup> Dernšvamu (avgusta 1553.), takođe, sofijsko polje izgledalo je lepo i prilično dobro obdelano.<sup>47</sup> Prema Pigafeti, isto tako, predeo oko Sofije bio je ravan, rodan, dosta naseljen i pod kulturama; on je posebno pomenuo selo Belicu, na zapadnom prilazu Sofiji, kao vrlo naseljen i ureden kraj.<sup>48</sup> Karlo Rim (1571.) je u svojoj opservaciji bio sličan Rambertiju; lepo, rodno i bogato sofijsko polje sa mnogo imućnih sela i crkava, radalo je svakojakim usevima, imalo je mnogo stoke u velikim stadima i vinograda po brdašcima.<sup>49</sup> Sofijska ravan kao široko žitno polje, gde uz bujne livade i pašnjake ima mnogo sela nablizo podignutih video je Štefan Gerlah (jun 1578.).<sup>50</sup> Sofijsko polje, zapadno od Sofije Paolo Kontarini (1580.) opisao je kao pašnjak bez cveća, na kome ima i obrađenih i neobrađenih terena.<sup>51</sup>

<sup>37</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 209.

<sup>38</sup> Rad 84 (1887), 52.

<sup>39</sup> Rad 56 (1881), 214.

<sup>40</sup> Р. Самарцић, *Београд и Србија у списима француских савременика, XVI—XVII век*, Београд 1961, 136.

<sup>41</sup> D. Knievald, *Feliks Petančić 1502 o putovima kojima valja napasti Turke*, *Vesnik Vojnog muzeja JNA V/1* (1958), 37.

<sup>42</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 253; Rad 83, 68—69.

<sup>43</sup> В. Курепешић, н. д., 36.

<sup>44</sup> Исто, 37.

<sup>45</sup> Rad 56, 219. — Софију у лепој равници бележи и француски курир Жак Гасо, јануара 1548 (М. Ј. Динић, н. н., 90).

<sup>46</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 210.

<sup>47</sup> Dernschwam, 14; В. Ланцац, 14.

<sup>48</sup> *Starine XXII*, 176—77; Rad 100, 122—23.

<sup>49</sup> Rad 112 (1892), 177.

<sup>50</sup> Rad 116, 43.

<sup>51</sup> Rad 124, 85.

Na Carigradskom drumu jugoistočno od Sofije prostirala se travna prerija (1550.)<sup>52</sup> U prvim decenijama druge polovine XVI stoleća ovaj kraj Bugarske pokazivao je početak relativnog privrednog uspona. Inteligentan opservator Štefan Gerlah (jul 1578.) od sofijskog polja do Vetrena zabeležio je s obe strane drumu vinograde, šumoviti dolinski predeo pa rodna polja, tj. kraj koji bi obilovao dobrim vinom i stokom.<sup>53</sup> Paolu Kontariniju (1580.) je lepa ravnica između Sofije i sela Trnova bila malo urađena. Iza pomenu-tog mesta on i njegovi saputnici našli su se na putu među neobrađenim brežuljcima, pokrivenim niskom hrastovinom. Zemljište je potom, prema Vakarelu bilo peskovito, a sam Vakarel je bio smešten u primamljivoj okrugloj kotlini.<sup>54</sup> U predelu Vakarela biskup Vrančić je zabeležio prostranu ravan okruženu crnogoricom, na čijem se podnožju nalazi venac sela.<sup>55</sup> Na isti način opisuje pejsaže uz drum prema Ihtimanu i Paolo Kontarini: lepa ravnica, okružena uokolo, na brežuljcima ubavom gorom, na čijem rubu su bila postavljena valjano građena sela.<sup>56</sup> Od Ihtimana (u čijoj je okolini put cara Trajana bio izlokao i zarastao u travu i žbunje) prostirala se krasna ravnica prema Plovdivu, kao što je kraj između Ihtimana i Vakarela predstavljao (maja 1572.) ugodnu zaravan, ograđenu gorom sa mnogim selima,<sup>57</sup> Jednom drugom nemačkom putopiscu je i kraj oko Tatarpazardžika, dalje na Carigradskom drumu, bio lep i dobro obrađen, sa svakojakom stokom.<sup>58</sup> Jedan Mlečanin (1580.), pak, južno od Tatarpazardžika, s desne strane puta, video je stare hrastove šume; u senci granatih hrastova putnici su se odmarali, posmatrajući naokolo dobru pašu, no s rdavom vodom.<sup>59</sup>

Prema tadašnjim geografsko-političkim pojmovima dolina Marice nije se ubrajala u Bugarsku, nego u Rumeliju, koja se uz Carigradski drum prostirala do Drinopolja (Jedrena), gde se već računala Trakija; za neke, kao za Melhiora Sajdlica (1559.), dolina Marice ubrajala se u Makedoniju i označena je kao ravna i rodna, no koja je prema moru gorovita, neobrađena i nenaseljena.<sup>60</sup> Feliks Petančić je (1502.) Rumeliju označavao kao „predeo otvoren suncu, pun svega što je korisno za ljudski život”.<sup>61</sup>

U dolini Marice prema Plovdivu ravnica je bila rodna ali slabo obrađena. Istočno od Plovdiva ravan je, prema Pigafeti, predstavljala pusto polje.<sup>62</sup> Biskup Vrančić je Plovdiv ugledao na platou vrlo prostranih i veoma plodnih polja, okruženog vrtovima.<sup>63</sup> Okolinu Plovdiva J. Soranco (jul 1575.)

<sup>52</sup> Rad 62, 105 (Катарин Зен).

<sup>53</sup> Rad 116, 43.

<sup>54</sup> Rad 124, 86.

<sup>55</sup> A. Verancsics, н. д. I, 317.

<sup>56</sup> Rad 124, 86.

<sup>57</sup> Rad 112, 225—29 (посланство Давида Унгнада).

<sup>58</sup> Исто, 183—4 (К. Рим).

<sup>59</sup> Rad 124, 87.

<sup>60</sup> Rad 84, 49.

<sup>61</sup> D. Kniewald, н. н., 40.

<sup>62</sup> Starine XXII, 174—5, Rad 100, 116—117.

<sup>63</sup> A. Verancsics, н. д. I, 323 и 324.



je označio kao krasan i otvoren ravničarski i brežuljkasti predeo, koji bi mogao da prehrani silan narod, kad bi njegova polja bila obrađena.<sup>64</sup> Učeni Nemač Štefan Gerlah (jun 1578.) video je ponešto maočvarski teren u blizini grada.<sup>65</sup> Plovdivsko polje je Paolu Kontariniju (1580.) bilo obrađeno, rađajući žitom i naročito lepim pirinčem, no sa tлом peskovitim pa i šljunkovitim i bez drveća; šumu je ugledao kraj Marice jugoistočno od Plovdiva, na jednom brežuljkastom, valovitom zemljištu, ponajviše neobrađenom, odnosno obrađenom samo blizu sela, koja većinom predstavljaju hajdučka mesta.<sup>66</sup>

Rumelija uz Carigradski drum između mesta Semizdže i Harmanli predstavljalo je nenaselenu i neobrađenu ravnicu, samo ponegde pod poljoprivrednim kulturama, odnosno pod šumom. Ukoliko se drum više približavao Drinopolju neobrađenih terena i šuma bilo je, kako izgleda, sve više.<sup>67</sup> čini se da se zapuštenost u ovom delu maričke doline tokom vremena samo povećavala, jer još 30-ih godina XVI veka, na primer između Harmanli i Mustafapašinog Mosta mogle su se videti priyatne poljane.<sup>68</sup> Vinogradi su se mogli na drumu videti tek oko Drinopolja.<sup>69</sup>

O Makedoniji je ostalo mnogo manje putopisačkih zapisa nego o oblastima uz drumove. Mlečanin Lorenc Bernardo (maj 1591.) jugozapadno od Bitolja putovao je prostranim ravnim i rodним poljem oko koga su se nalazila razna sela; na prilazima gradu Vodenu sa jugozapadne strane ugledao je primamljive brežuljke sa mnogo drveća, vrtova i voda, a ispred Jenidže-Vardara — kraj vrlo rodan, zasejan žitom; grad je raspolagao svakovrsnim životnim namirnicama. Zapadno od Soluna zemljište je, pak, bilo većinom nerodno, zaraslo glušcem.<sup>70</sup> Kuripešić je pred Stracinom (severoistočna Makedonija) putovao lepим poljem.<sup>71</sup>

Najzad treba pomenuti zabeležku bezimenog italijanskog putopisca (iz jula 1559.) o zelenoj dolini Bojane, punoj obrađenih polja i naseljenih mesta, tako da se taj predeo mogao porediti s Italijom.<sup>72</sup>

Krajem XVI veka predeli oko velikih gradova su izmenili svoj lik, jer su postali prostrane obrađene ravnice. Tako je, na primer, bilo već sa Beogradom.<sup>73</sup>

<sup>64</sup> Rad 124, 45.

<sup>65</sup> Rad 116, 41.

<sup>66</sup> Rad 124, 87 и 92.

<sup>67</sup> Rad 124, 92 (Паоло Контарини, 1580.).

<sup>68</sup> Rad 62, 50 (К. Д. Шепер, 1533.).

<sup>69</sup> Rad 124, 96.

<sup>70</sup> Rad 136 (1898), 31, 32 и 33.

<sup>71</sup> В. Куріпешић, н. д., 48.

<sup>72</sup> Матковић, *Два талијанска путописца*, 251; Rad 84, 63.

<sup>73</sup> Б. Храбак, *Београд као живи иржичије и живиарсјво шире београдске околине у XVI веку, Годишњак музеја града Београда IV (1957), 67 (закључено на основу података Дерншвама, Бецека и Герлаха); о томе виду и забелешку енглеског амбасадора Ричарда Бартонa: Вл. Поповић, Енглески амбасадор са султaном под Београдом 1596, Гласник Историјског друштва у Новом Саду, књ. VIII, св. 1 (1935) 98.*

## 2. SUMARNE OCENE O OBRAĐINOSTI ZEMLJE I POJEDINAČNI UZROCI NEDOVOLJNO OBRAĐENOSTI I SLABE NASELJENOSTI

Pored neposrednih opservacija o zemljištu kroz koja su prolazili, putopisci su u svojim putopisnim dnevnicima i pismima ostavili i globalne ocene o pojedinim zemljama pod Turcima ili čak o celokupnom evropskom delu turskog carstva; ponekad su upoređivali pojedine zemlje, naročito Srbiju i Bugarsku ili, pak, postojeće sa ranijim stanjem. U tim ocenama oni su se trudili da iznađu i razloge za lošu situaciju sa kojom su se suočili. Dok su neposredna zapažanja odražavala postojeću stvarnost (iako su se putopisci i u ovim opažanjima, iz više razloga razlikovali) u opštim karakteristikama su u znatno većoj meri prisutna njihova politička gledišta i odnos prema vladavini Osmanlija.

Jedna takva uopštena ocena o Bosni već je iznesena na početku izlaganja u prethodnom poglavlju. Takvih ocena o Bosni ima još. Kao što je već Kuripešić (1530.) delio Bosnu na gornju i donju, različite u uslovima za privredni život, to je pola stoleća kasnije (1580.) učinio i Mlečanin Paolo Kontarini. On je pisao da je severni deo (Kraljevina Bosna) rodnija, iako ima mnogo gora i dolina, jer su i visoke gore pune pasišta, gde se gaji mnoga stoka; južni deo (Hercegovina) je mnogo više gorovita, a manje rodna i naseljena oblast, žitarica nema dovoljno za svakodnevnu potrebu, ali stoke ima dosta, naročito koza.<sup>1</sup>

Jedan od poslednjih sumarnih izveštaja o Bosni u periodu koji nije obuhvaćen ovim radom je bez sumnje izveštaj austrijskom caru franjevca Atanasija Georgicea o putu u Bosni 1626. godine. On je ustanovio da je zemljište u Bosni dosta obrađeno, mada se stanovništvo na izvesnim mestima, zbog tiranije Turaka povuklo u planinu i tu obezbedilo poljoprivredne komplekse. Mnogi brežuljci i visinski tereni bili su pokriveni šumicama i gajevima, gde uvek ima vrlo zdrave vode, tako da zbog dobre paše ima dosta stoke. Posle ove uopštene slike dati su neposredniji podaci o pojedinim privrednim granama (o čemu će biti reči drugom prilikom).<sup>2</sup>

Srbija je Kuripešiću, iako ima nekoliko visokih planina, ravna zemlja išarana velikim lepim selima i njivama, dobro obrađena i vrlo rodna, jer u njoj u izobilju raste svakovrsno žito.<sup>3</sup> Ova karakteristika inače strogog Kuripešića nastala je na osnovu utisaka dobijenih na Kosovu Polju. Putnici koji su dolazili sa severa, iz Ugarske, i koji su prolazili Carigradskim drumom, bili su mnogo uzdržljiviji. Na primer, carski kurir Becek (novembra 1564.) pisao je o Srbiji: „Ovo je zemlja pusta, a narod vrlo siromašan, drži malo konja, nego tim više volova, vina i žita mu dosta rodi.” Bugarska, tj. kraj od Niša na istok, bila mu je takođe rđavo naseljena, ali lepa zemlja,

<sup>1</sup> Rad 124, 80. — Једну оцену за ужу регију, тј. за крај од Лашве до Сарајева, дао је Катарин Зен (1550.). Он је писао да су то лепа места и земље и добро обрађене, које се састоје од винограда, поља између беда, од доста шуме, врло лепог дрвећа, од широких терена, са доста села и извора, но са великих станишта по местима (*Starine* X, 206).

<sup>2</sup> fra M. N. Batinić, *Njekoliko priloga k bosanskoj crkvenoj poviesti*, *Starine XVII*, Zagreb 1885, 122.

<sup>3</sup> B. Kuripesić, н. д., 37.



koja rađa žitom, pirinčem, grožđem i svačim što je potrebno za život.<sup>4</sup> I Pigafeti (1567.) Bugarska je vrlo lepa zemlja, obrađenija i naseljenija nego druge zemlje. Poređenja su mu se nametala najpre u odnosu na Srbiju, za koju je rekao da je vrlo lepa zemlja, ali da ipak nije tako obrađena i naseljena kao što je Bugarska.<sup>5</sup> S njim se u osnovnom slaže Salomom Švajger (decembra 1577.), koji je za Srbiju rekao da je vrlo krasna, ali nenaseљena zemlja, slabije obrađena nego Bugarska, mada joj je tle tako čisto da ne može da se nađe kamenčić veći od oraħa i mada pravih šuma nema, nego raseљanih hrastova, kao u Bugarskoj.<sup>6</sup>

O Bugarskoj je Kuripešić zapisao da je lepa i dobro obrađena zemlje, sa mnogo više radnih ruku i stoke nego druge zemlje, i to zbog toga što ne leži pored granica, te što živalj tu manje trpi i što ne strahuje od upada државних neprijatelja. Odeća i nakit svedočili su mu o nekadašnjem napretku zemlje.<sup>7</sup> On je poređenje izveo sa Rumelijom (dolinom Marice), u kojoj su mu prilike bile gotovo iste kao i u Bugarskoj.<sup>8</sup> Neki kasniji putnici, međutim, nalazili su da je ova zemlja lepa, rodna i dobro naseljena, sa stanovništvom koje ima istu nošnju i običaje kao živalj u Bugarskoj, ali da je narod bogatiji, te se žene i devoјke još više kite nego u Bugarskoj.<sup>9</sup>

Jedan Italijan (1534.) dao je vrlo negativnu skupnu ocenu o celom balkanskom delu turskog carstva. Kad je prispeo u Carigrad zabeležio je da mu se činilo da je izašao iz pakla, jer je sva zemlja kojom je putovao od Dubrovnika ponajviše neobrađena i pusta, i to ne zbog prirodnih uslova nego zbog nemara stanovništva, — puna šuma i užasnih stena, nesigurna od hajduka.<sup>10</sup> Jedan njegov zemљak (Katarin Zen, 1550.), pak vrlo se pohvalno izrazio o poljoprivrednoj aktivnosti stanovništva od Jedrena do Carigrada, napomenuvši da ono gaji stoku svake vrste, da proizvodi velike količine pšenice, prosa, ječma, ovsa, kukuruza i pirinča te da ima i dosta vina, iako ne baš najboljeg.<sup>11</sup>

Za stanje koje su zatekli u balkanskim slovenskim zemљama pod Turcima putopisci su navodili više razloga. U pojedinim oblastima izvesnu ulogu imao je i granični položaj, jer su ne samo neprijateljske čete upadale i harale, nego je tu živelo i više turske voјske, koja je takođe bila elemenat

<sup>4</sup> Rad 84, 86. — O ненасељености ових крајева говори и Енглез Остел 1585. године Richard Hakluyt, *The Principal Navigations, Voyages, Traffiques and Discoveries of the English Nation*, Glasgow 1903) На овај и на остале енглеске путописце XVI века за југословенске крајеве аутора је обавестио др Веселин Костић, доцент Филолошког факултета у Београду, коме се аутор и овом приликом најлепше захваљује.

<sup>5</sup> *Starine* XXII, 179 и 186; Rad 100, 125 и 134—35.

<sup>6</sup> Rad 116, 89.

<sup>7</sup> „Да је земља Бугарска живјела у великој слободи, богатству и сваковрсном изобиљу за вријеме хришћана, може се познати и по томе што људи, жене и дјеца носе копоране и особите кошуље, извезене свилом. На врату и у ушима носе сребрне наушнице. Носе и прстење од сребра, од месинга, олова и бронзе. Жене и дјевојке носе плетенице од главе до земље и врло су накићене. „(В. Курепешић, н. д., 38—39).

<sup>8</sup> В. Курепешић, н. д. 40.

<sup>9</sup> Rad 84, 92 (Бедек, децембра 1564).

<sup>10</sup> Rad 56, 228—29

<sup>11</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 220—21. — Немац Сајдлиц (1559.) налазио је да су словенске земље од Дрипопоља до хришћанских међа сасвим насељене, нарочито кад је реч о селима (Rad 84, 54).







skih država nego i seljake vlastite zemlje.<sup>19</sup> Žitelji sela uz drum bili su obavezni da na zahtev Turaka, putnicima na drumu odmah, često i sa njiva, donesu hranu za konje (zob, ječam, seno), za što su primali naknadu u novcu ispod svake realne cene.<sup>20</sup> Zbog toga što im je od takvog otimanja malo što ostajalo od njihovog rada, seljaci nisu bili zainteresovani da proizvode nego su samo toliko obdelavali inače plodnu zemlju koliko da se sami preko godine ishrane; no, zato, držali su stoku, kao pokretan mal, koji se lako unovčavao i bio je manje, kao pokret, izložen turskom pljenjenju.<sup>21</sup> Pomenuto iznuričavanje obavezama i otimačinom te nezainteresovanost seljaka da proizvode u takvim uslovima vodilo je velikom siromašenju poljoprivrednog življa, što je dalje doprinosilo ekonomskoj zaostalosti i niskoj proizvodnji.<sup>22</sup> Oni koji se nisu mirili sa takvom sudbinom bežali su iz sela pored drumu u planine, manje pristupačne,<sup>23</sup> gde su lakše mogli koristiti rezultate svoga rada. Neposredna posledica toga bili su nenaseljenost odnosno nedostatak radne snage, što je potom direktno uticalo na nemogućnost obrade sve raspoložive zemlja, čak i vinograda i žitnih njiva, koji su pre dolaska Turaka bili pod kulturama.<sup>24</sup>

Kod oblasti koje se nisu nalazile na velikim drumovima situacija je bila znatno povoljnija. Kod poljoprivrednika tih krajeva postojao je interes za proizvodnju. Pošto je privredeno jačanje pokorenih hrišćana smetalo Turcima, oni su, na primer, u Makedoniji zabranili trgovinu žitom. Posle te zabrane opustela su polja, poimence oko Stracina (severoistočna Makedonija), to je narod proizvodio samo koliko da se prehrani.<sup>25</sup>

Od pojedinačnih zaključaka putopisci nisu išli dalje, jer, najzad, njima i nije bio cilj da stvaraju raspravu o moći i razlozima propadanja Otomanskog carstva.

<sup>19</sup> D e r n s c h w a m, 145—6; В л а и н а ц, 37—8. — Карактеристичке су речи Дерншвама; „Јер, кудгод је доспео проклети Турчин, све је пропало. Где и сам рај био, после Оих би постао несносним. Где они станују, не остају ни птице у ваздуху, ни рибе у води, ни дивљач у пољу, јер они не искоришћују и не уживају дарове Божје као други створови, већ као пси натерују све у бегство” (D e r n s c h w a m, 102; В л а и н а ц, 24).

<sup>20</sup> D e r n s c h w a m, 260; В л а и н а ц, 45 (за село Ливаду, између Јагодине и Смедерева); Rad 116, 41 (Штефан Герлах за Ветрен у Бугарској).

<sup>21</sup> Rad 116, 39 (Штефан Герлах за Коњуш у Румелији). — Бузбек бележи да су селаци у софијском пољу своје њиве звали „бугунцима” (les fuyards), јер им од њих ништа остајало (Lettres du baron de Busbec I, trad. par l'abbé de Foy, Paris 1748. 61—62).

<sup>22</sup> Rad 116, 88 (Салојмон Швајгер децембра 1577. за становништво Алексинца); Ч. М и ј а т о в и ћ, н. н., 185 (А. Бадор, 1573).

<sup>23</sup> Ч. М и ј а т о в и ћ, н. н., 218. — Мијатовић наводи податак из Хамера (Hammer, Geschichte des Osmanischen Reiches III, 128) да је сам велики везир Ибрахим-паша рекао (27. маја 1544.) аустријских посланицима да су он и други добри Турци давали да се хиљаде жена и деце терају у шума, само да не би допали ропства (Исто).

<sup>24</sup> D e r n s c h w a m, 242—3; В л а и н а ц, 38. — У вези с тим каже Дерншвама да су путовали преко малих узвишица и брдашца који се некад били плодни, а да у то време ту није било насеља, јер су села лежала негде далеко од друма (D e r n s c h w a m, 7; В л а и н а ц, 10).

<sup>25</sup> Rad 124, 40 (Ђ. Соранцо, 1574).

## 3. PODACI PUTOPISACA XVI VEKA O ŽITARSTVU BALKANSKIH SLOVENSkih ZEMALJA POD TURCIMA U XVI VEKU

Putopisci za Zapada najviše su o žitu pisali kad je reč o Bugarskoj i Rumeliji, tj. od Niša do ispred Drinopolja. Dernšvan je istočno od Niša, kako u dolini Nišave tako i po okolnim brdima video (jula 1555.) žitne terene.<sup>1</sup> Prostranu ravnicu istočno od Niša, sa žitnim poljima i livadama video je (juna 1578.) i Štefan Gerlah, uostalom kao i istočnije, oko Pirota i između Caribroda i Dragomana.<sup>2</sup> Između Caribroda i Sofije Dernšvam je (jula 1555.) zatekao žita kao nigde drugde.<sup>3</sup> Na sofijskom polju i 1534. i 1578. godine bilo je mnogo žita.<sup>4</sup> Slično je bilo i na pojedinim mestima u dolini Marice. Štefan Gerlah je zapazio mnogo žitnih polja i kraj Tatarpazardžika i kod Plovdiva.<sup>5</sup> Dernšvam je zabeležio i neke detalje o žetvi. Žito nije imalo dugačku slamu i vezivalo se žitnim stabljikama, koje nisu smetale pri vršidbi, pri kojoj se na posebnoj spravi („ikina“) sva slama sitno rezana kao na sečki. On donosi i koristan podatak da su sami seljaci morali da prevuku na tržište žitni desetak i da ga tu pretvore u novac.<sup>6</sup>

U dolini Morave na nekoliko mesta zabeležena su lepa žitna polja (jula 1578.): između Smedereva i Smederevske Palanke, između Batočine i Jagodine, Jagodine i Paraćina i oko Paraćina; južno od Paraćina dolina Morave je, jula 1578. godine, bila puna žitnih polja i livada.<sup>7</sup> Kod sela Braljine (severozapadno od Niša) Dernšvam je (jula 1555.) nalazio njive koje su ranije predstavljale žitna polja.<sup>8</sup>

Toplica je obilovala žitom,<sup>9</sup> i to kako pšenicom tako i drugim žitaricama.<sup>10</sup>

Putopisac Lorenzo Bernardo (1591.) ostavio je dragocene podatke o izvozu žita iz zapadne Makedonije za Lješ. Žito je kupovano u Strugi, te je konjima transportovano preko Elbasana i Tirane. Struški konjski tovar sačinjavao je da mletačka stara, i stajao je u Strugi dva i po talira, dok se star u Lješ u plaćao dva talira. Isti putopisac je za bitoljski kraj takode zabeležio da obiluje žitom, kojim trguje.<sup>11</sup>

Za Hercegovinu o žitu „koje bujno izraste“ pisao je samo jedan italijanski putopisac iz poslednje četvrtine XVI veka, i to za plavno Popovo Polje.<sup>12</sup> Kraška polja i u Bosni, na primer Kupreško, rodila su žitom.<sup>13</sup> Da

<sup>1</sup> Dernschwam, 256; Влаинац, 43.

<sup>2</sup> Rad 116, 50, 49, 48.

<sup>3</sup> Dernschwam, 255; Влаинац, 41.

<sup>4</sup> Rad 56, 219 (Рамберти); Rad 116, 43 (Шт. Герлах).

<sup>5</sup> Rad 116, 41 и 39.

<sup>6</sup> Dernschwam, 253 и 255; Влаинац, 40 и 41.

<sup>7</sup> Rad 116, 53, 53, 51.

<sup>8</sup> Dernschwam, 257; Влаинац, 43.

<sup>9</sup> Rad 56, 214 (Рамберти); Rad 62, 56 (житни данак султану 1533.).

<sup>10</sup> Rad 112, 175—6 (К. Рим, мај 1571.). — На основу турских докумената види се да се и у суседној Дубочици (крај Лесковца) производило: пшенице, јечма, зоби, уз конопљу, лан, поврће и разне воће (М. Васић, *Лесковац у XVI вијеку, Годишњак друштва историјара Босне и Херцеговине* XVII (1966—67), Сарајево 1969, 53).

<sup>11</sup> Rad 136, 21, 31. — У Скопљу су животне намирнице биле јевтине (Rad 124, 13 Ђ. Соранцо, 1575.)

<sup>12</sup> Rad 136,

<sup>13</sup> Rad 62, 91 (Катарин Зан, 1550).



je Bosna obilovala žitom pisao je još 1528. godine Toma Kontarini.<sup>14</sup> Dolina Pljevalja u pravcu Foče bila puna žita.<sup>15</sup>

Od žitarica ovas se nije viđao u Turskoj (te su Turci svojim konjima samo uveče davali po malo zobi).<sup>16</sup> Kukuruz uopšteno pominje samo jedan putopisac. Njega stvarno nije tada bilo u južnoslovenskih zemljama i njegovu funkciju je delimično vršilo proso, koje Dernašvam pominje jedino za pravljenje boze. Ne pominje se ni krompir.

U Srbiji i u Bugarskoj od dobrog pšeničnog brašna nije se pekao pravi hleb, nego pogače, bez kvasca i bez soli. Čak i u Carigradu, gde se pravio i to prilično beo hleb, on je bio neslan.<sup>17</sup>

S obzirom da je situacija podalje od drumu bila drukčija nego ona uz drum, ne samo Makedonija, Rumelija i Bugarska, nego i Srbija pod Turcima u XVI veku bila je ozbiljan proizvođač pa i izvoznik žitarica. Na osnovu uzgrednih turskih podataka saznajemo, na primer, da su 1573. godine iz Niša stigla dva tovarena broda sa žitom u Budim, da ušur na pšenicu u Nišu već krajem XV stoleća (1498.) nije bio beznačajan (140 lukna od hrišćana i 31 lukno od muslimana), da je iz Smedereva u Budim 1571. godine stiglo 28 a dve godine kasnije 12 teretnih brodova žitarica, da su i ranijih godina transporti prema severu obično bili predstavljali poljoprivredne proizvode, počevši još od 1516. godine, kad je donesen zakon o smederevskoj skeli i sl.<sup>18</sup> Čak su i Dubrovčani pokušavali da u vreme gladnih godina uvoze žito iz smederevskog kraja.<sup>19</sup> I Beograd i Smederevo imali su velika slagališta državne hrane.<sup>20</sup> Austrijski putopisac Prandšteter, na primer, zapisao je 14 jula 1608 u okolini Beograda sledeće: „Ovaj kraj ima vrlo plodno zemljište i prilično dobro je obrađen, i već onda je ležalo žito pokošeno u polju.“<sup>21</sup>

#### 4. ORIZIŠTA U SRBIJI I BUGARSKOJ PREMA PUTNICIMA SA ZAPADA U XVI VEKU

Dolaskom Turaka na Balkan veoma se raširila kultura pirinča. Najpre odomaćena u Trakiji, Makedoniji i dolini Marice, orizišta su se širila na sever, po močvarama uz reke. Putopisci su najsevernija pirinčana polja za-

<sup>14</sup> Rad 71. 1, белешка.

<sup>15</sup> Rad 124, 79 (Паоло Контарини, 1580.). — У Пљевљима се помиње и добар хлеб (*Starine X*, 207, Катарин Зан, 1550.).

<sup>16</sup> Dernašwat, 48; Влаинац, 29.

<sup>17</sup> Dernašwat, 8 и 48; Влаинац, 11 и 19. — Вид. и: *Starine XXII*, 181, Rad 100, 132 (М. А. Пигафета). — Пogaча без квасца забележена је и у Триној Луци у Херцеговини (М. Ј. Динић, н. н. 98 (ф. Дифрен-Кане, 1573)).

<sup>18</sup> Олга Зиројевић, Цариградски друм од Београда до Софије, докторска теза брањена на Филозофском факултету у Београду 1967. године (рукопис), стр. 157, 220, 147—50. — У закону за смедеревско пристаниште из првих година владе Сулејмана Законодавца говори се о довозу хране из унутрашњости у Смедерево Дунавом (Н. Надџибегих, *Kanun-nama sultana Sulejmana Zakonodavca iz prvih godina njegove vladavine*, *Glasnik Zemaljskog muzeja IV—V* н. с., Сарајево 1950, 326.

<sup>19</sup> Б. Храбак, *Београд као живио иржииије и жијарсјиво шире београдске околине у XVI веку, Годишњак града Београда IV* (1957), 61—4.

<sup>20</sup> Ј. Богичевић, *Путовање царскога послансјива у Цариград 1608, Гласник Историјској друштва у Новом Саду*, књ. IV, св. 3, Нови Сад 1931, 442.

<sup>21</sup> Као нап. 19/III, 67 — 8; Dernašwat, 262 и Влаинац, 46 — 7; У. Богичевић, н. н. 445 (дрвени амбари поред реке) — Вид. и М. Ј. Динић, *Жијарица, једна београдска кула која није постојала, Историјски часопис V*, Београд 1955, 79—80.

beležili 60-ih i 70-ih godina XVI veka u dolini Južne i Velike Morave. Piga-feta je orizišta 1567. godine pomenuo između Jagodine i Aleksinca i kod same Jagodine.<sup>1</sup> Jagodinska orizišta jedan je putnik sa Zapada (1571.) ovako opisao: ravna polja se još više poravnaju, te se ispresecaju malim kanalima, kako bi riža uvek bila navodnjena, jer ona samo pod vodom raste.<sup>2</sup>

Južnije, pirinač je uspevao oko Niša. Orizišta u Novom Selu kraj Niša prvi je zabeležio carski kurir Becek (decembra 1564.)<sup>3</sup> a potom Štefan Gerlah (jun 1578.).<sup>4</sup> U dolini Nišave Paolo Kontarini (1580.) je video kola koja su vozila pirinač u Ugarsku.<sup>5</sup> To je bila hrana iz Bugarske, koje je bilo već u sofijskom polju,<sup>6</sup> pa u gornjem toku Marice između Vetrena i Tatar-pazardžika (gde su Turci u XV veku preneli kulture riže iz Egipta)<sup>7</sup>, kraj Plovdiva<sup>8</sup>, kod Konjuša<sup>9</sup>, i kod Mustafa-paše. Ovo poslednje orizište Buzbek je opisao na sledeći način: „To je velika močvarna, podvodna livada, na koju se mora ovda-onda navraćati voda. A na takvim mestima obično i raste pirinač. I na putu od Plovdiva ka Vakerelu bilo je u dolini velikih pirinčanih polja, u koja je cele godine morao da se pušta veliki potočić (voda), kako bi sav pirinač stajao u vodi.”<sup>10</sup>

Zanimljiv je podatak DERNŠVAMA da u Turskoj nije svako smeo da seje pirinač, nego da se setva obavljala samo na onim mestima, kojima je to sultan odobrio.<sup>11</sup> Zapadni putopisci ne spominju radionice za ljuštenje pirinča po gradovima.

Turski podaci potvrđuju da je proizvodnja pirinča bila u Srbiji u XVI veku značajna i da je on ne samo iz Bugarske nego i iz Niša i Pomoravlja kolima transportovan u Beograd i dalje za Ugarsku. Iz godine 1584. na primer, zabeležene su znatne svote novca koji je dat za prevoz carskog pirinča iz Srbije za Beograd (iz Niša 33 kola, iz Paraćina 50, iz sela Grabovce u Resavi 66 kola, a potom još u dva navrata). Na osnovu visine dažbina, može se zaključiti da je pirinač još krajem XV veka (1498.) donosio u Nišu najveći ušur (400 akči od muslimana i 21.330 od hrišćana) i da je tu ostao najakumulativnija kultura i, recimo, 1576. godine (ušur: 612 akča od muslimana i 36.780 od hrišćana).<sup>12</sup>

<sup>1</sup> *Starine* XXII, 180; *Rad* 100, 131, 135—6.

<sup>2</sup> *Rad* 112, 175 (К. Рим). — Равно поље са много пиринча на Морави забележио је годину дана касније путописац посланства Давида Унгнада (*Rad* 112, 117).

<sup>3</sup> *Rad* 84, 86 и 89.

<sup>4</sup> *Rad* 116, 50.

<sup>5</sup> *Rad* 124, 84.

<sup>6</sup> *Rad* 56, 219 (Рамберти, 1534.); Ив. Шишманов, н. н., 404; М. Ј. Динић, н. н. 117 (Пјер Лескалопје, март 1574.)

<sup>7</sup> В. Курипешић, 39; Матковић, *Dva talijanska putopisca*, 212.

<sup>8</sup> *Rad* 62, 110 (Катарин Зен, 1550.); *Lettres du baron de Busbec I*, Paris 1748, 71. — Катарин Зен је забележио да су се оризишта крај Пловдива натапала водом из рукава реке Марице и то интензивније поред саме вароши (106).

<sup>9</sup> DERNSCHWAM, 22; Влаинац, 18.

<sup>10</sup> DERNSCHWAM, 247 и 251; Влаинац, 38—9. — Према наводима једног пловдивског Дубровчанина (фебруар 1573) султан је од пиринча пловдивског краја добијао 190 товара акчи годишњег прихода (М. Ј. Динић, н. н., 104).

<sup>11</sup> DERNSCHWAM, 128; Влаинац, 39. — О султановим одредбама јасацијама у одређеним македонским и тракијским сандџацима из друге половине XV века вид.: N. Beldiceanu, *Les actes des premiers sultans conservés dans les manuscrits tures de la Bibliothèque Nationale à Paris I*, Paris — La Haye 1960, 139—41.

<sup>12</sup> О. Зиројевић, Цариградски друм, 47, 49, 219, 224.



## 6. VINOGRADI I VINA U JUŽNOSLOVENSKIM ZEMLJAMA POD TURCIMA U XVI Veku

Južnoslovenske zemlje i pre pada pod tursku vlast imale su razvijeno vinogradarstvo. To je najbolje opazio poznati privredni stručnjak Hans Dernšvam, koji na više mesta u svojoj putopisnoj knjizi beleži zapuštene vinograde. Dolaskom Turaka možda je zapačena nova vrsta loze kakve nije bilo u tadašnjoj Evropi. O tome ima kod Dernšvama sledeće: Vinogradi u Turskoj obrađivani su drukčije nego u Evropi. Na nekim mestima videli su lozu uspravljenu uz veliko drveće, osobito po vrtovima. Inače po ravnim mestima čokoće je sađeno jedno za drugim u tako široke redove, da su seljaci mogli između njih orati plugom. To je bila njihova motika. Na neravnim mestima, naprotiv, sađeno je bez reda. Ali ni u takvim vinogradima nije okopavano motikom, već jakim gvozdanim vilama sa dva zupca (roga), kojima razrivaju zemlju pored čokoća. Pritaka (kolja) po vinogradima nije bilo u celoj Turskoj, jer se nije imalo dovoljno drva za to, niti je bilo dobro kvariti zbog vinograda mnoge dobre šume, kao što je činjeno u Austriji.<sup>1</sup>

O vinogradima Bosne B. Kuripešić (1530.) zapisao je: „Vinova loza rasla je na mnogo mjesta, a sada se sadi samo oko Višegrada i Novog Pazara. Govore da je ima prema moru i u pravcu prema Savi i Dunavu, gde su velike ravnice i zemlja dobro obrađena.”<sup>2</sup> U poslednjim decenijama XVI veka na području bosanskog beglerbegluka postojao je unutrašnji promet dobrim vrstama vina. Tako, Paolo Kontarini (1580.) je našao dobrog ali skupnog vina sa Neretva u Prijepolju. I kaluđeri Mileševa izvlačili su znatan prihod od vina.<sup>3</sup>

Dobro vino putopisci spominju i u Toplici, gde je loza rasla po brdskim padinama.<sup>4</sup> Pojedinačno, dobrog vina je bilo i na Kosovu.<sup>5</sup>

Smederevski kraj bio je čuven po vinu i u XVI veku. U lepoj i plodnoj ravnici oko Smedereva prostirali su se vinogradi „da se prijatnije ne može poželeti”. Dernšvam je i na terenima južno od grada ustanovio da je ranije bilo vinograda. Njih je bilo i u pravcu Beograda, pored Dunava, jer isti putopisac veli da Smederevo nisu mogli ugledati pre nego što su prošli vinograde. Zbog toga je prirodno da je tu bilo vino dobro i jevtino, uostalom kao i u Beogradu, gde se svakako točilo i vino smederevskog vinograda.<sup>6</sup> Jevtino vino u Smederevu zabeležio je i Štefan Gerlah (1573.), koji je bio i svedok jedne julske proveale oblaka, kad je grad tako satro smederevske vinograde, da im se na izvesnim mestima nije videlo ni gde su rasli.<sup>7</sup>

<sup>1</sup> Dernschwam, 106; Вланица, 24.

<sup>2</sup> B. Kuripešić, n. d., 31.

<sup>3</sup> Rad 124, 65. — Тридесет година раније Катарин Зен је у Пљевљима био послужен добрим вином (Starine X, 207).

<sup>4</sup> Rad 56, 214 (Рамберти, 1534.); Rad 112, 176 (К. Рим, 1572).

<sup>5</sup> Р. Самарцић, н. д., 129 (Ф. Дифрен—Кане 1573.). — Турски документи указују да је винограда било доста и у лесковачком крају (М. Васић, н. н., 53).

<sup>6</sup> Dernschwam, 260, 5, 161, 263; Вланица, 45, 8, 46, 47. — О виноградиима код Смедерева вид. и: Rad 71, 20 (август 1553.). — О виноградиима са воћкама северно од Београда уз Дунав вид.: Вл. Поповић, н. н. 98 (Р. Бартон, 1596.)

<sup>7</sup> Rad 116, 53.



U Pomoravlju Dernšvam je dosta dobro i jevtino vino zabeležio na putu između sela Livade i Jagodine.<sup>8</sup> Brežuljci oko niške ravnice bili su pokriveni vinogradima, koji, prema Paulu Kontariniju (1580.) bili bi još rodniiji kad bi bili bolje obrađeni.<sup>9</sup> Dernšvam je samo na nekim mestima mogao razaznati vinograde,<sup>10</sup> dok je Štefan Gerlah video vinograde koji rađaju.<sup>11</sup> Ove podatke o vinogradarstvu Niša potvrđuju turski testerski podaci, koji još za 1498. godinu navode da se u niškom ataru obrađivalo 220 duluma vinograda, koji su davali samo kad je reč o hrišćanima 458 medri vina ili 8.064 akči; u popisu iz 1516. godine broj vinograda muslimana se smanjio i iznosio je 175 duluma, ali su vinogradi hrišćana uvećani te su doprinosili 9.419 akči ušura (odnosno 533 medre). U drugoj polovini XVI veka došlo je do izvesnog zapuštanja niškog vinogradarstva, jer popis iz vremena sultana Murata III navodi samo 146 duluma vinograda. Loza se u privredi Niša nalazila na drugom mestu, odmah iza pirinča.<sup>12</sup> Vино se iz Niša izvozilo na susedna, veća tržišta. Tako, Dernšvam (jul 1555.) je sreo jedanaest kola sa dugačkim velikim buradima vina koje su Bugari kupili u Nišu te vozili u Sofiju. Iz Niša u Sofiju i dalje vozilo se preko cele godine vino koje je pripadalo sultanovom desetku.<sup>13</sup>

U dolini Nišave istočno od Niša bilo je dosta vinograda, no oni su po evropskim kriterijama Dernšvama bili rđavo obrađeni; Dernšvam je pretpostavljao da su tu ranije bili sve sami vinogradi.<sup>14</sup> On je zatekao i oko Caribroda „dosta vinograda, koje su Bugari još obrađivali, ali je najveći deo bio pust, dok su prede na brežuljcima bili sve samo vinogradi”.<sup>15</sup> Kroz vinograde s obe strane druma putovao je on i na deonici između Caribroda i Sofije.<sup>16</sup> Pobrđe sa severne strane Pirota bilo je pokriveno vinogradima.<sup>17</sup> Na brežuljcima oko sofijjskog polja našao je vinograde Ramberti (1534.).<sup>18</sup> Mlado crno vino (oktobra 1550.) probao je u jednom od sela ove visoravni i Katarin Zen.<sup>19</sup> Brdašca oko sela Belice, na zapadnom kraju sofijjskog polja, bila su zarasla u lozu i 1571. godine.<sup>20</sup>

Vinograda je bilo i podalje po izlasku iz sofijjskog polja prema jugoistoku, tj. oko Vetrena<sup>21</sup> i dalje kod mesta Papasli.<sup>22</sup> Plovdiv je davao sultanu 150 tovara akči prihoda od vina.<sup>22a</sup> Njih pominje Dernšvam tek kod mesta Mustafa-paše, gde je njegov putnički karavan prenoćio u jednom pustom

<sup>8</sup> Dernschwam, 260; Влаинац, 45.

<sup>9</sup> Rad 124, 67.

<sup>10</sup> Dernschwam, 128; Влаинац, 39.

<sup>11</sup> Rad 116, 51.

<sup>12</sup> О. Зиројевић, Цариградски друм, 220.

<sup>13</sup> Dernschwam, 254 и 256; Влаинац, 41 и 42.

<sup>14</sup> Dernschwam, 256; Влаинац, 43.

<sup>15</sup> Dernschwam, 256; Влаинац, 42.

<sup>16</sup> Dernschwam, 255; Влаинац, 41.

<sup>17</sup> Rad 116, 49 (Шт. Герлах, јун 1578.); Шишманов, н. н., 413 (код Пирота), 439 (М. Безолт, 1584. о вину бугарских сељака код Куручешме).

<sup>18</sup> Rad 56, 219.

<sup>19</sup> Rad 62, 122.

<sup>20</sup> Rad 112, 177 (К. Рым); М. Ј. Динић, н. н., 117 (П. Лескалопје, март 1574.).

<sup>21</sup> Rad 116, 43 (Штефан Герлах, јун 1578.).

<sup>22</sup> Исто, 39.

<sup>22a</sup> М. Ј. Динић, н. н. 104 (Ф. Дифреј - Кане, март 1573.)

vinogradu.<sup>23</sup> Mnogo vinograda go brežuljcima i u ravnici bilo je tek pred Drinopoljem.<sup>24</sup> Dernšvam je dao uopšteno mišljenje da u Bugarskoj izgleda da je ranije bilo svuda vinograda, ali da su oni pod Turcima bili zarasli i pretvorili se u pustare, uostalom kao što su i ostala polja bila loše obrađena.<sup>25</sup>

Dernšvam je sastavio čitavu malu raspravicu o vinu i balkanskim zemljama pod Turcima. On je, najpre, obratio pažnju na proizvodni postupak, te naveo: Pri berbi vinograda grožđe je bacano u dugačke duboke sudove, sastavljene od dasaka. Kad je u njih složen jedan sloj grožđa, posipan je taprak, zatim se opet slagao red grožđa, pa posle tarpak, i tako redom do vrha. Tako složeno grožđe ostavljano je da provri, pa je čisto vino točeno za desetak sultanu, a ostatkom su rasprolagali siroti ljudi. Toprak je zemlja, kao kreč, koja se kopa i kojom se varoški zidovi i kuće zidaju. Takav kreč prodavan je u Carigradu po dućanima. Taj kreč stavljan je zato, da bi vino ostalo postojanim a neljigavim, i da bi dobilo lepu boju. Iako je grožđe bilo belo ili crnkasto, vino je ispadalo ipak crno, a ne belo kao u Beču. Retko su se mogla naći bela vina, ako bi se i dvaput skuplje htelo platiti, niti se moglo kupiti sveže, prijatno vino, već je prodavano sladunjavo i jako, koje je palilo i škodilo kad se pije. U stakletu su, međutim, vina bila tako rumena i sveža, da su izgledala kao da gore. Takvo stanje počinjalo je otprilike još od Beograda. Zato su ta vina imala neki čudan, neugodan ukus, koji je ponekome padao teško. Naročito se osećalo neprijatan ukus na zemlju ili kreč, ma koliko da su baš zbog toga možda vina dobra i postojana kao i u celoj Ugarskoj i drugim zemljama, koje su imale dovoljno dobrih vina pre no što su podjarmljeni. Nekad su u sremskoj episkopiji bila najplemenitija vina, slična nektaru. Međutim, tada se vinogradi nisu mogli orezati ni pravilno negovati, niti se moglo imati više dobro posuđe. Zato vina i nisu više imala onakav prijatan miris i ukus kao nekad. Iako su u celoj Turskoj skoro sva vina bila crna, izuzetno, u Bugarskoj su se mogla naći i bela vina. Zbog farbanja vina su bila toliko gusta, da nisu mogla proticati kroz stoni pokrivač, niti su mogla ispariti. Bojenje se obavljalo pomoću ploda od aptuše, koja je rasla svuda po selima. On se izgnjavi i ostavi da prevri, te kad dođe vreme, iscedi se sok, pa se prodaje krčmarima koji njime u crno boje vino. I po selima i u varošima vino je držano u kamenim vedrima, iz kojih je ono crpljeno krčagom ili bocom. Da vino ne bi izgubilo miris i da bi bilo postojano, u njega je nalivano i ulje. Vino ni u Carigradu nije držano u podrumima, već je čuvano u prizemlju po kućama. Zato su vina morala uskišnjavati i gubiti boju. U nekim vinima osećali su se rakija, slatko i med, i takva su vina Turci rado pili. Grci i Jevreji pili su vino koje su sami spravljali.<sup>26</sup>

Dernšvam je zabeležio i to da su putnici u Nišu, Plovdivu i Drinopolju dobijali sveža vina, dok su u ostalim mestima spravljana teška vina. S obzirom da su u Nišu i sveža vina bila kisela, on je izrazio mišljenje da kiselost,

<sup>23</sup> Dernschwam, 18.; Влаицац, 18.

<sup>24</sup> Rad 116, 34 (Штефан Герлах, јун 1578.; ту је вино било изврсно, „љупко као мушкат“); Rad 124, 45—6 (Б. Соранцо, 1575).

<sup>25</sup> Dernschwam, 247; Влаицац, 38.

<sup>26</sup> Dernschwam, 101—105; Влаицац, 24—5. — Дерншвамове и Герлахове наводе о винарству цитира познати савремени бугарски привредни хисторичар Жак Натан (*Стойанска историја на Бугарија*, Софија 1957, 109).



nastaje zbog toga što se vinogradi, zbog pritiska od Turaka, nisu mogla pravilno obrađivati, tj. da su oni samo jednom obrađivani i da izgleda u njima više ništa nije rađeno.<sup>27</sup> Sami Turci nisu proizvodili vino, nego su svoje vinograde davali pod zakup Grcima i Jevrejima, koji su brali i cedili grožđe pa vino dovlačili u gradove i tu ga prodavali. Vina Jevreja bila su bolja, jer nisu, kao u Grka, bila „krštena” dolivanjem vode.<sup>28</sup> Od seljaka se ponekad zahtevalo da, kao i u slučaju žita, sultanov desetak sami predaju i krčme, kako bi ga unovčili.<sup>29</sup>

O bugarskim vinima u XVI veku pisao je Namac Bezolt; on i njegovi saputnici pili su malo dobrog vina, i to ne zato što zemlja za lozu nije bila pogodna ili što je loza bila loše sorte, nego zato što se vino nije držalo u prostorijama kako ono to traži; vino se, naime, nije držalo u podrumima, nego u velikim sudovima i čabrima po kolibama, stajama pa i kućama, a bilo je pokriveno samo lišćem od loze.<sup>30</sup>

Ako su zbog vere izbegavali da piju vino, Turci se nisu odricali rakije komovice. Rakiju koja se pekla od piva ili medovine dovozili su iz Poljske i Rusije.<sup>31</sup> Grožđe su Turci na razne načine ukuvavali, na primer sa medom, praveći kao Grci neku vrstu slatka (*mellicratum*), što su preko cele godine čuvali u kamenim ili zemljanim krčazima.<sup>32</sup>

#### 6. GAJENJE VOĆA I POVRĆA U VOĆNJACIMA PORED GRADSKIH NASELJA I U VRTOVIMA I BAŠTAMA UZ KUĆE PO VAROŠIMA

U južnoslovenskim zemljama dolaskom Turaka mnogo se više negovalo voće i sejalo povrće nego ranije, jer su Turci i voću i povrću obraćali posebnu pažnju, tako da su im se gradska naselja sastojala od kuća okruženih baštama, voćnjacima, bostanom i ružičnjacima, sa stalnom pritokom vode. Takva gradska naselja postaće već u XVI stoleću karakteristična za Bugarsku i Bosnu, dok će se ona, izuzev Beograda, nešto kasnije javiti u Srbiji.

Francuz Filip Difren-Kane (1573.) zabeležio je u Čajniču izvrsne kruške (*di bergamotte*) a u Kosovskoj Mitrovici „neverovatno obilje voća”.<sup>1</sup> Po više srednjeevropskim običaju, u smederevsko kraju izmešano sa vinogradima javljali su se voćnjaci i bostan,<sup>2</sup> što je bio slučaj i dalje dolinom Nišave prema Pirotu i u samom Pirotu.<sup>4</sup> Vrtova, vinograda i drugih nasada bilo je na Carigradskom drumu 1533. godine između Mustafa-paše i Drino-

<sup>27</sup> Dernschwam, 257—58; Влаинац, 43.

<sup>28</sup> Dernschwam, 101 и 23; Влаинац, 24 и 23.

<sup>29</sup> Dernschwam, 255; Влаинац, 41—42.

<sup>30</sup> Ив. Шишманов, н. н., 404. — Дубровчани су у Дринопољу имали врло доброг вина из „Мезије“ (М. Ј. Динић, н. н. 105 — Ф. Дифреј - Кане, 1573.)

<sup>31</sup> Dernschwam, 105.; Влаинац, 24.

<sup>32</sup> Dernschwam, 101; Влаинац, 24.

<sup>1</sup> Р. Самарџић, н. д., 128 и 129.

<sup>2</sup> Rad 71, 20.

<sup>3</sup> О. Зиројевић, Цариградски друм, 220.

<sup>4</sup> Rad 116, 49 (Штефан Герлах, 1578).

polja.<sup>5</sup> Drinopolj je takođe bio okružen voćnjacima i vinogradima.<sup>6</sup> Oko Siderokapse, na južnom rubu Makedonije, oko varoši nalazili su se uzorni vrtovi i vinogradi.<sup>7</sup>

Varoši u Bugarskoj već su u XVI veku imali izgled orijentalnih gradova, sa vrtovima oko kuća. To je izričito napomenuto za Čustendil (1575.).<sup>8</sup> Plovdiv je bio „ispremešan” i zapremao je veliki prostor zbog vrtova;<sup>9</sup> u Plovdivu, međutim, neki putnici (1554.) nisu našli, dobrog voća.<sup>10</sup> U Tatar-pazardžiku bilo je (1550.) belih šljiva i predobrih krušaka.<sup>11</sup> U mestu Stipoli, jugoistočno od Vetrena, velika stabla po dvorištima kuća činila su gustu hladovinu.<sup>12</sup>

Takav tip naselja odomaćio se pre sredine XVI stoleća i u Bosni i Novopazarskom sandžaku; Katarin Zen, je, zato, za Sarajevo mogao zapisati da je varoš puna vrtova i dobrih voćnjaka, da Sarajevo nadmašuje Padovu lepotom vrtova i da se u tom pogledu Novi Pazar ne može meriti sa Sarajevom.<sup>13</sup>

U Beogradu su se ubavi vrtovi nalazili i izvan varoši i u njoj samoj. U pogledu vrtova Budim se nije mogao takmičiti sa Beogradom.<sup>14</sup> U pogledu smeštaja vrtova Beogradu je bio sličan Paraćin, koji je na Gerlaha učinio utisak otmenog i prostranog naselja sa lepim baštama i vrtovima oko naselja.<sup>15</sup>

## 7. OSTALE POLJOPRIVREDNE KULTURE, ĐUBRENJE I NATAPANJE POLJA

Od ostalih poljoprivrednih kultura zapadni putopisci su zabeležili: sezam (kod Konjuša u dolini Marice, 1553.), čije se slatko i bistro ulje upotrebljavalo u svim jelima (za salate, za prženje ribe, umesto masla i sl.) a kao semenje za posipanje kolača<sup>1</sup>, te mak i konoplju, koji su se, pored ostalog, upotrebljavali i kao sredstva za drogiranje.<sup>2</sup> Turci su veoma mnogo voleli cveće, te su ga krajnjom brigom gajili; postojala su čitava polja aromatičnog bilja, koje je baron Buzbek video kod Uskudara,<sup>3</sup> s istočne strane

<sup>5</sup> Rad 62, 50 (К. Д. Шепер, 1533.).

<sup>6</sup> Rad 116, 34 (Штефан Герлах, 1570.); Rad 62, 73 (Жан Шене, 1550.), 114 (Катарин Зен, 1550.: баште и вртови).

<sup>7</sup> Rad 62, 80 (П. Белон, 1550.).

<sup>8</sup> Rad 124, 41 (Т. Соранцо).

<sup>9</sup> A. Verancsics, н. д. I; Rad 71, 40.

<sup>10</sup> Dernschwam, 126—7, Влаинац, 30.

<sup>11</sup> Rad 62, 106 (Катерин Зен).

<sup>12</sup> Rad 124, 86 (Паоло Контарини).

<sup>13</sup> Starine X, 206 (Сарајево), 208 (Нови Пазар); Rad 62, 95 (Сарајево), 98—55 (Нови Пазар).

<sup>14</sup> Rad 116, 15 (Штефан Герлах). — Аустриски путописац Прандштетер (1608.) за Београд је забележио: „скоро свака кућа има врт“. Он ту помиње потрошњу бресака и кајсија као stolног воћа (Ј. Богичевић, н. н. 445 и књ. V, св. 1 (1932), 67

<sup>15</sup> Rad 116, 51.

<sup>1</sup> Dernschwam, 22; Влаинац, 18.

<sup>2</sup> Dernschwam, 54 и 105; Влаинац, 26.

<sup>3</sup> Lettres du baron de Busbec I, 74.



Bosfora, a drugi putopisci, na primer, u Toplici.<sup>4</sup> Po seoskim baštama držan je i dud, čijim su se lišćem hranile svilene bube.<sup>5</sup> Zanimljivo je da putnici sa Zapada nigde nisu zapazili pamuk i duvan.

Zemlja se, prema zapisu Dernšvama, nije dubrila, i to zbog lenosti Turaka i ostalog življa.<sup>6</sup>

Tamo gde nije bilo žive vode, kopali su se bunari, te voda čekrtom izvlačila.<sup>7</sup> Dernšvam je na putu iz Drinopolja ka Mustafa-paši video da se bašte navodnjavaju „vodenim točkom”.<sup>8</sup> Zalivanje vodom iz rukavaca reka primenjivalo se već u XV veku, na primer u Makedoniji.<sup>9</sup>

#### 8. ŠIRENJE ŠUMA UZ DRUMOVE U SLOVENSKIM ZEMLJAMA BALKANA TOKOM XVI VEKA

U južnoslovenskim zemljama u XVI veku bilo je dosta šume, i na visinskim terenima pa i kraj drumova. Na njihovu pojavu u to vreme još se ne može gledati kao na elemenat privredne zapuštenosti, kao u XVII i naročito ponegde u XVIII veku, iako je tendencija širenja šume nesumnjivo postojala već u XVI veku ne samo na Balkanu nego i u turskom delu Pannonije. Šume je, naime, svuda tada bilo mnogo više nego kasnije. Nje je, bez sumnje, na većini terena mnogo ostalo i iz prethodnog period, za koji samo za pojedine oblasti znamo da je imao intenzivniju poljoprivredu. Takvo relativno stanje potvrđuje, uostalom, nejednaka prisutnost u svim južnoslovenskim zemljama u XVI veku.

Bosna je spadala u jednu od najšumovitijih zemalja na Balkanu u XVI veku, kakva je situacija za najveći deo zemlje nasleđena iz prethodnog perioda. Za Donju Bosnu (tj. za kraj od Vrhbosne do Une), koju su Turci najkasnije zauzeli, B. Kuripešić je rekao da je „vrlo brdovita, ima na sve strane velike šume i, izuzev malo mjesta, slabo je obrađena, osobito na granici, zbog toga što je Hrvati i drugi često plijene”; dok je bila u hrišćanskim rukama, vlasti nisu dozvoljavale da se zemlja obrađuje, no kad su Osmanlije osvojile Jajce, veliki deo Donje Bosne, koji je dugo ležao neobrađen, počeo je da se obrađuje.<sup>1</sup> Šumske komplekse zapazili su putnici i u jugozapadnoj Bosni. Katarin Zen (1550.) piše o vrlo velikoj šumi hrastova, bukve i bora između Livna i Kupresa (*monte di Ploz*) a o šumi između Kupresa i Prusca (šumom obrasla gora *Soluz*) i potom o dugačkoj šumi na drumu

<sup>4</sup> Rad 62, 99 (Катарин Зен, 1550.)

<sup>5</sup> Dernschwam, 20; Влаинац, 17 (село Говедарево, југоисточно од Софије, 1553.).

<sup>6</sup> Dernschwam, 254—55 и 13; Влаинац, 41 и 14 (за терен на путу Цариград — Софија и за терен око Цариграда).

<sup>7</sup> Rad 84, 69 (североисточна Македонија, безимени италијански путописац, 1553.) 175 (Коњуш у Румелији); Rad 124, 44 (западно од Пловдива, Ђ. Соранцо, 1575.), 45 (источно од Пловдива), 46 (пред Дринопољем); О. Зиројевић, Цариградски друм, 57 (Пирот и Алексинац).

<sup>8</sup> Dernschwam, 247; Влаинац, 39.

<sup>9</sup> Н. Шабановић, *Krajište Isa-bega Ishakovića. Zbirni katastarski popis iz 1455. godine*, Сарајево 1964, 100.

<sup>1</sup> В. Курипешић, н. д., 21.

od reke Lašve prema rečici Penici.<sup>2</sup> Četvrt veka kasnije (1574.) dva domaća fratra ostavila su zapis o Bukovoj Gori, vrlo dugoj i širokoj nekoliko milja, sa veoma visokim stablima kod Bugojna, o planini Šujici, obraslom jelovom drvećem i Crnom Lugu kod Livna, tj. šumi visokih stabala, koja je upola bila u plitkom jezeru, koje su činile kiše kad nadodu, (voda je bila uzrok da je kora drveća bila stalno crna.)<sup>3</sup> Šume sa vrlo lepim drvećem je bilo i dalje na putu od Lašve ka Sarajevu, obično iznad dolina i polja.<sup>4</sup> Onaj putopisac (Katarin Zen, 1550.) koji je inače lepim bojama opisao Bosnu, naveo je šumu i kod Kovača,<sup>5</sup> na putu iz Sarajeva na istok. U to vreme (1548.) i Francuz Žak Gaso pisao je za deonicu puta od Foče ka reci Uvcu: „Onda smo prošli kroz šume veoma opasne, zbog razbojnika, gde stalno ima seljaka, koji su izuzeti od svih davanja, a koji su obavezni da ceo dan stražare i idu šumom, motreći ima li tu razbojnika.”<sup>6</sup>

Za Hercegovinu Mlečanin Paolo Kontarini (1580.) zabeležio je vrlo lepu šumu visokih bukava (od kojih se prave vesla!) kod Trnove Luke, ispred Tjentišta; šume je bilo svuda naokolo Tjentišta, čije su vrleti bile pune jela.<sup>7</sup> U XVII veku i po nešto ravnijim terenima u Hercegovini, izbila je šuma.

Oblast Novopazarskog sandžaka, iako je je od druge polovine i u XVII veku pokazivala znake prosperiteta i naseljenosti, imala je tokom XVI stoleća dosta šume. Jedan putnik je 1533. godine pomenuo šumu na putu Foča—Pljevlja i oko Mileševa.<sup>8</sup> Kuripešić u isto vreme (1530.) naveo je lokalitet Brezovo Brdo (između Sjenice i Novog Bazara),<sup>9</sup> koji bi ukazivao na postojanje brezove šume. Pola stoleća kasnije jedan mletački bail iz Carigrada video je šume na gorovitim terenima između Mileševa i Pljevalja, („Zvijezda”) i jelovu šumu kojom je potpuno zarasla gora neposredno iznad pljevaljskog polja, s njegove istočne strane.<sup>10</sup>

Šumoviti, divlji i neobrađeni predeli prostirali su se i na istočnoj padini Kopaonika ka Toplici. Mlečanin Paolo Kontarini (1580.) spoznao je dve Toplice: pored one ravne i žitorodne postojala je i jedna šumovita, hajdučka. Hrastove šume pokrivala su brežuljke, no senoviti stabala bilo je i u istom delu Toplice, koja se prostirala prema Moravi. Šume je, prirodno, bilo više u zapadnom delu Toplice i u kraju ka Kopaoniku.<sup>11</sup> Šume u gorovitom predelu iznad doline u gornjem toku Toplice pominje 1550. i jedan drugi Mlečanin.<sup>12</sup>

U Srbiji od Beograda i Pomoravljem, oko Carigradskog drumu, postojala je već u XVI veku tendencija da šume osvajaju neobrađene komplekse. Sama šuma prostirala se (1587.) uz cestu na deonici od Grocke do Smede-

<sup>2</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 205; Rad 63, 91 и 92.

<sup>3</sup> F. Rački, *Prilozi za geografsko-statistički opis*, 192 и 193; Rad 124, 8 и 9.

<sup>4</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 205, и 206.

<sup>5</sup> Rad 62, 125.

<sup>6</sup> P. Самарцић, н. д., 114.

<sup>7</sup> Rad 124, 63.

<sup>8</sup> Rad 62, 61 и 59—60 (К. Д. Шепер).

<sup>9</sup> В. Курепешић, 28.

<sup>10</sup> Rad 124, 79, 64 (Паоло Контарини, 1580.).

<sup>11</sup> Исто, 66, 81, 67.

<sup>12</sup> Rad 62, 122 (Катарин Зен).



revske Palanke.<sup>13</sup> Nje je na taj način bilo i od Smedereva u pravcu Beograda i od sela Kolara ka Smederevu (1578.), odnosno i podalje na drumu kod današnje Smederevske Palanke.<sup>14</sup> Prema Dernšvamu, šuma u dolini Morave sredinom XVI veka počinjala je u većoj meri od Jagodine, iako je i severnije tada bilo neobrađenog zemljišta. Isto tako, i u bolje obrađenim predelima, na primer, južno od Jagodine, na mestima je bilo vrlo velikih šuma, pored kojih su se na drumu mogli videti i čuti čuvari sa bubnjevima, kao mera protiv hajduka. Velikog hrastovog drveća bilo je i po dvorištima zapuštenih sela.<sup>15</sup> Biskup Vrančić (1553.) takođe u svom putopisu pominje šumu: s obe strane drumu, severno i južno od sela Livade (između Smedereva i Jagodine) i kod sela Klisure (Derven) koja je bila na zlu glasu zbog hajdučkih zaseda.<sup>16</sup> Šuma se uvrežila i po brežuljcima između Jagodine i Batočine i rečice Lepenice.<sup>17</sup> Hajdučke šume postojale su severno i južno od Bovana (verovatno u današnjoj planini Bukoviku i Ozrenu).<sup>18</sup> Da bi se Carigradski drum obezbedio od širenja šume, kao i zbog hajduka, Turci su pojedinim selima nametali isključivu obavezu da seku drveća pored puta; to se činilo naročito pred vojne pohode.<sup>19</sup>

Na drumu istočno od Niša, na primer, na mestima na kojima se prostirala neka glinasta zemlja, javljali su se šumarci.<sup>20</sup> Velika šuma zvana Cero-vica nalazila se na planini Kukavici, poznatom hajdučkom gnjezdu iz narodnih pesma. Iza Suhe Klisure uzdizala se šuma zvana Suha Česma. Nešto istočnije jedna ravan, kroz koju je proticala Nišava imala je ime Žuta šuma. Stražu sa bubnjevima imala je i šuma „Gezovica“ ispred sofijskog polja.<sup>21</sup>

Šumâ je bilo i uz Carigradski drum, jugoistočno od Sofije i dolinom Marice. Jedna šumica se nalazila kod sela Vakarela (1530.).<sup>22</sup> I vletno sleme brežuljkaste visoravni, pre nego što se uđe u dolinu Marice, kod Vetrena, bilo je takođe šumovito.<sup>23</sup> Hrastove šume bilo je (1530.) jugoistočno od Tatar-pazardžika,<sup>24</sup> kod Klisure odnosno kod Kosteničke banje i kod Uzundžove.<sup>25</sup>

<sup>13</sup> Rad 116, 53 и 54 (Штефан Герлах, јул 1578.); Ив. Шишманов, н. н., 411; О. Зиројевић, *Рајнолд Лубену о Београду и Србији 1587, Годишњак града Београда* књ. XIII (1966), 56. — Герлах (1578.) је забележио да је то била храстова шума (Ч. Мијатовић, н. н., 204).

<sup>14</sup> Ч. Мијатовић, н. н., 208 и 210; Rad 116, 53—54 (Штефан Герлах).

<sup>15</sup> Dernschwam, 6, 258, 260; Влаинац, 8, 44, 45.

<sup>16</sup> A. Verancsics, н. д. I, 301, 303; Rad 71, 22—23.

<sup>17</sup> Starine XXII, 181 и Rad 100, 133 (Пигафета); Мијатовић, н. н., 204—5 (Штефан Герлах); Rad 116, 52 (Шт. Герлах).

<sup>18</sup> Rad 112, 217 (путовање Давида Унгнада), 221.

<sup>19</sup> О. Зиројевић, Цариградски друм, 31.

<sup>20</sup> Dernschwam, 256; Влаинац, 43. — Дерншвам на делу друма од Ниша до Софије не помиње праве шуме, него је за деоницу Цариброд — Софија чак запазио „да има мало дрва, која би се у села могла довлачити за потребу кувања, јер су брда била гола“ (Dernschwam, 255; Влаинац, 41).

<sup>21</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 209, 210; Rad 62, 101 (Катарин Зен, 1550.). — Вероватно се на ову шуму односи запис Жана Палерна Форазјена 1582. године (Р. Самарџић, н. д., 137).

<sup>22</sup> В. Курipešić, н. д., 38

<sup>23</sup> A. Verancsics, н. д., I, 319; Rad 71, 34—5

<sup>24</sup> Rad 124, 87 (Паоло Контарини, 1580.)

<sup>25</sup> В. Курipešić, н. д., 47 и 40

Polu stoleća kasnije šume je bilo na ravnici između Novog Sela i Tatarpazar-džika.<sup>26</sup> Sredinom XVI veka šumovit i neobrađen predeo nalazio se na putu Kajali—Semizče.<sup>27</sup> Šumovita je bila i Bukova gora severozapadno od Plovdiva, kao što se uz drum protezala i jedna šuma jugoistočno od Plovdiva.<sup>28</sup> Dolina Marice, pa i kraj severnije prema Sofiji, uz cestu, inače bila je bez drveća.<sup>29</sup> Šuma je, zatim, bilo severoistočno od Drinopolja, na putu od Mustafapašinog mosta i Harmanli.<sup>30</sup>

Prema spisu Feliksa Petančića (1502.) kraj od Samokova ka Kosteničkoj banji (u dolini Marice) takođe je bio šumovit.<sup>31</sup>

U Kačaničkom klancu i u okolini gospodarila je gusta šuma, a s njom i arbanaški hajduci (1573.).<sup>32</sup> Nešto južnije, i planinsko područje gornjeg toka Vardara obraslo je „vrlo pogibeljnom šumom”.<sup>33</sup> O ostalom delu Makedonije, za koju uopšte ima malo putopisačkih zabeležaka, hajdučka gusta šuma pominje se (1591.) na putu Ostrovo—Voden, ispred samog Vodena odnosno kod dervena Karakaja.<sup>34</sup>

O tome kako se sve šumsko drvo upotrebljavalo za privredne svrhe u putopisima nema vesti.

#### 9. UTVRĐIVANJE USLOVA ZA RAZVIJENO STOČARSTVO I INTENZIVNU TRGOVINU STOČARSKIH PROIZVODA

Balkanske zemlje pod Turcima bile su bogate rosnim livadama i dobrim pašnjacima. To je omogućavalo držanje velikog broja stoke i pčelarstva. Pored toga, zbog sve većeg vanekonomske pritiska na ratara, on se rado selio u planinu i odavao gajenju stoke, te imao ne samo veću ličnu slobodu, nego i znatno veću mogućnost bogaćenja, jer su se stočarski proizvodi tražili za izvoz od strane dubrovačkih, jevrejskih i drugih trgovaca. Ekonomska perspektiva seljaka pod Turcima mogla je za njega nastati samo preko stočarstva. To je i bio razlog da je stočarstvo tokom XVI veka sve više preovladavalo a da se ziratna zemlja pretvarala u livade.

O livadama i pašnjacima ima više podataka kod putopisaca. O Gornjoj Bosni (od Vrhbosne do Ibra) Kuripešić je (1530.) zapazio: „Prvo, Gornja Bosna nije tako divlja i gorovita kao Donja Bosna. Ona ima dugih pašnjaka

<sup>26</sup> Rad 124, 86 (Паоло Контарини, 1580.)

<sup>27</sup> Rad 62, 110 (Катарин Зен, 1550.); Rad 84; *Starine* X (безимени италијански путописац, 1559.)

<sup>28</sup> Rad 62, (К. Д. Шепер, 1533.); *Starine* XXII, 175; Rad 100, 117 (Пигафера, 1567.); Rad 84, 95 (Бецек, 1564.).

<sup>29</sup> Rad 56, 222 (Рамберти, 1534. за крај око Вакарела); Rad 62, 106 (Катарин Зен, 1550.); Rad 84, 70 и 75 (безимени италијански путописац, 1559.); Rad 124, 87 (Паоло Контарини).

<sup>30</sup> A. Verancsics, н. д. I, 327; Rad 71, 44.

<sup>31</sup> Л. Кнiewald, н. н., 37.

<sup>32</sup> Р. Самарцић, н. д., 129 (Ф. Дифрен - Кане)

<sup>33</sup> *Starine* X; Rad 84, (безимени италијански путописац, 1559.).

<sup>34</sup> Rad 136, 32 и 41.



i visoravni opasanih golim brdima.”<sup>1</sup> Velika travna visoravan Sjenice donosila je, pola stoleća kasnije, veliki dohodak carigradskom bostandži-paši. U to vreme su i Hercegovci držali brojnu stoku, naročito koze. Vrlo ubavi pašnjaci mogli su se videti i na istoj padini Kopaonika. Lepih livada bilo je i u Toplici, naročito za konje.<sup>2</sup>

U poslednjoj četvrtini XVI veka livada je bilo i uz Carigradski drum u Pomoravlju, na primer, u kraju oko Batočine.<sup>3</sup> U Rumeliji i dalje u Trakiji i Anadolu trava je na pašnjacima sagorevala, te je seno bilo skuplje, a goveče se nije moglo gajati onoliko koliko su to omogućavali ostali uslovi.<sup>4</sup>

Kosidba se u centralnim balkanskim oblastima, na primer, na sofijском polju, drukčije izvodila nego u srednjoj Evropi. O tome je Dernšvam zapisao sledeće: „Stanu i idu jedan prema drugom; imaju dugačku kriva držalja i na njima male uske kose; a kad kose, držalje drže jednom rukom. Nemaју grabulje, već seno skupljaju rukom, zbog toga ostaje mnogo sena da leži i da se kvari.”<sup>5</sup>

U Polimlju bilo je stoke svake vrste.<sup>6</sup> I za kaludere Mileševa (1580.) je zabeleženo da su izvlačili lep prihod od stoke. Tada je i u kopaoničkom kraju bilo velikih zadruga povlašćenih stočara (koji nisu plaćali harač i nisu davali dečake u janičare).<sup>8</sup>

U dolini Nišave istočno od Niša italijanski putopisac Katarin Zen (1550.) zapazio je mnogo dobrih volova koji služe za vuču i mnogo stoke razne vrste.<sup>9</sup> Po planinama oko Nišave bilo je razvijeno ovčarstvo; jedan francuski putopisac (1582.) naveo je da su u stadu našli 10.000 ovaca, što je gonjeno u Carigrad, za sultanovu kujnu.<sup>10</sup> U lepom i rodnom sofijском polju gajila se mnogobrojna stoka,<sup>11</sup> i to izgleda na polustajski način, tj, na seoskim pašnjacima, ali se svakog dana vraćala u staje. Hans Dernšvam je jugoistočno pred Sofijom video mnogo svinja. Tu je bilo tako dobro obrađenih polja i paše za toliko mnogo stoke, da su seljaci mogli biti bogati, da ih Turci nisu gulili. Po mišljenju Dernšvama, gde stanuju Turci tu seljaci nemaju ništa.<sup>12</sup> Stoke je Štefan Gerlah (1578.) dosta našao i južnije, kod Vetrena,<sup>13</sup> na ulasku u dolinu Marice. U Rumeliji, pa i drugde su umesto konja više upotrebljavani bivoli, i to kako kao tegleća stoka, tako i za oranja. U severnoj Srbiji, pak, narod je zbog svog siromaštva držao volove a malo konja.<sup>14</sup>

<sup>1</sup> В. Курipešić, н. д., 29.

<sup>2</sup> Rad 124, 80, 66, 67 (Паоло Контарини, 1580.).

<sup>3</sup> Rad 116, 52 (Штефан Герлах, 1578.).

<sup>4</sup> Dernschwam, 46 и 253; Вланиц, 28 и 40.

<sup>5</sup> Dernschwam, 253; Вланиц, 40.

<sup>6</sup> Starine X, 207 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>7</sup> Rad 124, 65 (Паоло Контарини).

<sup>8</sup> Rad 62, 123.

<sup>9</sup> Matković, Dva talijanska putopisca, 209.

<sup>10</sup> Р. Самарцић, н. д., 137.

<sup>11</sup> Rad 56, 219 (Рамберти, 1534.), Rad 112, 177 (К. Рим, 1571.); М. Ј. Динић, н. н. 117 (П. Лескалопје, март 1574: биволи и камиле).

<sup>12</sup> Dernschwam, 247 и 252; Вланиц, 39.

<sup>13</sup> Rad 116, 43.

<sup>14</sup> Rad 84, 92 и 86 (Бецек, 1564.).

U pojedinim mestima, na primer u selu Stracinu (severoistočna Makedonija) posebno je bilo razvijeno živinarstvo, te s tim u vezi i velika trgovina jajima.<sup>15</sup>

Sočne livade i bogati pašnjaci omogućavali su i intenizvno pčelarstvo. Dubrovački i drugi dokumenti o trgovinskom prometu svedoče o izvozu velikih količina voska iz balkanskih zemalja i za vreme Turaka. Posebno se cenio vosak iz bugarske Zagore, no on se dosta izvezio i iz ostalih župnih krajeva, na primer, iz Kruševca, Vidina itd. Carski kurir Becek (1564.) zabeležio je za Novo Selo, na putu iz Niša u Pirot, da mnogo proizvodi voska.<sup>16</sup> Med je predstavljao značajan sastojak hrane za orijentalnu kujnu, koja se u XVI veku već odomaćila u balkanskim gradovima sa većinom muslimanskog življa.

U južnoslovenskim zemljama u XVI veku nesumnjivo je bilo mnogo i divljači. Jedan Nemač je (1533.) naveo mnogo vukova u Hercegovini.<sup>17</sup> Jedan austrijski carski poslanik imao je sreće, te je u Pomoravlju, pored drumu, ulovio medveda. Bilo je i ptica koje se nisu lovile, na primer roda, koje je u velikom broju video jedan Mlečanin u Toplici.<sup>18</sup>

Izvoz stočarskih proizvoda ponekad pominju i putopisci. Kao veliki proizvođač kože zabeležena je Sofija, gde je po kožu uvek dolazilo mnogo stranih trgovaca.<sup>19</sup> Slično je bilo i sa Provadijom (severnoistočna Bugarska), gde su kožu kupovali dubrovački trgovci.<sup>20</sup> U Drinopolju se takođe izrađivalo i prodavalo mnogo koža, naročito kordovana u svim bojama, pa uzdi, sedla, pozlaćenih i posrebrenih, i raznih drugih stvari od kože.<sup>21</sup> Na bogatom skopskom tržištu glavni je proizvod bio kordovan; pored njega je i dosta voska transportovano u Lješ a potom morem u Ankonu.<sup>22</sup> Dubrovački podaci ukazuju da je sa skopskog tržišta istim putem odlazilo i mnogo vune; preko Skoplja transportovana je na Lješ i vuna iz Metohije. Kao posebno fina vuna u dubrovačkoj trgovini važila je plovdivska vuna. Na dobro snabdevenom bitoljskom tržištu trgovalo se voskom, vunom i kožama.<sup>23</sup>

Živa stoka se retko izvozila. Izvoz jahaćih konja su Turci strogo zabranjivali, jer su konji povećavali, odnosno umanjivali vojnu snagu zemlje. O tome posebno piše jedan putnik Nemač.<sup>24</sup> Turci su na poseban način negovali jahaće konje.

<sup>15</sup> Р. Самарцић, н. д., 130.

<sup>16</sup> Rad 84, 89.

<sup>17</sup> Rad 62, 59 (К. Д. Шепер).

<sup>18</sup> Rad 124, 67 (Паоло Контарини).

<sup>19</sup> Rad 62, 102 (Катарин Зен, 1550.). — Жак Натан се позива на путописце кад говори о кожарству у Бугарској (н. д., 112, 120).

<sup>20</sup> Rad 136, 85 (писмо Ђорђа Доусе о путовању у Цариград, 1551.).

<sup>21</sup> Rad 112, 185 (К. Рим, 1571.).

<sup>22</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 255 (безимени италијански путописац, 1555.).

<sup>23</sup> Rad 136, 51 (Лоренцо Бернардо, 1551.).

<sup>24</sup> Rad 112, 154 (Карло Рим, 1574.: одузимање најбољих коња у Будиму од стране паше).



## 10. RIBOLOV NA DUNAVU, NJEGOVI PŘITOKAMA SA BALKANA I PO PLANSKIM JEZERIMA U XVI STOLEĆU

Udeo ribe u jelovniku naročito varoškog stanovništva i ulogu ribolova i privredi zemlje za prilike u XVI veku ne možemo meriti dnanašnjim aršinima. Nešto zbog običaja u ishrani (povezano s verom) a još više zbog veće upućenosti privrede u celini na lokalne izvore i mesne privredne mogućnosti — pre intenzivnog saobraćaja i većeg dovoza robe u razvijenijim kapitalističkim državama — riba se mnogo više tražila, te je ribarenje bilo vrlo razvijeno na svim rekama i jezerima. U Podunavlju su postojali prosto idealni uslovi za razvitak ribolovstva, jer su veći delovi Panonske nizije pored reka u XVI veku bili pokriveni barama, rukavcima reka ili vodoplavnim terenima, koji su bili kao stvoreni za bujan život i mreščenje riba. Nizvodno Dunavom, i kamenita Djerdapska klisura predstavljala je pre regulacije rečnog korita cvetni perivoj za ribe, tako da se ovde lovile velike i teške ribe.

Najviše podataka o ribama putopisci, naročito francuski, dali su za Beograd. Te vesti, dopunjene poznatim turskim i neobjavljenim dubrovačkim podacima, analizirane su i objavljene. Na celom srednjem Dunavu Beograd je bio glavno središte i izvoznik ribe; beogradsko tržište ribe izgleda da se u većoj meri dopunjavalo ribom sa susedne riblje pijace u Smederevu i lovinom sremskih ribara. Najčešće se pominju krupni i debeli šarani, standardna riba srednjeg Dunava, velike morune i znatno manje jesetre, inače slične moruni i iz iste porodice riba. Vesti o dužini dunavskih riba malo su za danas neobične: šaran dugačak oko metra, štika i od dva metra ili manji i morune od preko tri metra ili fantastična moruna od blizu šest i po metara. Debela riba prosečnog ulova težila je oko tristo oka (135 kg.). Riba se u Beogradu prodavala na posebnoj pijaci, na kojoj se nalazila i carina za naplatu dažbina na ribu. Zbog velike ponude riba je bila neobično jeftina. Riba se jela sveža ili se konzervirala — soljenjem, sušenjem na suncu ili se želatinom pretvarala u piktije, pri čemu se kao posebna veština smatralo soljenje ajvara. Ajvar i kvalitetna riba izvozili su se iz Beograda kao specijalitet, prema postojećoj građi, pre svega u Dubrovnik.<sup>1</sup>

Neki putopisci Nemci pominju i jevtinu ribu sa smederevske pijace, a jedan dubrovački dokumenta govori da se riba iz Smedereva slala (1513.) na dar Dubrovniku.<sup>2</sup>

Riba je uopšte predstavljala trgovačku robu koja se stalno i svuda nalazila u prometu. Zbog toga su ribu gotovo svi lokalno usmereni turski zakonski spomenici pominjali još u XV veku u vezi sa naplatom trošarine.<sup>3</sup>

Ribarstvo je naročito bilo razvijeno u delti Dunava, naročito na glavnom i najsevernijem kraku Kiliji, gde mu se centar nalazio u mestu Ismanliji.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Б. Храбак, *Риболов и рибља пџијаца у Београду у XVI и XVII, веку, Годишњак града Београда VII (1960), 59—65.*

<sup>2</sup> Исто, 60.

<sup>3</sup> Veldiceanu, н. д. II (1964), 232—39 (Ново Брдо, 1488.), 239—43 (Јањево, 1488.), 191—97 (Кратово, 1488.) итд.

<sup>4</sup> Rad 105 (1891), 180 (Андрија Тарановски, 1569.); Rad 136, 80 (писмо Ђорђа Доусе о путу у Цариград, 1597.)

Neki svetski putnici onoga vremena i na Nilu i u Anadolu sećali su se dunavske ribe i s njome vršili upoređenja.<sup>5</sup>

Uz reke, na primer, Moravu i Nišavu stvarani su ribnjaci. Njih na Moravi između Jagodine i Batočine pominju Štefan Gerlah (1578.)<sup>6</sup> a na Nišavi kod Pirota Karlo Rim (1571.).<sup>7</sup>

Ribnjaci su pravljani i na planinskim jezerima, na primer na vrhu Vitoše, kraj Sofije.<sup>8</sup> U Strugi jedan Italijan je zabeležio jegulje, krapove i drugu ribu iz Ohridskog jezera.<sup>9</sup> Pomen je zaslužila i riba iz Popovog polja, preko zime kraškog jezera.<sup>10</sup>

#### 11. VAĐENJE I UPOTREBA SREBRNE, ZLATNE I GVOZDENE RUDE U JUŽNO-SLOVENSKE OBLASTIMA POD TURCIMA U XVI VEKU

Rude, toliko potrebne za vođenje rata i za kovanje novca, posebno su zanimala putnike sa Zapada, koji su većinom pripadali diplomatskim misijama. Uostalom, izvesna reputacija rudnika, na primer Novog Brda i još više rudara Sasa u Srbiji postojala je u Italiji i u austrijskim zemljama izranije.

O rudarstvu Bosne Kuripešić je najpre dao uopšteni sud: „U zemlji ima na mnogo mesta zlatne i srebrne rude i zlato se ispire, što smo mnogo puta i vidjeli.” To ispiranje on je posebno pomenuo za dolinu Vrbasa kod Jajca.<sup>1</sup> Ispiranje zlata pominje i Katarin Zen (1550.), ali na Lašvi.<sup>2</sup>

Putnici između 1530. i 1550. godine beleže rudokopnju i na Kopao-niku: Kuripešić ispiranje zlata i kopanje srebra u dolini Banjske reke,<sup>3</sup> Ram-berti (1534.) — kopanje srebra<sup>4</sup>, Šeper (1533.) — zlatne i srebrne rude kod Zaplanine<sup>5</sup>, Žan Šeno (1550.) — vađenje srebra, što sultanu pruža veliki prihod.<sup>6</sup> Za kopaoničko-novobrdsku oblast Kuripešić je zaključao: „Tu ima vrlo mnogo srebra, tako da turski car sav svoj novac kuje od srebra koji dobija iz Srbije.”<sup>7</sup> Iz imena koja su netačno zabilježena, izlazilo bi da je poslanstvo Davida Ungnada (1572.) znalo za Novo Brdo, Trepču i Rudnik.<sup>8</sup> O Novom Brdu i Trepči nema posebnih pomena.

O rudarstvu Kratova se više zapisivalo. Katarin Zen je tu (po čuvenju, jer je putovao preko Niša) pomenuto bogate rudnike zlata i srebra i kovnicu najlepšeg turskog novca, koja je sultanu donosila 70.000 dukata godišnjeg

<sup>5</sup> Matković, *Descriptio peregrinationis Georgii Husztii*, *Starine* XIII, Zagreb 1881, 11; A. Verancsics, н. д., *Scr. V*, Pest 1859, 42.

<sup>6</sup> Rad 116, 52. — Турски подаци говоре о рибањацима у долини Лесковца, (М В а с и ћ, н. н., 53)

<sup>7</sup> Rad 112, 176.

<sup>8</sup> Исто, 183.

<sup>9</sup> Rad 136, 30 (Лоренцо Бернардо, 1591.).

<sup>10</sup> Rad 136, 6 (Бузепе Розачо, последња четвртина XVI столећа).

<sup>1</sup> В. К у р и п е ш и ћ, н. д., 31 и 17.

<sup>2</sup> Rad 62, 93.

<sup>3</sup> В. К у р и п е ш и ћ, н. д., 28.

<sup>4</sup> Rad 56, 214.

<sup>5</sup> Rad 62, 57.

<sup>6</sup> Исто, 72. — Жак Гасо (јануар 1548.) такође наводи вађење великих количина srebra, што сultanу доноси знатне приходе (М. Ј. Д и н и ћ, н. н. 89).

<sup>7</sup> В. К у р и п е ш и ћ, 37.

<sup>8</sup> Rad 112, 217.



prihoda; on je govorio i o običaju Turaka da imućne ljude prisilno vode u Kratovo da tu istražuju rudu, od koje se obaveze („ropstva“) ne mogu osloboditi ni oni ni njihovi naslednici.<sup>9</sup> Djakomo Soranco (1575.) je zapisao da se u majdanima oko Kratova vadi rudača, a da se u Kratovu kuju srebrne i zlatne (pogrešno!) akče.<sup>10</sup>

Najdetaljnije vesti o uslovima rada rudara u zlatnim i srebrenim rudnicima Siderokapsa (na južnoj granici Makedonije) doneo je Pjer Belon (1550.). Rudari su bili Sloveni (verovatno Srbi i Makedonci), Bugari, Turci, Arbanasi, Jevreji i drugi, koji su govorili različitim jezicima. Belonov opis rudokopnje i izdvajanja metala je značajan za historiju metalurgije a njegove beleške o radnim odnosima dragoceni su podatak o socijalnom položaju rudara. Siderokapsa je donosila sultanu, po pravilu, prihod od 18.000 dukata (ponekad i do 30.000!), a vlasnicima rudokopnje 9—10.000 dukata mesečno. Oko toga mesta bilo je rasejano po gori 5—600 peći, u kojima se bez prestanka talila ruda.<sup>11</sup>

Putopisci su se zadržali i na rudniku Kučajni, koji je radio u srednjem veku, ali je prestao sa radom još pre dolaska Turaka. Za vreme Turaka tu se vadila gvozdена ruda.<sup>12</sup> U tom bogatom rudniku Turci su izrađivali puške i lili tanad i druge predmete, te ih prevozili u Carigrad.<sup>13</sup> Iz smederevskog kraja iznosilo se i olovo, tzv. srpsko olovo, tj. vrlo tvrdo olovo, koje je predstavljalo rezultat prve faze otapanja, kad ruda pri topljenju ne ogrezne potpuno u istopinu. Takvo olovo, natovareno na kola sa dva vola, morali su Bugari rabotom prevlačiti iz Smedereva u Sofiju, Carigrad i druga mesta. Dernšvam je čuo da je bilo potrebno isterati godišnje oko 3.000 kola da bi se to olovo razvezlo.<sup>14</sup> Teško je za sigurno utvrditi o kom je to rudniku olovo u smederevskom kraju reč. U zapisnicima divanskog saveta (serija *Muhimme defteri*) iz druge polovine XVI veka više puta se beleži neki rudnik „Badž“ (ili nekako slično) u smederevskom sandžaku. Možda je tu reč o starim zakopinama koje su se još pre jednog stoleća mogle videti od mesta Baba, preko Parcana i Ripnja do Avale.<sup>15</sup>

Vađenje železne rude oko Samokova beleže četiri Italijana; prvi od njih (1550.) naveo je da se u Samokovu toliko gvozdene rude kopa, da se time opskrbljuje sva turska država; drugi, pak, video je mnoge vodene plakaonice za ispiranje železa.<sup>16</sup> Eksploataciju srebrne rude kod Breznika (u blizini srednjovekovnog Znepolja) zapazio je B. Kuripešić.<sup>17</sup> Postojanje izvrsne

<sup>9</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 209; *Rad* 62, 101.

<sup>10</sup> *Rad* 124, 40. — О рукодопњи и ковници Кратова види турске законске прописе из 1475. године: *Beldiceanu*, н. д. I, 76—77.

<sup>11</sup> *Rad* 62, 80. — Белонове вести о рудницима Сидерокапсе разрадио је Всеволод Николаев (*Големи минни предпријятия с български работници в Европейска Турция през XVI век*, София 1953). Вид. и турске законске споменике: *Beldiceanu*, н. д. I, 138.

<sup>12</sup> *Dernschwam*, 255; *Влаинац*, 41.

<sup>13</sup> *Rad* 112, 217 (путовање Давида Унгнада, 1572.).

<sup>14</sup> *Dernschwam*, 254—55; *Влаинац*, 41.

<sup>15</sup> Б. Храбак, *Средњовековни рудник и штрз Рудништа под Авалом, Годишњак Музеја града Београда III* (1956), 101 и 104.

<sup>16</sup> *Rad* 62, 19 (Катарин Зен, 1550.); *Rad* 84 (безимени италијански путописац, 1559. *Rad* 124, 41 (Б. Соранцо, 1575).

<sup>17</sup> В. Курипешић, н. д., 37.



železne rude na podnožju Vitoše, koja je izvožena u Carigrad, zabeležio je Karlo Rim (1571.).<sup>18</sup> Njegov zemljak Salomon Švajger, šest godina kasnije, pomenuo je da srebrnih žila ima na padinama Balkana, između Vetrena i Tatarpazardžika.<sup>19</sup> Francuz Filip Difren-Kane (1573.) zabeležio je da mu je jedan Dubrovčanin u Plovdivu naveo da sultan godišnje dobija 70 tovara akča od rudnika gvožđa iz plovdivskog kraja i isto toliko od ispiranja zlata iz Marice.<sup>20</sup>

U Samokovu i u drugim bugarskim mestima lepo se razvila proizvodnja predmeta od gvožđa. U Samokovu su se ove izrađevine pravile za lokalnu upotrebu, a u Kosteničkoj banji (na gornjem toku Marice) se samokovsko gvožđe prerađivalo za potrebe turske države i slalo u Carigrad.<sup>21</sup> Železnina se izrađivala i u Čustendilu<sup>22</sup>, odnosno u Tatarpazardžiku i u selu Govedaru gde su postojale radionice za izradu oružja.<sup>23</sup>

Zanimljiv je osvrt geologa V. Simića na podatke putopisaca o rudarstvu kopaoničke oblasti. O Kuripešićevu podatku o ispiranju zlata u dolini kod Rogozne piše: „Od značaja je jer pominje sprave ili postrojenja za proizvodnju samorodnog zlata putem prepiranja. Kako je Kuripešić ove video u dolini, moglo bi se tumačiti, mada neobavezno, da je na njima ispirano iz nanosa. Ali takvom tumačenju može se ozbiljno prigovoriti. „*Goldwaschwerk*“ je naprava pomoću koje se dobijalo samorodno zlato iz rudnih žica. Ruda se morala snositi u dolini (svakako Banjske reke) zbog vode i tu prepirati. Prema tome, u vreme Kuripešićevog putovanja moglo se raditi na nekoj, dotle nepronadenoj žici zlatonosne rude. Drugi prigovor proizvodnji zlata iz rasipa tiče se nanosa Banjske reke, jer ih je malo, a i nisu bogzna kako pogodni za prepiranje. Da je u njima bilo iole značajnijih količina zlata, to bi ga vek ili dva ranije isprali Sasi, majstori tadašnjeg rudarstva, sami ili ako se to nije rentiralo, onda pomoću okolnih naselja za račun dvora ili manastira u Banjskoj. Prema tome, postrojenja za dobijanje zlata u dolini Banjske u 1530. godini mogla su najpre služiti prerađivanju rude iz zlatonosnih kvarcnih žica sa olovno-cinkovom rudom. Kuripešić je pomenuo i srebrnu rudu, a ova se mogla proizvoditi jedino uz zlatonosnu. To je u stvari olovna ruda sa srebrom, vađena iz istih rupa sa zlatonosnom, što opet ide u prilog mišljenju da je zlatonosna ruda za prepiranje otkopovana iz korenog rudišta. Za srebrnu, odnosno olovnu rudu, nije rečeno da se prerađuje, već je samo pomenuto njeno prisustvo. Proizvodnja zlata na Rogozni u prvoj polovini XVI veka nikako nije nastavak rudarske radnje iz XIV ili XV veka. To je neko povremeno rudarstvo, kakvo je bilo u XVI veku, kao, uostalom, što ga i danas ima, a pogotovo kad se ticalo proizvodnje slobodnog zlata, koja se mogla ostvariti uz pomoć okolnog stanovništva [. . .] No ova je proizvodnja bila neznatna i kratkog trajanja, jer se Rogozna ne pominje uz ostale rudnike u rudarskim zakonima sultana Sulejmana, izdanim 1536. godine.” O vestima Šepera i Rambertija da se i zlatna ruda vadi na Kopaoniku, Simić je mišljenja da „bi se beleška mogla odnositi i na prošlost, jer turski;

<sup>18</sup> Rad 112, 183.

<sup>19</sup> Rad 116, 94; Ив. Шишманов, 435.

<sup>20</sup> М. Ј. Динић, н. н. 104.

<sup>21</sup> Rad 124, 41 (Ђ. Соранцо, 1575.); М. Ј. Динић, н. н. 103-4 (Ф. Дифрен-Кане, 1573; сидра).

<sup>22</sup> Rad 84, 70 (безимени италијански путописац, 1559.).

<sup>23</sup> A. Verancsics, н. д. I, 323.



rudarski zakoni od 1536. godine nigde ne pominju proizvodnju zlata na rudištima u Srbiji".<sup>24</sup>

## 12. PRVI POMENI MINERALNIH VRELA U BOSNI SRBIJI I, BUGARSKOJ KOD PUTNIKA SA ZAPADA

Zapadni putopisci su na svom putovanju po južnoslovenskim zemljama evropske Turske u XVI veku samo sasvim izuzetno zabeležili i mineralna vrela i banje. U XVII veku tih pomena ima dosta, naročito kod Evlije Čelebije.

Katarin Zen (1550.) pomenuo je dva kiseljaka u dolini Lepenice, kod Fojnice odnosno Preševa.<sup>1</sup> Topla vrela blizu Niša zabeležena su 1533. godine.<sup>2</sup> Kosteničku banju više njih je posetilo, ali niko ne govori o lekovitoj vodi. Filip Difren-Kane (1573.) video je više toplih izvora na putu iz Čustendila za Dupnicu.<sup>3</sup>

## 13. JEVTINOĆA DOMAĆIH PROIZVODA I ZAINTERESOVANOST JUŽNOSLOVENSKOG SELJAKA U XVI VEKU DA DOĐE DO NOVCA

Šesnaesti vek, naročito njegova druga polovina, doba su tzv. revolucije cena, tj. naglog nominalnog povećanja cena usled ulazjenja u opticaj velike količine novca, dobijenog od južnoameričkog srebra koje je pojeftinilo kad je u njegovoj proizvodnji počelo da se primenjuje amalgamisanje. Efekti ove revolucionarne proizvodnje plemenitih metala izvesno vreme nisu se osećali u Otomanskom carstvu, zbog karaktera njegovih odnosa sa hrišćanskom Evropom. No, poslednjih decenija XVI stoleća, kako zbog sve jačih trgovinskih odnosa sa Zapadom, tako i zbog specifično otomanskih uzroka, došlo je do naglog obaranja cene novcu. Putnici sa Zapada, koji su dobro poznavali odnose cena u svojim zemljama, upravo su osobito značajni svedoci o širenju tzv. revolucije cena u evropskoj Turskoj. Poseban momenat u tom procesu bila je slabost Turaka prema novcu, koji je za njih imao veliku vrednost i koji je jedino mogao da ih humanizuje i učini blažim.<sup>4</sup> Kao i u drugim istočnim zemljama, i u Turskoj se plemeniti metal u obliku novca rado tezaurisao, tj. izvlačio iz prometa i tako izazivao stalnu oskudicu novca, što je njegovu metalnu vrednost samo povećavalo. Ovakvoj svoje vrsnoj inflaciji doprinosila je nedovoljna proizvodnja dobara namenjenih gradskom stanovništvu, koje je posedovalo i trošilo novac, tako da se Turska i u tom pogledu ekonomski morala potčinjavati razvijenijem Zapadu.

Prve konstatacije o jevtinoći životnih namirnica učinili su putnici iz Srednje Evrope u Srbiji i Bugarskoj sredinom XVI veka, pre svega Hans

<sup>24</sup> В. Симић, *Рудници злата у средњовековној Србији према савременом познавању наших рудника*, *Вестник Завода за геолошка и геофизичка истраживања*, књ. XIX, серија А, Београд 1961, 332—33 и 337. — У својим ранијим радовима В. Симић је био мање строг према путописачким записима, те је примао Курипешинев податак да се на Рогозини добијало злато испирањем као и наводе се пера и Рамбертија о рудиз лата на Копачику (*Рејонизација и карактеристике средњовековне рударске делатности у области Копачику*, *Вестник*, књ. XV, Београд 1958, 367 и 374).

<sup>1</sup> *Rad* 62, 94.

<sup>2</sup> Исто, 53 (К. Шепер, 1544.).

<sup>3</sup> М. Ј. Динић, и. н. 103.

<sup>4</sup> *Lettres du baron de Busbec* I, 74—5.

Dernšvam, iskusni privredni stručnjak, koji je bio svestan toga da „novac u tim krajevima je bio skuplji nego u Slovenačkoj prema Štajerskoj”. On je zapazio da je, na primer, jajima najmanja cena u Srbiji i zapadnoj Bugarskoj, uz drum, potom im je cena skakala od Plovdiva i Drinopolja, tako da su ona u Maloj Aziji bila znatno skuplja.<sup>2</sup> Slično je bilo i sa ugarskom zlatnom forintom: za nju je u Budimu trebalo dati samo 40—50 akči a u Carigradu 57 akči (1553—54).<sup>3</sup> Čak i sa hlepčićima je bilo tako; u Srbiji i Bugarskoj za akču se dobijalo četiri a u Carigradu samo dva hlepčića.<sup>4</sup> Jevtini su bili, hleb, ječam, vino, stoka, živina, jaja, riba, a skupi seno (zbog sagorevanja na livadama Rumelije i Trakije), šećer, pirinač, biber, šafran, uvozno vino pa čak i voštana sveća.<sup>5</sup> I Buzbeku je sve bilo jevtino u Sofiji i Beogradu, naročito kad se vraćao iz Carigrada u otadžbinu (u leto 1555.).<sup>6</sup> Marko Antonio Pigafeta (1567.) popisao je vrednost začina i neke druge robe u Carigradu i ustanovio postojeći kurs monete, objasnio neke turske mere i manje novčane jedinice od akče, ali nije vršio poređenja, niti se izjašnjavao o jevtinosti.<sup>7</sup> Jevtinoću hleba, vina i ribe u Smederevu zabeležio je jula 1758. Štefan Gerlah.<sup>8</sup> Dobro snabdeveno i jevtino tržište životnih namirnica od Sofije prema Dubrovniku primetio je avgusta 1582. i Žan Palern Forezjen.<sup>9</sup> Cene su, ipak, već znatno porasle jer, dok se avgusta 1553. u Sofiji i u Srbiji, na primer, moglo uz drum dobiti 22—32 jaja za akču, 29 godina kasnije, za istu novčanu jedinicu dobijalo se u istim oblastima samo 12—15 jaja, dakle upola manje; cena kokoši, međutim, ostala je na istom: oko dve do tri akče, ako 1582. odrasliji pilići (koji su 1553. vredeli akču), nisu prodavani kao kokoš.<sup>10</sup>

Hrana je svuda nuđena na Carigradskom drumu od Niša pa do Rumelije, jer je seljak bio zainteresovan za novac. Prodaja životnih namirnica uz drum dobila je funkciju stalne i dobro snabdevene pijace, tim pre što uz drum nije bilo gostionica i prodavnica životnih namirnica, pa čak se ni u karavanserajima nije prodavalo jelo. Na drumu su se pored pogača mogli kupiti: kokoši, jaja, vino, goveđe, ovnujsko i jagnjeće meso, živa stoka, ječam, voće pa i kože. U jednom selu putnicima u susret izašlo je 20 žena da im prodaju pogače i voće. Pred samim Caribrodом jedan siromašan seljak imao je pored ceste kolibicu od lišća, u koju je doneo u burencetu vina da ga prodaje.<sup>11</sup>

<sup>2</sup> Dernschwam, 9; Влаинац, 11.

<sup>3</sup> Dernschwam, 50; Влаинац, 30.

<sup>4</sup> Dernschwam, 257 (Ниш); Влаинац, 43 (Ниш). — На путу између Мустафа-паше и Клокотнице пogaча је 1555. стајала акчу (Dernschwam, 248; Влаинац, 11).

<sup>5</sup> Dernschwam, 8—9, 45, 48, 260, 261, 263; Влаинац, 11, 27, 29, 45, 46, 47. — Катарин Зен (1550.) поменуо је да је у Новом Пазару све јеvtино, једино што је ту вино нешто скупле (Starine X, 208; Rad 62, 99).

<sup>6</sup> Lettres du baron de Busbec I, 62—3, „00—1; Ч. Мијатовић, н. н., 202.

<sup>7</sup> Starine XXII, 192,—3.

<sup>8</sup> Rad 116, 53.

<sup>9</sup> Р. Самарцић, н. д., 137.

<sup>10</sup> Као бел. 2/XIII; Р. Самарцић, н. д., 140 — У Нишу и Пловдиву добијало се 20 jaja за акчу а у Дринопољу 18 (1555.) (Dernschwam, 257 и 247; Влаинац, 43, 11).

<sup>11</sup> Dernschwam, 8—9, 256, 13; Влаинац, 11, 43, 14.



I Buzbek i Becek su zatekli Bugarke da putnicima prodaju pogače.<sup>12</sup> Štefan Gerlah je u jednom selu (kraj Semizče) video mnogo sakupljenih Bugarkinja koje su imale običaj kad spaze stranog putnika, da u masi izadu iz sela noseći pogače, meso, mleko i ribu na prodaju. U Dragomanu hrišćani su doneli na prodaju pogača, jagoda, sira i mleka. Uopšte, gde vide da bi mogle dobiti novac, Bugarke iznose pogače, kiselo i neki seljeno mleko a ponekad i svinjjetinu.<sup>13</sup> Sviti Paola Kontarinija žene su u selu Klisuri ponudile pogače i trešnje.<sup>14</sup>

I oko Provadije devojke iz sela nudile su putnicima svež pečeni hleb, guske, kokoši, piliće i drugu hranu.<sup>15</sup> Čak i kod mosta na Vardaru kod Soluna žene su izlazile iz kuća sa pogačama.<sup>16</sup> I tu je seljaku bio potreban novac, jer je ceo privredni i socijalni život prešao na kolosek robno-novčanih odnosa.

#### 14. TRGOVCI I PREDMETI TRGOVINE PO VAROŠIMA SLOVENSKOG DELA BALKANA POD TURCIMA U XVI STOLEĆU

Podaci zapadnih putopisa o gradskim naseljima odnose se na pristupstvo Dubrovčana i predstavnika „trgovačkih nacija” same turske države (Jevreja i Grka), na postojanje karavanseraja i trgovačkih radnji, na izgled naselja (selo, trgovište, grad, razbijenost mahala, geografski smestaj), uz oznaku građevinskog materijala od koga su zgrade načinjene, dok o broju kuća, radnji i stanovnika, o specifičnim proizvodima nekog mesta, o organizaciji esnafa i slično nema ili nema mnogo podataka. Zbog toga su vesti iz putopisa o varoškim naseljima i gradskoj privredi malo korisni, tim pre što i o elementima koje pružaju postoje precizniji i bogatiji izvori. Dok je selo u XVI veku (izuzimajući Bosnu i Hercegovinu, delove današnje Bugarske i kolonizovana naselja uz drum), gotovo u potpunosti bilo hrišćansko, grad je većinom bio muslimanski. Tu su uglavnom i stanovali, pored zanatlija, trgovaca, vojnika i gladnog i neradnog orijentalnog plepsa, feudalci, čime je samo potenciran eksploatatorski karakter varoških naselja u odnosu na selo. Ako se isključi zanatska proizvodnja, i trgovci i svi ostali po gradskim naseljima živeli su na račun rada seljaka. Zbog toga je život pijace u nekom mestu više svega zavisila od bogatstva poljoprivrednog rejona toga mesta i od njegove naseljenosti.

Broj kuća varoških naselja kroz koja su prolazili zapadni putopisci su davali samo izuzetno. Katarin Zen (1550.), na primer, rekao je da Sarajevo broji 10.000 kuća<sup>1</sup>, bezimeni italijanski putopisac (1559.) za Skoplje da ima 29.000 odžaka<sup>2</sup>, što je svakako preterano. Paolo Kontarini (1580.) je naveo da Novi Pazar ima 6.000 domova, da Niš može imati 1.500 ognjišta,

<sup>12</sup> *Lettres du baron de Busbec I*, 62; *Rad* 84, 89 (код Новог Села у долини Нишаве).

<sup>13</sup> *Rad* 116, 38, 49, 42.

<sup>14</sup> *Rad* 124, 85

<sup>15</sup> *Rad* 136, 83 (писмо Ђорђа Доусе о путу у Цариград, 1597.).

<sup>16</sup> *Rad* 136, 33 (Лоренцо Бернардо).

<sup>1</sup> *Starine X*, 206; *Rad* 62, 95.

<sup>2</sup> *Rad* 84, 69.

Sofija — 55.000, Plovdiv 5000 a Drinopolj nešto manje od 50.000.<sup>3</sup> Djakomo Soranco (1575.) je o Čustendilu zabeležio da ima preko 6.000 dimnjaka, o Skoplju — 3000 i za Plovdiv 8.000 domova<sup>4</sup>, putopisac u poslanstvu Davida Ungnada naveo je za Sofiju (1572.) da ima 7000 kuća<sup>5</sup>, što je svakako bilo znatno ispod stvarnog broja kuća.

Prisustvo Dubrovčana i Jevreja po gradovima označeno je naglašeno u putopisnim beleškama zapadnjaka. Dubrovčani se beleže: u Sarajevu<sup>6</sup>, Novom Pazaru<sup>7</sup>, Prokuplju<sup>8</sup>, u Beogradu<sup>9</sup>, Smederevu<sup>10</sup>, u Nišu<sup>11</sup>, Sofiji<sup>12</sup>, u Plovdivu<sup>13</sup> i u Provadiji<sup>14</sup>. Dubrovčani, zajedno sa Jevrejima pominju se: u Beogradu<sup>15</sup>, Nišu<sup>16</sup>, Sofiji<sup>17</sup>, Plovdivu<sup>18</sup>, Jedrenu<sup>19</sup> i u Skoplju<sup>20</sup>. Jevreji su zabeleženi bez Dubrovčana: u Beogradu<sup>21</sup>, Plovdivu<sup>22</sup>, Drinopolju<sup>23</sup> i Bitolju<sup>24</sup>. O Jevrejima Štefan Gerlah dao je generalnu konstataciju: „Od Budima pa do Niša, u svakoj palanci gde god smo stigli ili prenoćili, videli smo Jevreje, Cigane i Arape.”<sup>25</sup> Po izvesnim gradovima bilo je, prema putopiscima, trgovaca i drugih narodnosti: u Novom Pazaru i Mlečana<sup>26</sup>, u Nišu Dalmatinaca<sup>27</sup>,

<sup>3</sup> Rad 124, 66 (Нови Пазар), 67 (Ниш), 80 (Софија), 87 (Пловдив), 94 (Дринопол).

<sup>4</sup> Исто, 41 (Чустендил), 45 (Пловдив), 31 (Скопље).

<sup>5</sup> Rad 112, 218.

<sup>6</sup> Rad 62, 125 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>7</sup> Rad 62, 98—99 (Катарин Зен, 1550.); Rad 124, 66 (Паоло Контарини, 1580.); М. Ј. Динић, н. н. 100 (Ф. Дифрен-Кане, 1573.)

<sup>8</sup> Rad 124, 81 (Паоло Контарини, 1580.).

<sup>9</sup> Ч. Мијатовић, н. н., 210 (Штефан Герлах, 1578.); Starine, XXII, 84 и Rad 100, 85 (Пигафета, 1567.).

<sup>10</sup> Starine, XXII, и Rad 100, 96 (Пигафета, 1567.).

<sup>11</sup> Dergschwat, 257 19; Влаинац, 43 и 11 (Далматинци трговци вероватно су Дубровчани, али се посебно помињу и клобучари из Шибеника); Rad 112, 76 (К. Рим, 1571.); Rad 116, (Штефан Герлах, 1578.).

<sup>12</sup> Rad 62, 53 (К. Д. Шепер, 1533.); Starine XXII, 177 и Rad 100, 123 (Пигафета, 1567.); Rad 112, 218 (посланство Давида Угнада, 1572.); Rad 124, 85 (Паоло Контарини, 1580.); И в. Шишманов, н. н., 414; енглески путописан Остин (1585.) ноћно је у кући једног дубровачког трговца (као нап. 4/II)

<sup>13</sup> Rad 116, 41 и 45 (Штефан Герлах).

<sup>14</sup> Rad 136, 85 (писмо Ђорђа Доусе о путу у Цариград, 1591.).

<sup>15</sup> Rad 84, (Бецек, 1564.); Rad 112, 215 (путовање Давида Угнада, 1572.); Rad 116, 15 (Штефан Герлах); Starine XXII, 182—3 и Rad 100, 134 (Пигафета, 1567.); Ч. Мијатовић, н. н., 199 (Бузбек, 1555.) и 216 (Вратислав из Митровиц, 1591.); О. Зиројевић, Рајнолд Лубенау (1587.), 54; Ј. Богичевић, н. н., књ. V, св. 1 (Прандштетер, 1608.).

<sup>16</sup> Dergschwat, 9 и 10; Влаинац, 11 и 12.

<sup>17</sup> Rad 62, 102 (Катарин Зен, 1550.); Rad 84, 90 (Бецек, 1564.); Rad 112, 183 (К. Рим, 1571.); Rad 116, 43 (Штефан Герлах, 1578.), — М. Безолт је констатовао да се софијски Јевреји баве најважнијим занатима (И в. Шишманов, н. н., 440).

<sup>18</sup> Rad 62, 107 (Катарин Зен 1550.); Rad 124, 44—45 (Ђ. Соранцо, 1575.);

<sup>19</sup> Starine XXII, и Rad 100, 108—9.

<sup>20</sup> Rad 84, 69 (безимени италијански путописац, 1559.); Rad 124, 31 (Ђ. Соранцо, 1575.).

<sup>21</sup> Dergschwat, 5 и 263; Влаинац, 7 и 47; Lettres du baron de Busbec 1,40.

<sup>22</sup> Starine XXII, и Rad 100, 120 (Пигафета).

<sup>23</sup> Rad 62, 73 (Жан Шено, 1550.), 113 (Катарин Зен, 1550.); Rad 84, 49 (Мелхјор Сајдлин); Rad 116, 34 (Штефан Герлах); Rad 124, 46 (Ђ. Соранцо, 1575.).

<sup>24</sup> Rad 136, 31 (Љоренцо Бернади, 1591.).

<sup>25</sup> Ч. Мијатовић, н. н., 206.

<sup>26</sup> Rad 62, 98—99 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>27</sup> Као бел. 11/XIV.



u Beogradu Italijana, Dalmatinaca, Hrvata i Grka, odnosno Grka, Mađara, Erdeljana i Dalmatinaca<sup>28</sup>, u Sofiji i mnogih hrišćanskih trgovaca<sup>29</sup>, u Sarajevu pored Dubrovčana i drugih trgovaca.<sup>30</sup>

Putopisci često na nekonkretan način beleže mnogo dućana i živu trgovinu u pojedinim mestima. Živa trgovina odnosno mnogo dućana i trgovaca pominju se u Foči i Novom Pazaru 1533. i 1550. godine.<sup>31</sup> Beograd je nekim putnicima bio pun dućančića i trgovina.<sup>32</sup> Navodno, nekada velika varoš sa mnogo trgovaca, Niš je sredinom i u drugoj polovini XVI veka vodio malu trgovinu.<sup>33</sup> O Sofiji se govori kao o značajnom tržištu, dobro snabdevenom robom, gde se mnogi bave kupoprodajom i gde se stiču mnogi trgovci sa strane.<sup>34</sup> Veliki broj dućana i bazara s raznom robom čekao je putnike sa Zapada i u Plovidivu.<sup>35</sup> Čak je i prijepolje označeno kao „svačim dobro snabdeven trg“.<sup>35a</sup>

Postoje i nešto detaljniji podaci zapadnih putopisaca o trgovini i zanatској производњи gradova na južnoslovenskom prostoru u XVI veku. Za Foču, na primer, zabeleženo je (1547., 1559., 1574.) da je tamo izvođen jasad, tj. da se sprečavao dalji transport ka moru konja (koji vrede više od 20 dukata) i druge određene robe, da se ne bi izvozili u Italiji.<sup>36</sup> U Novom Pazaru nalazilo se skladište dubrovačkih trgovaca i jedan vrlo dugi bazar, gde je bilo dućana svake vrste, a naročito zanatlija koji su izrađivali predmete od gvožđa (topuze, turske lokote, medenice itd.), i to od gvožđa koje se vadilo u Gluhavici.<sup>37</sup> Iz susedne Toplice dubrovački trgovci izvozili su za Italiju kože, vunu i vosak.<sup>38</sup>

Položen na ušću Save u Dunav i na početku velikog Carigradskog drumа, Beograd je imao izuzetan privredni i strateški značaj. Sa nekoliko lučkih „pogona“, Beograd je ostvarivao veoma veliki robni i putnički promet Dunavom i Savom. Preko beogradskog pristaništa prolazio je vojni transport (hrana, topovi i municija, plen), jer je Beograd predstavljao vojni logor ne samo za ratiste u Panoniji, nego čak i za Dalmaciju, vek kasnije.

<sup>28</sup> О. Зиројевић, *Рајнолд Лубенау*, 54; Ч. Мијатовић, н. н., 216 (Вратислав из Митровиц, 1591.).

<sup>29</sup> *Rad* 84, 90 (Беџек, 1564.).

<sup>30</sup> *Rad* 62, 125 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>31</sup> *Rad* 56, 211 и 214 (Рамберти, 1533.); *Rad* 62, 71 (Жан Шено); М. Ј. Динић, н. н. 87 и 89 (Жак Гасо, 1548.).

<sup>32</sup> О. Зиројевић, *Рајнолд Лубенау*, 54; *Starine* XXII, 182 и *Rad* 100, 134 (Пигафета, 1567); Ј. Богичевић, н. н., 445 (Прандштетер, 1608; продаја свиле, тканина, одећа и свакојаке друге робе).

<sup>33</sup> *Rad* 62, 72 (Жан Шено, 1550.); А. Верансис, н. д., I, 306 и *Rad* 71, 26; *Starine* XXII, 179 и *Rad* 100, 131 (Пигафета, 1567.); И. Б. Шишманов, 453.

<sup>34</sup> А. Верансис, н. д. I, 315 и *Rad* 71, 31; *Rad* 112, 218 (посланство Давида Унгнада, 1572.); *Rad* 124, 85 (Паоло Контарињ, 1580.).

<sup>35</sup> А. Верансис, н. д. I, 326; *Starine* XXII, 175 и *Rad* 100, 117 (Пигафета, 1567.); *Rad* 124, 77 (Паоло Контарини, 1580.).

<sup>35a</sup> М. Ј. Динић, н. н. 99 (Ф. Дифрен-Кане, 1573.).

<sup>36</sup> Р. Самарцић, н. д., 112 (Жан Шено, 1547.), 135 (Пјер Лескалопје, 1574.); *Rad* 84, (Мелхиор Сајдлиц, 1559.).

<sup>37</sup> *Rad* 124, 66 (Паоло Контарини, 1580.); М. Ј. Динић, н. н. 99 (Ф. Дифрен-Кане 1573; велики трговачки град).

<sup>38</sup> Исто, 81.

U Beogradu se, najzad nalazilo i brodogradilište.<sup>39</sup> Kolika je bila vrednost robe pojedinih trgovaca neka posluži jedan konkretan navod: u proleće 1572. u požaru je jednom dubrovačkom trgovcu, navodno, izgorelo robe za ogromnu svotu od 30.000 dukata.<sup>40</sup> Čeh Vratislav iz Mitrovic (1591.) hvalio je bezistan kvadratastog oblika oko koga su bile poređane prodavnice, i gde je sve bilo udešeno kako treba za sigurnost espapa i udobnost trgovaca.<sup>41</sup> U bezistenu imali su radnje raznovrsni obrtnici — krojači, obućari, nožari, suknari itd. Građevinari su u Beogradu, kao i po drugim velegradovima u evropskom delu Turske, bili zaslužnjeni hrišćani, osobito Italijani, kojih je u Beogradu bio veliki broj.<sup>42</sup> U gradu se nalazila i velika barutana (u koju je jednom udario grom te su stradale mnoge kuće).<sup>43</sup>

Smederevo je takođe bilo vrlo aktivno пристаниште, preko kojeg se, pored žitarica, naročito transportovla erdeljska so, koja se dovozila hrastovim ladama.<sup>44</sup>

Skoplje je predstavljalo već na početku XVI veka bogato stečište plodova zemlje.<sup>45</sup> Sredinom stoleća, pored dosta hrane (žitarice, meso) tu se nalazila velika količina koža i voska koji se preko Lješa izvezio u Ankonu. Među Dubrovčanima bilo je takvih koji su vrlo jevtino nakupovali zemlju, te su podigli vinograde, koje su obrađivali robovi nabavljeni od Turaka a Dubrovčani su trgovali vinom.<sup>46</sup> Jedan kasniji putopisac (1575.) beleži, pored jevtinih životnih namirnica, i veliku trgovinu kožom i vunom.<sup>47</sup> Već je pomenuto da je bitoljsko tržište trgovalo žitom, voskom, vunom i kožama.

Sofija je obilovala svakom vrstom ratarskih proizvoda, mesom i svim drugim što je bilo potrebno za život. Tu se štavila izvrsna koža pod trgovačkim nazivom „bugarska“, obojena crveno i žuto i prijatnog mirisa. U varoši su se izradivale i najfinija krzna (*feltri*), koja su imala dobru prođu.<sup>48</sup> Pored mnogobrojnih zanatlija, kao građevinari služili su robovi (zarobljenici) (koji su zidali blatom, bez kreča i pečene cigle).<sup>49</sup> Među zanatima poseban položaj imala je proizvodnja oružja i konjske opreme, naročito za vojne potrebe.<sup>50</sup> Paolo Kontarini (1580.) „koji je bio najdetaljniji, spomenuo je sledeću robu: prekrasne cipele, ulare, sedla, amove i drugu konjsku opremu, pokrivače, češljeve, cinkane medenice, kabanice, kože, vunenu robu. Zanatlije su bile smeštene u posebnim ulicama, u kojima su

<sup>39</sup> Вид. о томе на основу путописачке и друге грађе: Б. Храбак, *Београд као пристаниште и бродоградилниште у XV, XVI и XVII веку*, Годишњак града Београда V (1958), 27—52.

<sup>40</sup> Rad 112, 215 (путовање Давида Угнада).

<sup>41</sup> Ч. Мијатовић, н. н., 216.

<sup>42</sup> Rad 116, 15—6 (Штефан Герлах, 1573).

<sup>43</sup> Rad 84, (Бедек, 1564).

<sup>44</sup> Dernschwam, 26 8 и 8; Влаинац, 46 и 8.

<sup>45</sup> D. Kniewald, н. н., 37 (Ф. Петанчић, 1502.).

<sup>46</sup> Matković, *Dva talijanska putopisca*, 253; Rad 84, 69 (безимени италијански путописац, 1559.).

<sup>47</sup> Rad 124, 31 (Ђ. Соранцо).

<sup>48</sup> *Starine* XXII, 176—77; Rad 100, 122—23 (Пијафета, 1567.).

<sup>49</sup> Dernschwam, 14—15; Влаин, ц. 15.

<sup>50</sup> Rad 62, 102 (Катарин Зен, 1550.).



se međutim prodavali i prehrambeni proizvodi (sočivo, grašak, pasulj, suvo grožđe i sušene smokve, povrće, hleb, meso razne vrste i sl.).<sup>51</sup>

U Plovdivu bi se u vreme vašara stekli trgovci iz celog Osmanlijskog carstva, i to pre svega zbog toga što se u mestu mogla kupiti i najbolja vuna u velikim količinama. Tu se proizvodila najtanja aba (tkanina), koja se izvozila u Siriju, Damask i Alep.<sup>52</sup> U Tatarpazardžiku pominju se velike štale i kovačnice.<sup>53</sup> Slično kao u Plovdivu, i u Drinopolju su se svake godine sticali trgovci iz Rusije, Poljske, Moldavske, Vlaške, Ugarske i iz ostalih podunavskih zemalja, te su dovozili razne tkanine, noževe, izradevine od cinka i bakra, krzna i drugo. Godine 1551. tu je izgorelo 6300 dućana (te su posle toga trgovačke radnje počeli zidati od kamena).<sup>54</sup>

Putopisci sa zapada, izuzev vašara u Plovdivu, ne pominju panađure po južnoslovenskim zemljama u XVI stoleću.

Pada u oči da u XVI veku uz najveću arteriju evropske Turske — Carigradski drum nije bilo većih naselja i trgova, ako se izuzme nekoliko velegradova, mada su se gradska naselja upravo pod Turcima masovno pojavila i razvila. Pored još nedovoljno sazrelih robno-novčanih odnosa i stalno prisutnog vojno-osvajачkog karaktera države, verovatno su u tome imali udela veliki trgovinski i zanatski centri, koji su stekli, u izvesnom smislu monopolistički karakter, te su lokalna tržišta uvlačili u poslovne mreže svojih trgovaca.

#### 15. DRUMOVI, TRANSPORTNA SREDSTVA I OBJEKTI ZA SMEŠTAJ PUTNIKA I ROBE

Za privremena strujanja potrebno su značajni drumovi, transportna sredstva i objekti za smeštaj putnika i robe.

Osnovne saobraćajnice u slovenskom delu Balkana bili su Carigradski i Dubrovački drum, drum sa područja Kosova severnim delom Makedonije na Ćustendil, Samokov i Kosteničku banju (u dolini Marice), putevi sa arbanaskog primorja iz Lješa i Drača, ka Skoplju i Ohridskom jezeru, odakle je jedan preko Bitolja i Vodena vodio ka Solunu. U Bosni postojao je poprečan kontinentalni drum iz Bosanske Krajine ka Sarajevu, Foči i Novom Pazaru, i drum koji je Sarajevo vezivao za Kupres, Livno i splitsko primorje. Najzad, od značaja je bio i drum, koji je iz istočne Trakije, pored Crnog mora vodio ka delti Dunava i dalje za Poljsku i Rusiju. Na ostalim drumovima manje su se vidjeli stranci — putnici. Manje-više svi pomenuti magistralni putevi postojali su i pre dolaska Turaka. Na pojedinim deonicama Carigradskog drumu sačuvan je čak deo kamene podloge drumu. Turska vlast, pre svega zbog potrebe vojnog transporta, nastojala je da održava stanje prohodnosti na pomenutoj arteriji.<sup>1</sup>

<sup>51</sup> Rad 124, 85, 86. — Жак Натан се позива на путописца кад утврђује претежно занатски карактер градова под Турцима (н. д., 110, 113—4.).

<sup>52</sup> Rad 62, 107 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>53</sup> A. Verancsics, н. д. I, 323 и Rad 71, 40.

<sup>54</sup> Rad 62, 113 (Катарин Зен).

<sup>1</sup> О друмовима под Турцима доста се у нас писало (К. Костић, Ердељановић и др., да се и не помене К. Жиречек.). Последњих година Цариградском друму између Београда и Софије посвећена је и једна докторска дисертација (О. Зиројевић). — О другим друмовима који су могли да се употребе за инвазију против Турске вид.: D. Kniewald, *Feliks Petancic i njegovo djelo*, Beograd 1961, 45.

Kao saobraćajna sredstva na navedenim drumovima služili su volujska kola i karavani, sastavljeni od konja ili kamila. Na Dunavu, Savi, Velikoj Moravi, donjem toku Drine i na nekim drugim pritokama Dunava dosta je bio razvijen rečni transport lađama, ili izuzetno, splavovima. Dernašvam je zabeležio prevlačenje kolima olova iz Smedereva za Sofiju i Carigrad, što je već pomenuto, odnosno prevoz soli iz Smedereva u Nikopolj i obrnuto, kao i duž Carigradskog drumu. Na jednom mestu zabeležio je da se platno transportovalo tovarnim konjima.<sup>2</sup> Dolinom Marice i dalje na sever Carigradskim drumom upotrebljavala se i kamila, naročito za vojni transport hrane i municije.<sup>3</sup> Karavani su zabeleženi i na južnom rubu Makedonije, između Soluna i Kavale.<sup>4</sup>

Plovidba Dunavom između Budima i Beograda predstavljala je gotovo isključivi deo itinerara putnika koji su dolazili iz srednje Evrope. Promet nizvodno obavljao se do Smedereva, ali potom, preko Đerdapskog klanca manje,<sup>5</sup> dok je bilo slučajeva uzvodnog transporta vojnih potreba i soli sa donjeg Dunava i iz nikopoljskog pristaništa u pravcu Beograda.<sup>6</sup>

Za veći promet na Carigradskom drumu — a na drugim saobraćajnicama i više — dugo nije bilo smeštaja za putnike i robu. U vezi s tim Dernašvam je pisao da u celoj Turskoj nema gostionica kao u hrišćanskom svetu, nego da putnici moraju noćivati „u ono nekoliko karavan-saraja, koji su sagradili turski carevi, paše, begovi i slični imućni ljudi”; u privatne kuće se ne može svraćati niti su one za to građene, zbog čega tamo gde nema karavan-saraja putnici „moraju ležati po polju kao ciganske družine”.<sup>7</sup> Karavanseraja nije bilo po selima<sup>8</sup>, nego samo po varošima i trgovištima. Gotovo da nema putopisca koji ne pominje karavanseraje a nešto kasnije (XVII vek) i hanove. U većim mestima (Beograd, Smederevo, Plodiv, ali i Niš<sup>9</sup> pa i Čajnice<sup>10</sup> i Jagodina<sup>11</sup>) bilo ih je po nekoliko ili čak mnogo<sup>12</sup>. Ovde će se saopštiti samo bogatiji iskazi o njima.<sup>13</sup>

Štefan Gerlah (1573.) je zapisao da su karavanseraji samo prazne gostionice, u kojima se ne može dobiti ni hrane, ni pića, ni prenoćište, tako da su više konjušnice.<sup>14</sup> Slično se tih godina o karavanseraju u današnjoj

<sup>2</sup> Dernašvam, 6 и 14; Влаицац, 7 и 14.

<sup>3</sup> Ив. Шишманов, н. д., 419.

<sup>4</sup> Rad 136, 48—9 (Лоренцо Бернардо, 1591.).

<sup>5</sup> Rad 112, 174 (К. Рям, 1571.); Rad 116, 15 (Штефан Герлах).

<sup>6</sup> Вид, уредбу о смедеревској и видинској скали из 1482: Beldiceanu, н. д. I 157.

<sup>7</sup> Dernašvam, 23 и 36; Влаицац, 18—19.

<sup>8</sup> Starine XXII, 176; Rad 100, 118.

<sup>9</sup> Dernašvam, 257; Влаицац, 43.

<sup>10</sup> Р. Самарцић, н. д., 128 (Филип Дифрен—Кане, 1573.).

<sup>11</sup> Rad 62, 102 (Катарин Зен, 1550.).

<sup>12</sup> Rad 129, 60 (Безолт); Ив. Шишманов, н. д., 411.

<sup>13</sup> Каравансераје према записима путописаца и на основу других извора врло је детаљно и зналачки обрадио Хамдија Крешевљаковић (*Hanovi i karavanseraji u Bosni i Hercegovini*, Сарајево 1957). Податке о каравансерајима на Цариградском друму од Београд а до Софије претресла је Олга Зиројевић у својој докторској дисертацији (стр. 37—42 рукописа).

<sup>14</sup> Rad 116, 14—15. — Можда је због тога Лоренцо Бернардо (1591.) поменуо каравансерај у Струги „за коње”.



Smederavskoj Palanci izrazio Salomon Švajger (1577.): „Ove gostionice su na selu često ništa drugo nego veliki prostrani hambar ili sjenjak, bez gostioničara, a putnik ne može ništa dobiti, ni jelo, ni pilo, jedino da se skloni od kiše, bure, snijega i žege; hranu mora sa sobom voziti, a sijeno i ječam za konje mora kupiti.”<sup>15</sup> Na karavanseraju se u svom putopisu duže zadržao i baron Buzbek, opisujući zdanje, niše sa ognjištem u kojima se jelo i spavalo i smeštaj tovarne stoke; u niškom karavanseraju zatekao je i jednog Persijanca.<sup>16</sup> Paolo Kontarini (1580.) je za karavanseraj u Harmanli zapisao da je imao mnogo dućana, gde su Grci prodavali vino a Turci pirinač, suvo grožđe i drugo.<sup>17</sup>

Dernšvam je ostavio opis karavanseraja u Grockoj: u njemu je bilo 24 ognjišta i dve separatne sobe sa kaminima, dve prostorije sa senom i ječnom, mesta za 200 konja a pred zgradom bunar.<sup>18</sup> Po velegradskim karavanserajima stanovale su neoženjene zanatlije, koje su iznosile na prodaju sve što su izradile: to su obično bili obučari, koji su za smeštaj plaćali dnevnu kiriju, nisu kuvali, nego su hranu uzimali od aščija.<sup>19</sup> Aščije bi u jednom bakraču imale čorbu a u drugom ovčje meso, ali je bilo i crnog i belog luka te voća. Kao i van karavanseraja, čorba se kuvala od pšenice, graška, sočiva i pasulja sa komadićima ovčeg mesa a najbolja je bila čorba od pirinča, obojena u žuto šafranom i sladena šećerom.<sup>20</sup>

U Beogradu je u samom gradu i izvan njega bilo nekoliko lepih kamenih karavanseraja, od kojih su se isticali četiri, rađena po istom stilu, kamenom i opekam i pokrivenih olovom, sa popločanim dvorištem (i konjušnicom) u sredini zgrade. Ta zdanja imala su po dva sprata, sa sobicama u nizu, svaka sa svojim ognjištem. Najveći karavanseraj bio je Mehmed-paše Čuprilića, koji se niz godina gradio u blizini dubrovačkih dućana, pre svega materijalom dobijenim rušenjem tri pravoslavne crkve i jedne jevrejske sinagoge. U sklopu toga karavanseraja nalazio se bezistan, tj. ulica sa čije obe strane su postojali dućani sa svakojakim esapom.<sup>21</sup> Pre toga, sredinom XVI veka (1555.) novi veliki karavanseraj u Beogradu bio je Tujgan-pašin, blizu državnog slagališta hrane, i koji je jednom svojom stranom, uz veliki trošak, bio ukopan u stenu a ostale strane bile su ozidane; iznutra bio je dugačak 53 a širok 23 koraka; na sve četiri strane bila su podignuta uzvišenja od koraka i po, na kojima su mogli ležati ljudi, imajući pored sebe svoje privezane konje; tu je bilo i 26 ognjišta, na kojima se obično kuvalo; po sredini, na dve strane, uzdužno, bilo je podignuto po osam četvorouglastih stubova koji su držali krov zdanja. Duž cele zgrade protezale su se nadstrešnice, ispod kojih je bilo odeljenja gde se prodavalo seno, ječam i meso i gde su radili potkivači; karavanseraj je imao veliki ulaz, a iznutra je bila banja s obe strane, prema ozidanim ognjištima.<sup>22</sup>

<sup>15</sup> Rad 116, 88.

<sup>16</sup> *Lettres du baron de Busbec*, II, 49—52; Ив. Шишманов, II, 350.

<sup>17</sup> Rad 124, 92—3.

<sup>18</sup> Dernschwam, 5; Влаинац, 4.

<sup>19</sup> Dernschwam, 231, Влаинац, 19.

<sup>20</sup> Dernschwam, 25, Влаинац, 19.

<sup>21</sup> Rad 116, 15—6 (Штефан Герлах); *Starine XXII*, 182—3 и Rad 100, 134 (Пигафета, 1567.); Ив. Шишманов, II, 410; Ј. Богичевић, II, књ. V, св. 1 (Грандштетер, 1608.).

<sup>22</sup> Dernschwam, II, 262; Влаинац, 46—7.

## ZAKLJUČAK

Vesti putnika iz hrišćanskih zemalja (naročito iz Austrije i Mletačke republike) o privrednim prilikama južnoslovenskih zemalja pod Turcima u XVI veku imaju relativnu vrednost kao historijski izvori. Oni se u konkretnom vidu odnose samo na terene pored drumova kojima su putopisci, prolazili. Relativnost zavisi i od pojmova tih ljudi o obrađenosti i o prosperitetu privrede, a ovi pojmovi nisu mogli biti ujednačeni i zavisili su od odnosa tih ljudi prema privrednim aktivnostima, od bogatstva zemalja iz kojih su dolazili i od drugih razloga. Putopisne zabeleške nisu mogle biti ni mnogo precizne, jer su se putopisci malo zadržavali na mestima koja su opisivali. Zbog subjektivnog karaktera putopisa kao izvora, za puno njihovo korišćenje potrebno je vršiti poređenja sa podacima iz drugih izvora. Uži stručnjaci iz pojedinih privrednih grana (na primer za rudarstvo) mogu upotrebljavati putopisne beleške i bez većeg kompariranja, jer obaveštenja drugih izvora zamenjuje njihovo tehničko znanje. Sve južnoslovenske zemlje i svi krajevi nisu ni izdaleka jednako zastupljeni u putopisima; izrazito su slabo opisivani Makedonija, severna i severozapadna Bosna, severozapadna i zapadna Srbija i podunavski deo Bugarske, pa i njeno crnomorsko primorje.

Na privredne prilike evropske Turske u XVI stoleću nesumnjivo su delovali zakoni robne i tržišne privrede. Usled različitih privrednih uslova i raznolike primene rada i došlo je do različitog stepena bogatstva proizvođača u raznim oblastima, pri čemu je na privredni prosperitet po pravilu delovala veća ili manja udaljenost od državnih granica, vojnih drumova i gradskih naselja. Zbog tržišnog karaktera privrede razvila se prilično snažna trgovina, uz prisutnost predstavnika „trgovačkih nacija” — Dubrovčana, Jevreja pa i Grka. Karakteristično je pri tome bilo da su gotovo isključive stavke izvoza činili proizvodi stočarstva, tj. sirovine i polupreradevine. Zbog delovanja pomenutih zakona i moglo je doći do pojave tzv. revolucije cena i u evropskom delu Otomanske carevine. Ovim nije, međutim, rečeno da je to tržište bilo kapitalističkog tipa, jer se, na primer, pri kupovini velikih količina žitarica u poznatim žitnicama Balkana dešavalo i tokom XVI veka da su se veliki štokovi robe od istih izvoznika skuplje plaćali nego male količine od siromašnih seljaka, što odgovara principima trgovine feudalne epohe. Dolaskom Turaka i stvaranjem jednog carstva bez carinskih granica i feudalnog sudstva, i to carstva u kome su pokreti trupa, seobe kolonista i kretanje seljaka na državne rabote te tranzitna trgovina bili veliki — transport robe, i to ne samo skupih tkanina i začina, nego i primarnih elemenata ishrane (žitarice, vino, so, ribe i sl.), metala (olova, gvožnja) sirovina (kože, vosak, vuna, pokrivači, kabanice) i trgovačke robe (platno, zanatske izradevine) nesumnjivo svedoči o jednoj robnoj privredi, u kojoj je novac imao čarobno dejstvo i na gospodare Turke i na raju, seljake. Orijentalna civilizacija koju su Osmanlije prenele u Evropu počivala je na velikom broju malih i prostranih gradova, sa gradskim potrošačkim stanovništvom; time je robni, potrošački karakter života i privrede samo potenciran. Zahtevi tržišta za kvalitetnom robom vodili su rejonizaciji proizvodnje, tj. intenziviranju proizvodnje u oblastima koje su mogle pokazati viši kvalitet (vinogradarski i voćarski rejoni, pirinčana polja i sl.). Ova rejonizacija vodila je stvaranju regionalnog tržišta za pojedine proizvode.



Opšti privredni uslovi omogućavali su bogaćenje neposrednih proizvođača, pre svega seljaka. Seljaku je, pak, bio potreban novac jer je ceo društveni i znatan deo privrednog života prešao na kolosek robno-novčane privrede. Ovo bogaćenje Turci su i svesno i nesvesno sprečavali svojom stalnom legalnom i nelegalnom pljačkom seljaka, koji se nije smeo obogatiti, jer nije predstavljao „državotvorni” elemenat. Jedina privredna grana koja je omogućavala stabilniju akumulaciju bilo je stočarstvo, gde su intervencije Turaka mogle biti mnogo manje. Od privrednih grana u nesumnjivom opadanju nalazili su se: vinogradarstvo, gajenje svinja, rudarstvo obojenih metala a do 70-ih godina XVI veka i žitarstvo. U oblasti ratarstva napredovali su: povrtarstvo, voćarstvo, izvesne kulture koje su se masovno proširile dolaskom Turaka (pirinač, verovatno puzava loza), kao i neke „industrijske” biljke kao sezam, konoplja, mak, ponegde i šafran (na primer, oko Peći) a možda i lan. Zanimljivo je da pamuk nigde nisu pomenuli putnici sa Zapada. Nisu videli ni krompir ni duvan. Kukuruz uopšte pominje samo jedan putopisac, jer njega još nije bilo u južnoslovenskim zemljama. Funkciju kukuruza imalo je tada u velikoj meri proso. Od žitarica ovas (za konje) bio je vrlo redak. U stočarstvu preovladavale su ovce i koze, u severnim delovima Poluostrva i goveče, koje je služio i za vuču, jer je konj bio slabo zastupljen u gazdinstvu seljaka. U južnim delovima Balkana kao radna i transportna životinja služili su bivoli. U svim južnoslovenskim zemljama pod Turcima mogla se videti kamila kao sredstvo transporta. Sa razvojem turskim gradova napredovalo je i živinarstvo. Pčelarstvo se ponovo obnavlja, posle zastoja u XV i u početku XVI veka. Ribolov je takođe bio intenzivan. Širenje šume u retko naseljenim oblastima kao i livada i u bolje napučenim krajevima takođe predstavljaju karakteristične odlike privreda južnoslovenskih zemalja koje se mogu sagledati na osnovu putopisa. Sve veći transport uslovio je podizanje velikih karavanseraja počev od sredine XVI veka.

Tokom XVI stoleća usled postepene privredne stabilizacije i posebno u vezi sa delovanjem tržišne privrede krajevi u dubljoj unutrašnjosti ili podalje od vojnih drumova pokazivali su napredak. Posebno treba zabeležiti prosperitet sofajskog polja od sredine i pljevaljskog kraja i izvesnih delova Bosne (izvesna kraška polja, jugoistočni deo Bosne, zvrnički kraj) od druge polovine XVI veka. U isto vreme, severna Srbija uz Carigradski drum i dolina Marice prema Drinopolju pokazuju sve veću zapuštenost. Zbog širenja šuma i pašnjaka, ratarskih terena je bilo manje, ali su oni, sudeći prema nekim vestima, bolje obrađivani, čak i u zapuštenim krajevima (na primer žitarstvo smederevske i niške okoline). Sa velikim skokom cena žitarica i sa uticajima tzv. revolucije cena, zemlja je postala dragoceni izvor prihoda, te se na nju, svakako od 70-ih godina XVI stoleća, obraća veća pažnja, naročito u širem pojasu oko varoši i u izvesnim zaklonjenijim obastima (zapadna Makedonija, kraška kraška polja po Bosni, svakako i severoistočna Bosna, severozapadna i zapadna Srbija i podunavska Bugarska). O jačanju stočarstva sredinom i u drugoj polovini XVI veka najbolje svedoči dubrovačka arhivska građa o izvozu proizvoda stočarstva. U vezi s tim jačali su i zanati koji su prerađivali kožu i vunu. Izuzetno, napredak su pokazivali i zanati koji su obrađivali gvožđe, i to naročito u Bugarskoj.



*Bogumil Hrabak*

# RELATIONS DES VOYAGEURS DE L'EUROPE CHRETIENNE SUR LES CONDITIONS ECONOMIQUES DES PAYS SLAVES DANS LES BALKANS SOUS LA DOMINATION TURQUE AU XVI-e SIECLE

## (Résumé)

Après avoir donné un aperçu de l'intérêt que suscitaient dans la science bulgare, serbe et croate les relations de voyages entrepris dans la période turque de l'histoire des Balkans, l'auteur constate une modification de l'intérêt dans les relations de voyage à partir du XVI-e siècle par rapport aux relations de voyages antérieures; il existe maintenant: 1) la nécessité pour les voyageurs d'être munis de connaissances pratiques et de renseignements lors du voyage; 2) la recherche des restes de l'antiquité classique; 3) les efforts visant à établir les propriétés caractéristiques du peuple. Lorsqu'il s'agit de l'Empire Ottoman agrégé, il existait également un très vif intérêt politique pour l'étude de ses conditions, ce qui était aussi la raison fondamentale de l'apparition d'un grand nombre de relations de voyages écrites par les représentants de toutes les nations développées de l'Europe chrétienne de cette époque. L'auteur s'est occupé aussi de la question concernant la valeur des assertions faites dans les relations de voyages.

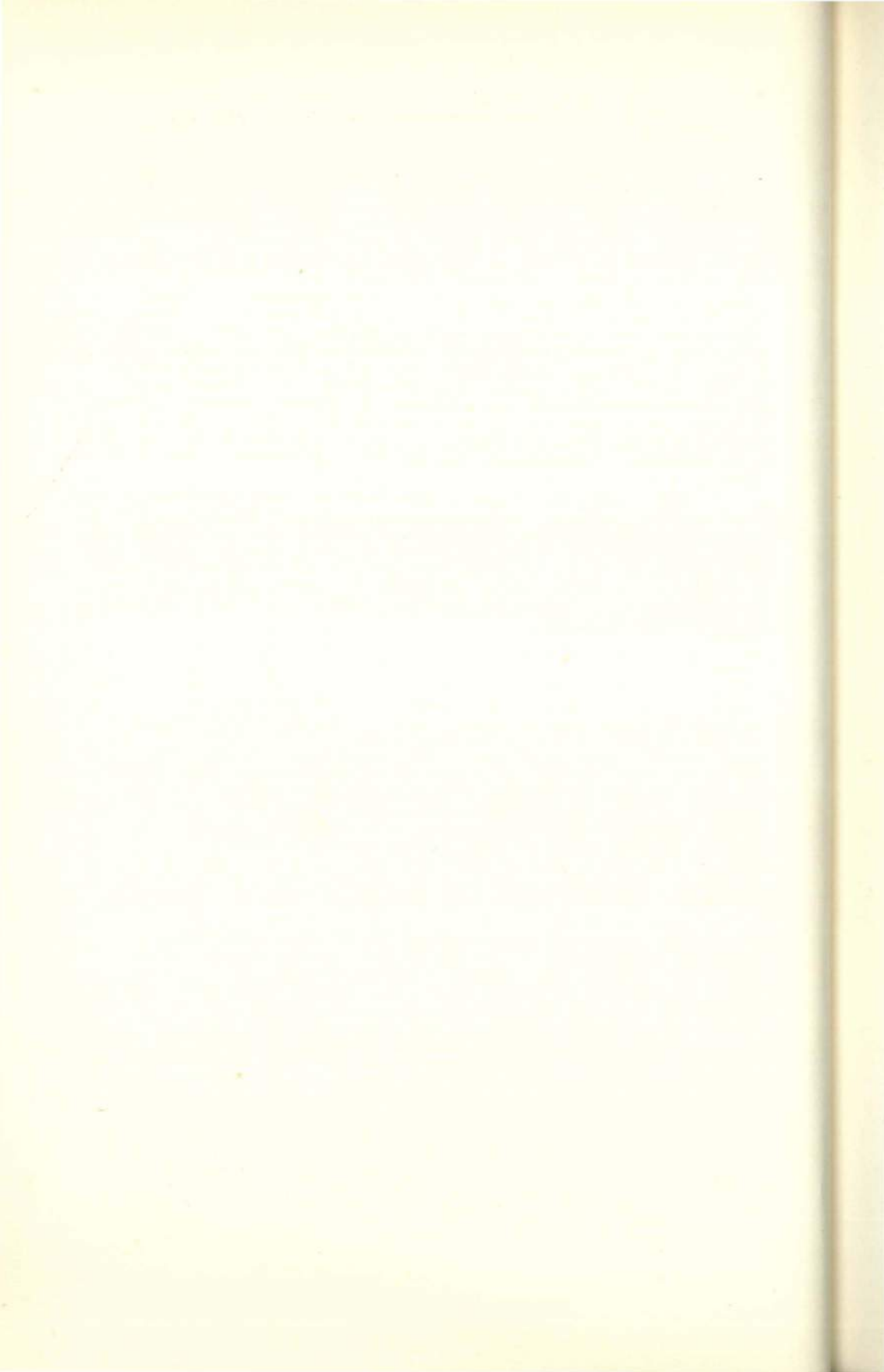
Les données incidentes et sommaires contenues dans les relations de voyages (qui venaient pour la plupart de l'Autriche et de Venise) ont été développées en plusieurs chapitres, à savoir: 1) L'aspect physique des terrains le long des grandes routes militaires et de commerce au XVI-e siècle; 2) évaluations sommaires de l'état de culture des terres et les causes particulières de la culture insuffisante et de la faible densité de population; 3) les renseignements fournis par les voyageurs du XVI-e siècle sur la culture des céréales parmi les peuples slaves des Balkans sous la domination turque au XVI-e siècle; 4) les champs de riz en Serbie et en Bulgarie selon les voyageurs de l'Occident au XVI-e siècle; 5) les vignobles et les vins aux pays des Slaves du Sud sous les Turcs au XVI-e siècle; 6) la culture des fruits aux vergers situés à côté des agglomérations urbaines et la culture des légumes aux jardins autour des maisons en ville; 7) autres cultures agricoles; fumage et irrigation des champs; 8) l'expansion des forêts le long des routes aux pays slaves des Balkans au cours du XVI-e siècle; 9) l'établissement des conditions pour le développement de l'élevage et pour un commerce intensif des produits d'élevage; 10) la pêche sur le Danube, sur ses affluents venant des Balkans et sur les lacs de montagne au XVI-e siècle; 11) l'extraction et l'utilisation de minerais d'argent, d'or et de fer dans les provinces turques habitées par les Slaves du Sud au XVI-e siècle; 12) les premières mentions des sources d'eaux minérales en Bosnie et en Serbie dans les relations des voyageurs de l'Occident; 13) les prix bas des produits locaux et l'intérêt que prenaient au XVI-e siècle les paysans sud-slaves à l'acquisition de la monnaie; 14) les commerçants et les objets du commerce dans les villes de la partie slave des Balkans sous la domination turque au XVI-e siècle; 15) les routes, moyens de transport et bâtiments pour le logement des voyageurs et l'emménagement des marchandises.

Dans la conclusion l'auteur constate que les conditions économiques de la Turquie européenne au XVI-e siècle étaient sans doute soumises à l'action des lois de l'économie de marché et de marchandises, non pas de type capitaliste mais encore de type caractéristique de l'époque féodale. Par l'arrivée des Turcs, accompagnée de grands mouvements de l'armée, des masses laborieuses et du commerce de transit, le transport des marchandises s'intensifie, en premier lieu le transport des éléments primaires de l'alimentation, des métaux et des matières premières, les seules qui figurent dans l'exportation à côté des demi-produits. La civilisation orientale que les Ottomans avaient transportée en Europe, reposait sur un grand nombre de petites et de grandes villes, dont le caractère économique et de vie était basé sur la production de marchandises et la consommation intensifiées. Les conditions économiques générales rendaient possible l'enrichissement des producteurs directs en premier lieu des paysans, mais les Turcs empêchaient cet enrichissement, de façon consciente et inconsciente, par des exactions constantes, légales et illégales, car le paysan chrétien ne représentait pas un élément „constitutif de l'Etat". L'unique branche de l'économie qui permettait une accumulation plus stable était l'élevage où, les interventions des Turcs ne pouvaient être que beaucoup moins importantes.



L'auteur a donné aussi l'analyse de la stagnation ou de l'essor économiques par branches de l'économie particulières. En décadence étaient, sans doute: la viticulture, l'élevage des porcs, l'extraction des minerais de métaux précieux et de métaux non-ferreux et jusqu'aux années soixante-dix du XVI-e siècle, aussi la culture des céréales. Dans le domaine de l'agriculture prospéraient: le maraîchage, la culture des fruits, certaines cultures qui s'étaient répandues par l'arrivée des Turcs (le riz, probablement la vigne rampante etc.), ainsi que certaines plantes „industrielles", telles que le sésame, le chanvre, le pavot. Le coton, le lin, le tabac et la pomme de terre ne sont pas mentionnés par les voyageurs et il n'y avait pas, non plus, de maïs, dont la place en économie était en partie occupée par le millet. Dans le domaine de l'élevage, outre les moutons et les chèvres, il prédominait le boeuf dans les parties septentrionales de la Péninsule, le buffle dans les parties méridionales et le chameau sur toutes les routes militaires. L'apiculture fut renouvelée après la stagnation au XV-e siècle et au commencement du XVI-e siècle. La pêche était également intensive. L'expansion des forêts dans les régions à la population clairsemée et l'expansion des prairies dans les régions à la population plus dense représentaient aussi les traits caractéristiques de l'économie des pays sud-slaves sous les Turcs au XVI-e siècle. Le transports croissant a donné lieu à la construction de grands caravansérails à partir du milieu du XVI-e siècle.

L'auteur a constaté que les progrès étaient le plus manifestes dans les régions assez éloignées des routes militaires et de frontières et dans celles à côté des villes. La Serbie du Nord, le long de la route de Constantinople et la vallée de la Marica vers Andrinople témoignaient un abandon de plus en plus grand. L'expansion des forêts et des pâturages réduisait la superficie des terrains labourables, mais ceux-ci, à juger d'après certaines informations, étaient mieux cultivés, même dans les régions abandonnées. Avec la hausse des prix des céréales et avec les influences de la soi-disant révolution des prix, la terre devenait une source attrayante du revenu.





VILIM VAJGAND—MILETA JAREDIĆ  
ELISAVETA STANIŠIĆ—MERITA ŠEHDULJE

### ODREĐIVANJE CINKA U KONCENTRATU RUDE IZ RUDNIKA TREPČA

U literaturi postoje dosta brojni podaci o kompleksometrijskom određivanju katjona sa EDTA upotrebom metalindikatora. Razrađene su metode i za određivanje metala u smesi upotrebom maskirnih sredstava.

Körbl i Přibil<sup>1)</sup> preporučuju metiltimolplavo kao indikator za kompleksometrijsko određivanje cinka sa EDTA pri vrednostima pH od 6 do 6,5. Indikator daje sa jonima cinka kompleks intenzivno plave boje koja se na završnoj tački titracije oštro menja u svetlo-žutu.

Međutim, ova brza i udobna metoda kojom se mogu određivati katjoni pojedinačno i u smeši često ne daje dobre rezultate ako se vrši određivanje katjona u rudama ili legurama. Glavnu komponentu često prate mikrokoličine drugih katjona koji mogu da blokiraju indikator tj. da se vežu sa indikatorom u stabilna kompleksna jedinjenja i time onemoguće određivanje završne tačke titracije. Za tu svrhu je najuniverzalnija potenciometrijska titracija katjona sa EDTA na živinoj elektrodi u prisustvu male količine Hg-EDTA. Nedostatak metode je što se ne može upotrebiti u prisustvu maskirnih sredstava koja sa živinim jonima grade jako stabilne komplekse.

Mi smo u ovom radu imali cilj da uporedimo rezultate pri određivanju cinka gravimetrijskim metodama, vizuelnom kompleksometrijskom i potenciometrijskom titracijom.

#### EKSPERIMENTALNI DEO

Radi određivanja cinka u olovno-cinkanoj rudi rudnika Trepče uzeli smo uzorak sa oznakom KOP F-A 22 V 66. Rudu smo rastvorili u carskoj vodi i metodama kvalitativne hemijske analize našli:  $\text{SiO}_2$ , S, Fe, Zn, Pb, Mn, Al i Cu.

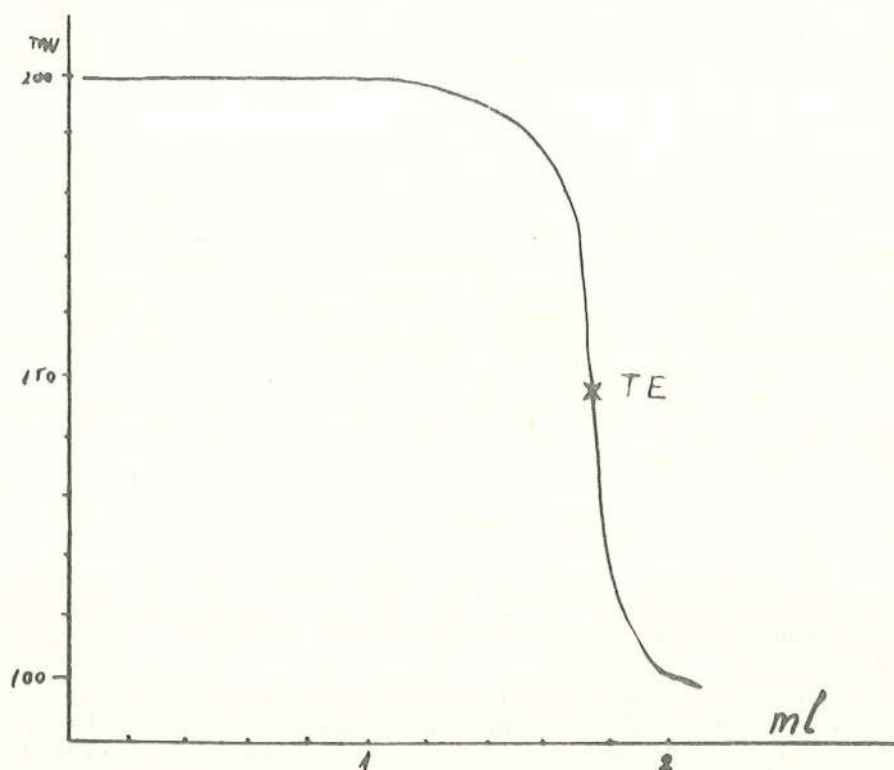
Da bismo izvršili kvantitativnu analizu rude, uzorak smo oksidovali pušljivom azotnom kiselinom i kalijumnitritom u čijem se prisustvu oksiduju i oni sulfidi koji se oksiduju samo carskom vodom. Carsku vodu smo izbegavali jer bi hloridi smetali pri titraciji na živinoj elektrodi.

Posle oksidacije odredili smo  $\text{SiO}_2$  u vidu nerastvornog ostatka, a olovo smo staložili i odredili u obliku  $\text{PbSO}_4$ . Iz filtrata smo odvojili Fe,

Al, Mn amonijumhidroksidom i amonijum hloridom uz dodatak vodonikperoksida. Iz preostalog rastvora smo odvojili bakar elektrolizom zakiselivši rastvor sumpornom kiselinom. Cink smo odredili kao cinkpirofosfat. Talog sa gvožđem, aluminijumom i manganom smo rastvorili u 1:1 razblaženoj hlorovodoničnoj kiselini. Gvožđe i aluminijum smo odvojili pomoću amonijaka i amonhlorida i odredili kao  $R^2O^3$ . Mangan smo odredili iz preostalog rastvora u obliku pirofosfata. Rezultati analize su dati u tabeli 1.

Tabela 1 — Procentni sastav katjona u olovo-cinkanoj rudi

| Broj proba | Pb    | Zn    | $R^2O^3$ | Mn    |
|------------|-------|-------|----------|-------|
| 1.         | 7,20% | 4,97% | 45,01%   | 0,45% |
| 2.         | 7,18% | 4,92% | 44,96%   | 0,44% |
| 3.         |       | 5,10% |          |       |
| 4.         |       | 5,08% |          |       |



Sl. 1 — Titracija cinka 0,1 M rastvorom EDTA na Hg elektrodi u prisustvu Hg-EDTA kompleksa



Posle gravimetrijskih određivanja cink smo određivali titracijom sa EDTA uz metiltimolplavo kao indikator. Titraciju smo vršili u amonijumacetatnom puferu. Odvajanje cinka od ostalih komponenata rude vršili smo na napred navedeni način. Analizom dve probe dobili smo 5,00% i 5.01% cinka u uzorku. Odstupanje srednje vrednosti ovih rezultata od srednje vrednosti gravimetrijskih rezultata 0,01%.

Titracija uz PAN indikator nije uspela najverovatnije zbog prisustva mikrokoličine nekog elementa koji blokira indikator.

Radi upoređenja rezultata izvršili smo titraciju cinka sa EDTA potenciometrijski na živinoj elektrodi<sup>2</sup>. Titraciju smo vršili u acetatnom puferu pri pH 4,7 u prisustvu male količine Hg-EDTA. Kriva titracije je data na sl. 1. U toku titracije potencijal se menja od +200 do +100 mV. Promena potencijala u okolini tačke ekvivalencije iznosi 40 do 50 mV.

Ovom metodom smo dobili, analizom dveju proba gore navedene rude, 5,01 i 5,03 procenta cinka, što je blisko ranije navedenim rezultatima.

Da bi utvrdili dali se cink kvantitativno odvajava od ostalih komponenata napravili smo veštačku smesu mešajući rastvore poznatih koncentracija tako da je sastav smese isti kao u ispitivanoj rudi. Pošto smo odvojili cink od ostalih komponenata kao i u predhodnim analizama, odredjivali smo ga titracijom rastvorom EDTA uz metiltimolplavo kao indikator u amonacetatnom puferu. Rezultati su dati u tabeli II.

Tabela II — Rezultati kompleksometrijske titracije cinka u veštačkoj smesi rastvorom EDTA uz metiltimolplavo kao indikator

| Odmereno mg cinka | Nađene mg cinka | Relativna greška |
|-------------------|-----------------|------------------|
| 12,04             | 12,38           | —0,016           |
| 12,40             | 12,38           | —0,016           |
| 12,40             | 12,38           | —0,016           |
| 12,40             | 12,37           | —0,025           |
| 12,40             | 12,36           | —0,032           |
| 12,40             | 12,35           | —0,040           |
| 12,40             | 12,35           | —0,040           |
| 19,85             | 19,82           | —0,015           |
| 19,85             | 19,75           | —0,050           |

Iz tablice se vidi da se cink može kvantitativno odvojiti od ostalih komponenata navedenom metodom i odrediti rastvorom EDTA.

#### REAGENSI I APARATURA

Tačnim odmeravanjem supstance napravili smo 0,1 M rastvor dinatrijumove soli EDTA.

Standardni rastvor cinka smo odredili gravimetrijski preko cink-pirofosfata.

Merenja potencijala smo vršili na pehametru "RADIOMETER",

## LITERATURA

1. Körbl, J., Přibil, R., Chem. Listy, 51, 1061, 1957.
2. Reilley, Ch. N., Schmid, R. W., Anal. Chem., 30, 947, 1958.
3. Treadwell, F. P., Kvantitativna hemijska analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1952, str. 89 i str. 98.

## РЕЗЮМЕ

В этой работе разработан метод отделения Zn, от Pb, Fe, Al и Mn в руде и его количественное определение комплексометрической титрацией раствором EDTA визуельно с метилтимолголубым индикатором и потенциометрически на Hg электроде.

Полученные результаты этих определений отличаются от весовых определений только на сотую долю процента.

Анализом искусственной смеси, которая содержала такое же количество выше упомянутых катионов как в руде, установлено что цинк количественно разделяется от остальных компонентов.

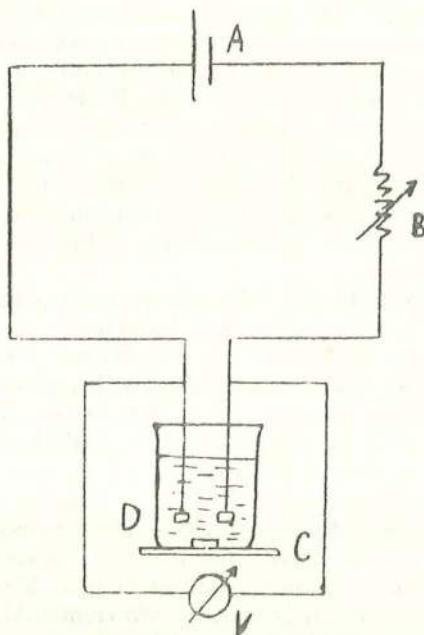


VILIM VAJGAND—ELISAVETA STANIŠIĆ

### TITRACIJA NEKIH JONOVA METALA U PRISUSTVU POLARIZOVANIH VOLFRAMOVIIH I MOLIBDENOVIIH ELEKTRODA

Za kompleksometrijsko određivanje metala pored obične potenciometrijske titracije pri kojoj se upotrebljava nepolarizovana indikatorska elektroda u praksi sve više nalaze primenu titracije kod kojih se radne elektrode polarizuju. Ove metode su od značaja jer ne zahtevaju upotrebu specifičnih elektroda, što je važno pri praktičnom radu.

Prema podacima iz literature do sada su za ovu tehniku rada upotrebljavane uglavnom elektrode od platine. Tako su bakar, olovo i cink titrovani pri  $\text{pH}=10$  u prisustvu polarizovanih platinskih elektroda<sup>1</sup>. Polarizovane platinske elektrode Vorliček i Vydra<sup>2,3</sup> su upotrebili za biamperometrijsku tit-



Sl. 1 — A — Akumulator B — otpornik C — mešalica D — elektrode V — voltmetar

raciju EDTA-om nekih tipično reversnih ( $\text{Fe}^{3+}$   $\text{Cu}^{2+}$ ) i ireversnih ( $\text{Bi}^{3+}$ ) sistema u kiselim ili neutralnim rastvorima. Ove elektrode su se pokazale pogodne i za titraciju zemnoalkalnih metala u jako alkalnoj sredini ( $\text{pH}=14$ )<sup>4</sup>, čak je sa uspehom titrovana i smeša tih jonova. Pored polarizovane platinske elektrode za titraciju velikog broja katjona u širokoj oblasti pH upotrebljene su jedna ili dve polarizovane živine elektrode<sup>5</sup>. Za titraciju zemnoalkalnih metala, takođe, dobre rezultate su dale polarizovane grafitne elektrode<sup>4</sup>. Polarizovane grafitne elektrode upotrebljene su i za titraciju nekih drugih elemenata, npr. urana<sup>6</sup>, dok za indirektnu titraciju kadmijuma Katagawa upotrebljava dve kapljčave polatizovane elektrode<sup>7</sup>.

Pošto u literaturi nismo našli podatke da su polarizovane volframove i molibdenove elektrode upotrebljene pri kompleksometrijskim tetracijama za određivanje jonova metala, postavili smo zadatak da ispitamo ponašanje ovih elektroda i mogućnost njihove primene u titracijama.

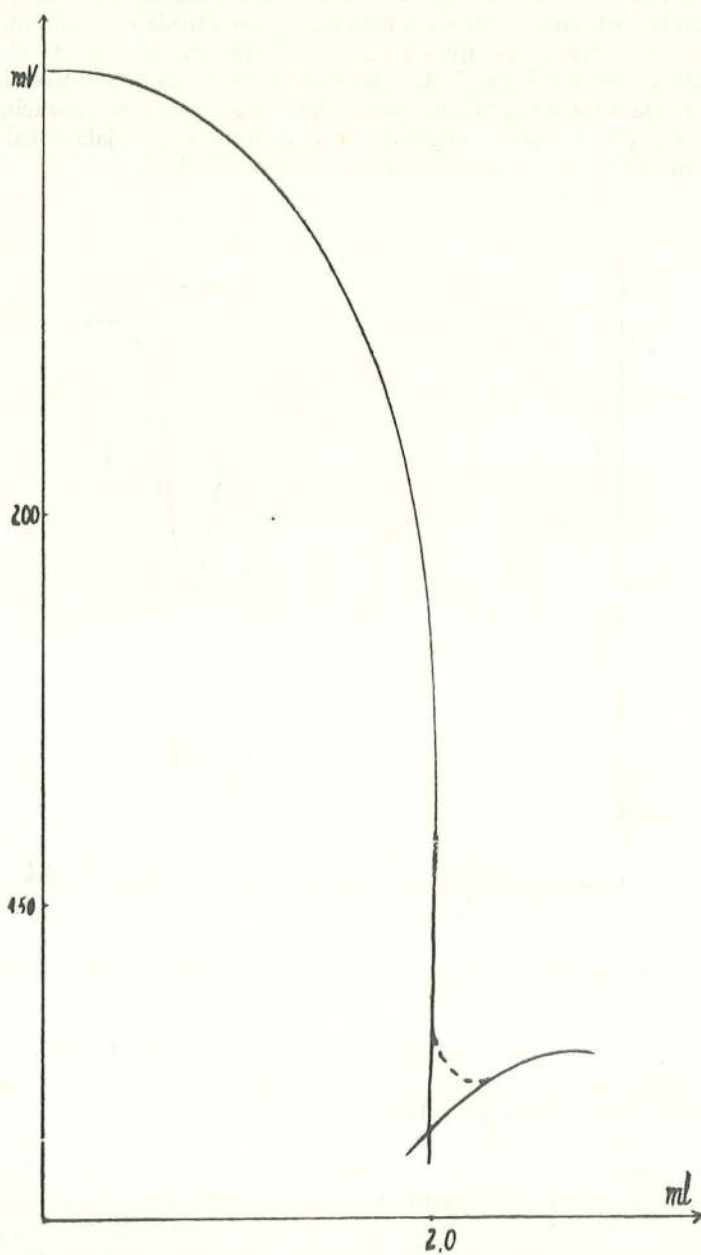
Volframove i molibdenove elektrode, kao metaloksidne elektrode, najčešće su upotrebljavane za merenje pH rastvora<sup>8,9</sup> i potencijometrijska titracija kiselina i baza<sup>10,11</sup>. Pored toga one su primenjivane i pri titraciji metalnih jonova kompleksom III, ali pri običnim potencijometrijskim titracijama<sup>12,13</sup>.

*Eksperimentalni deo* — Shema aparature kojom smo vršili titraciju prikazana je na sl. 1.

Potreban napon za polarizaciju elektroda dobijali smo iz akumulatora od 2,6 V. Struja preko otpornika od 1—11 M  $\Omega$  dovedena je na elektrode koje su potopljene u rastvor elektrolita. Na ovaj način smo podesili da kroz elektrode protiče struja jačine  $I=2,5\mu\text{A}$ ,  $25\mu\text{A}$  i  $250\mu\text{A}$ . Na cevnom voltmetru, pH meter „Radiometer” 22p merena je elektromotorna sila sistema a na drugom anodni ili katodni potencijal u odnosu na zasićenu kalomelovu elektrodu. Rastvori koji smo upotrebili u toku rada pripremili smo iz supstance čistoće p. a. rastvaranjem u redestilovanoj vodi. Rastvore metala standardizovali smo uobičajenim metodama i čuvali u polietilenskim sudovima. Kao titraciono sredstvo upotrebili smo najčešće EDTA p. a. firme „Lafoma” i „Reanal” čiji rastvor smo standardizovali prema normalnom rastvoru cinka ili kalcijum karbonata u prisustvu metalindikatora eriohrom crno T<sup>14</sup>. Pripremili smo i primarni standardni rastvor EDTA vršeći predhodno prečišćavanje rekristalizacijom po Blaedel-u<sup>15</sup>.

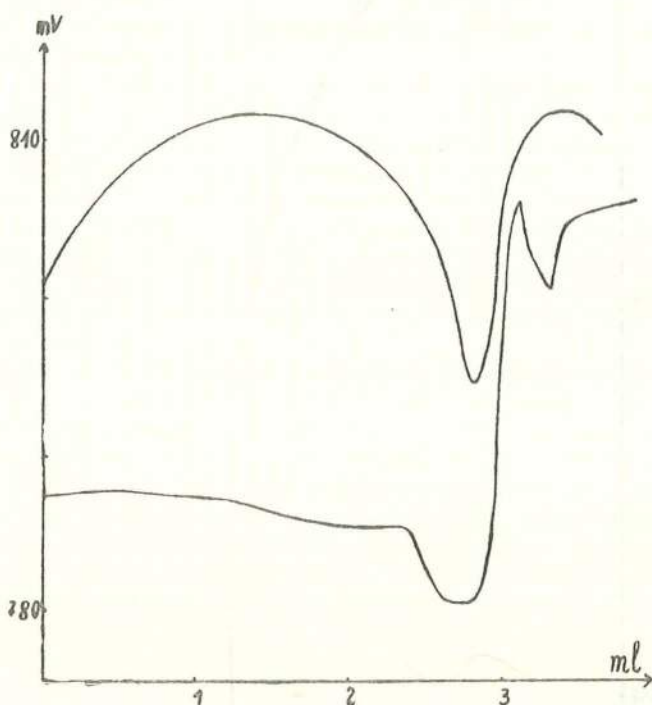
Oblik titracionih krivih, dobivenih pomoću polarizovanih volframovih elektroda, u najvećem broju slučajeva karakterišu se minimumom na tački ekvivalencije. Oštrina minimuma kao i veličina promene potencijala zavisi od jona koji se titruje. Tako, dok kod titracije kadmijuma po dodatku 0,04 ml 0,1 M rastvora EDTA promene potencijala iznose 30—40 mV, usled čega se titracija može izvesti sa velikom tačnošću, dotle kod nikla za istu koncentraciju titracionog sredstva i po dodatku 0,1 ml ova promena iznosi svega 15 mV. Zbog tako malih promena vrh krive je zaobljen, pa je u tim slučajevima tačka ekvivalencije određena iz preseka ekstrapolisanih krivih izvučenih krivuljarom. (sl.2). Kao negativni efekat pri radu sa volframovim elektrodama treba spomenuti sporo uspostavljanje potencijala. Međutim, ova teškoća se može izbeći čitanjem potencijala na jednakim vremenskim razmacima. Zamena volframovih elektroda molibdenovim elektrodama ne dovodi ni do kakvog poboljšanja. Promene potencijala sa molibdenovom elektrodom još su slabije





Sl. 2 — Titraciona kriva nikla u prisustvu polarizovanih volframovih elektroda pri jaćini struje  $I=25$  A

izražene nego kod volframove elektrode, a stacionarno stanje na elektrodama se sporo uspostavlja. Osim toga, ispitane su i elektrode od bizmuta, antimona, tantala, silicijuma, germanijuma i urana. Međutim, nijedna od ovih elektroda nije dala dobre rezultate. Tako, pri radu sa uranovom elektrodom primetili smo da ona sponatano menja potencijal u rastvoru i bez titracije pri čemu postaje čas pozitivniji čas negativniji. Ni merenje potencijala u jednakim vremenskim razmacima nije dalo nikakve rezultate. (Sl. 3).

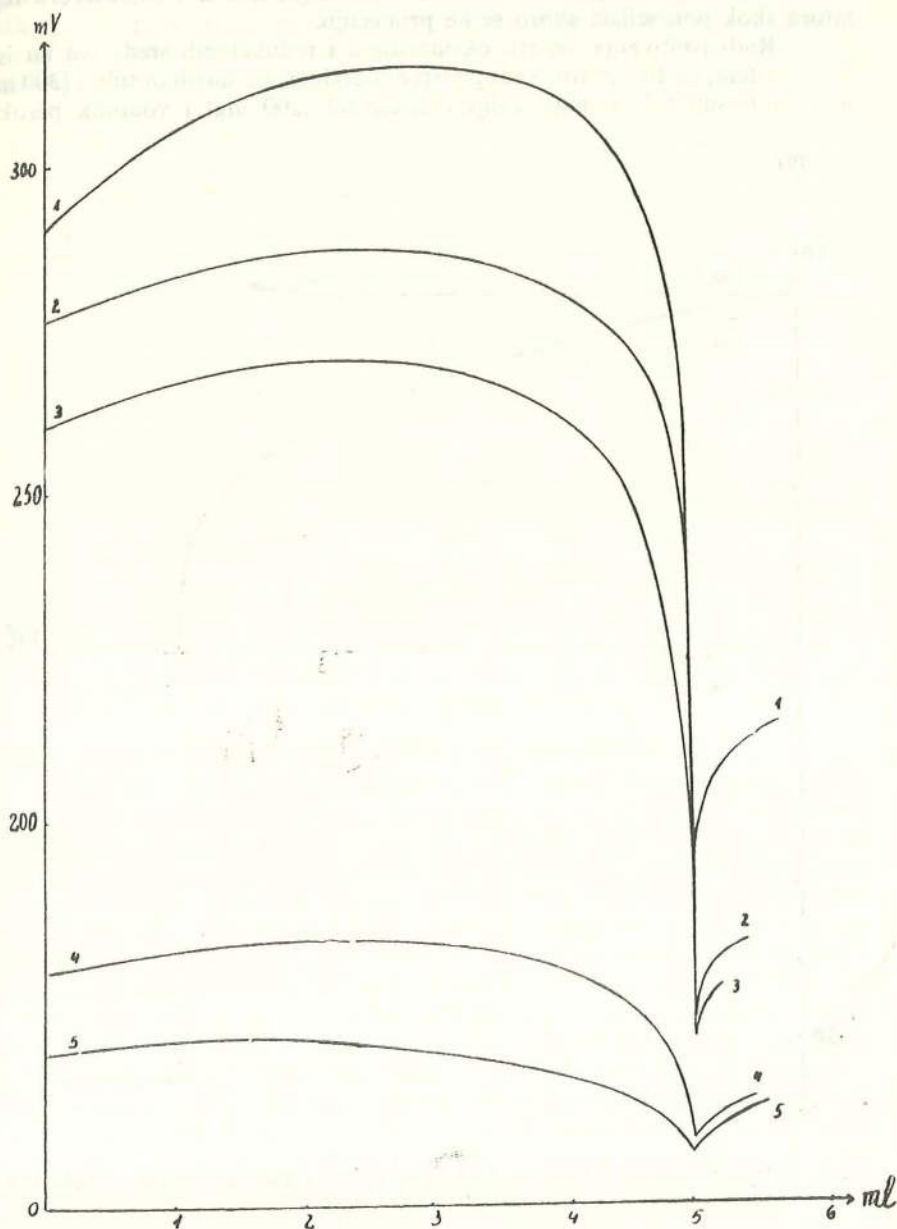


Sl. 3 — Krive dobivene pri titraciji olova u prisustvu polarizovanih uranovih elektroda čitanjem potencijala na jdnakim vremenskim razmacima

U cilju da se nađu što bolji uslovi rada ispitivan je uticaj raznih faktora: koncentracija regulatora, jačina struje, oksidacionih i redukcionih sredstava i brzine mešanja rastvora.

Kao što se i očekivalo, koncentracija regulatora vrlo jako utiče na veličinu promene potencijala oko završne tačke titracije. Prevelike količine regulatora u tolikoj meri smanjuju promene potencijala da se završna tačka i ne zapaža. Ovo odnosi se pre svega na slučaj kada se titruju oni joni koji i sa regulatorom grade komplekse, ali veliki višak regulatora nepovoljno utiče na tačnost određivanja i onih jonova koji ne grade komplekse sa sastojcima regulatora. U poslednjem slučaju smanjuje se aktivitet ispitivanog jona. Iz sl. 4 vidi se da u 0,1 M i 0,2 M amonijačnom regulatoru nema veće razlike u

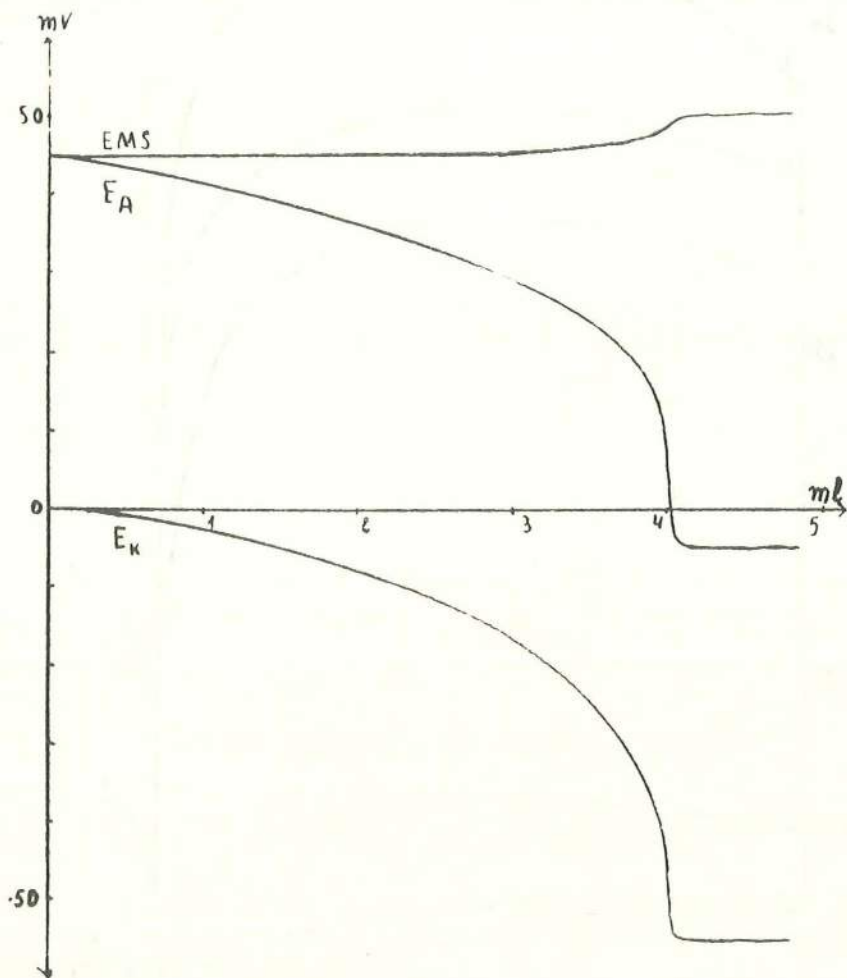




1. 4 — Krive dobivene pri titraciji kalcijuma sa polarizovanim volframovim elektrodama prisustvu različitih količina regulatora. Kriva 1—0,1 M, kriva 2—0,2 M, kriva 3—0,4 M, kriva 4—1 M i kriva 5—2 M.

veličini skoka potencijala oko tačke ekvivalencije, dok u 4 M rastvoru regulatora skok potencijala skoro se ne primećuju.

Radi ispitivanja dejstva oksidacionih i redukcionih sredstava na ispitivani sistem, na 100 ml titrovanog rastvora dodate su: natrijum sulfat (300 mg), natrijumtiosulfat (300 mg), kalijumfericijanid (200 mg) i vodonik peroksid



Sl. 5 — Titraciona kriva kalcijuma,  $E_a$  i  $E_k$  sa polarizovanim volframovim elektrodama u prisustvu  $K_3/Fe(CN)_6$ .

(5 ml 30%). U prisustvu redukcionih sredstava, prema očekivanjima, cela kriva je pomeren prema negativnim potencijalima. U prisustvu oksidacionih sredstava anodni i katodni potencijal postaju pozitivniji nego u rastvorima bez oksidacionih sredstava, što je i razumljivo. Anodna i katodna grana opadaju



skoro u jednakoj meri tako da njihova razlika ostaje stalna. Zbog toga se ovakve titracije mogu izvoditi samo sa polarizovanom anodom ili katodom koja je spregnuta sa referentnom elektrodom, a ne može se titrovati mereći elektromotornu silu između anode i katode. (Sl. 5).

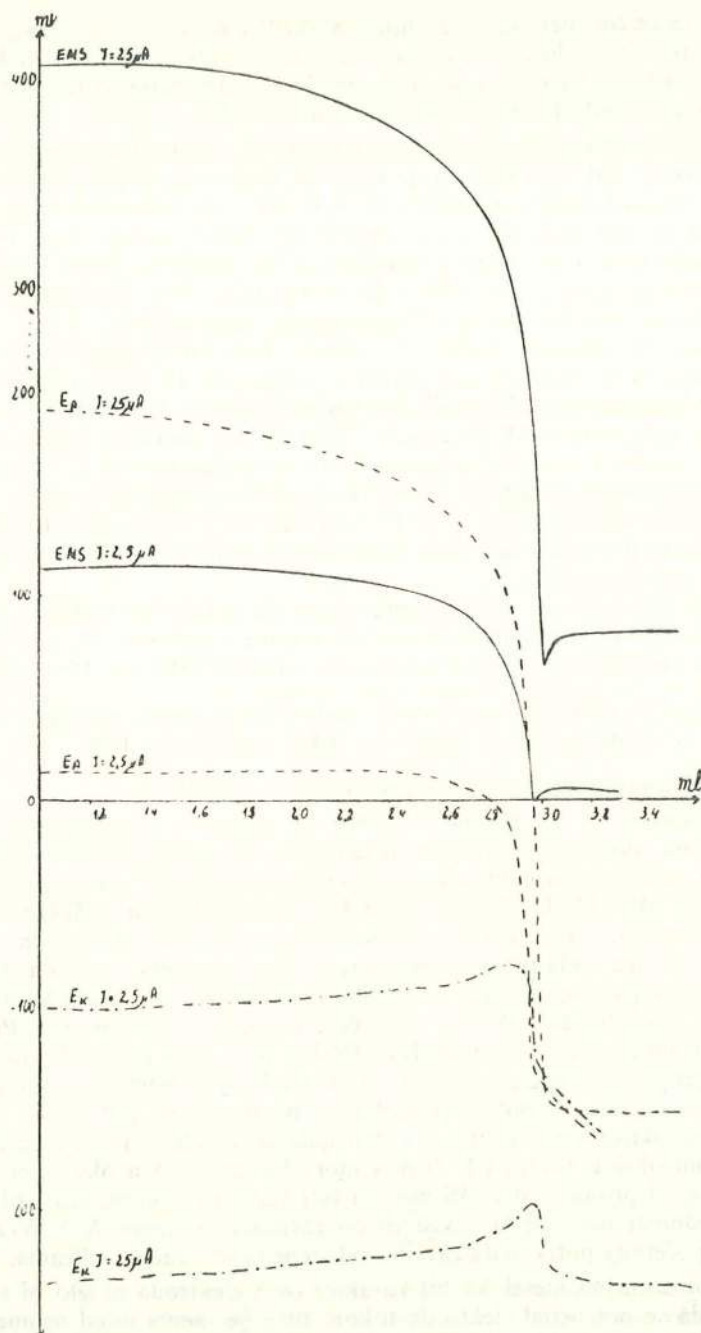
Interesantno je bilo posmatrati kakav je efekat struje na oblik titracione krive tj. kako gustina struje utiče na promenu oblika titracione krive kao i na veličinu skoka potencijala. Iz sl. 6 vidi se da važan faktor za uspešnu indikaciju završne tačke titracije je pogodno izabrana gustina struje. Porastom jačine struje raste i promena potencijala, ali pri upotrebi jakih struja, usled koncentracione polarizacije, dolazi do veoma jake vibracije skazaljke instrumenta tako da titracija pri tim uslovima postaje neizvodljiva.

Radi proučavanja hemijskih reakcija koje karakterišu tok titracije i oblik titracione krive merili smo promene potencijala na anodi i katodi prema zasićenoj kaolomelovoj elektrodi. Analizom krivih (sl. 6) za anodni i katodni potencijal vidi se da oblik titracionih krivih (EMS) najvećim delom zavisi od promena na anodi. Na anodnoj grani (kada se dodaje rastvor EDTA rastvoru ispitivanog metala) primećuje se stalno opadanje potencijala, što se najbrže vrši oko tačke ekvivalencije, za razliku od katodne grane koja se tokom titracije stalno menja, i na kojoj se do tačke ekvivalencije primećuje blagi priraštaj a potom pad potencijala.

Ove promene na elektrodama mogu da potiču od različitih uzroka: usled promene koncentracije volframatnih jonova u rastvoru,  $E_w = F(c_{wo4}^{2-})$ , oksidacija niževalentnog jona u viševalentno stanje ( $Pb^{+2} \xrightarrow{+2e^-} Pb^{+4}$ ), promena pH rastvora ili promena koncentracije vodonikovih jonova na anodi i katodi, promene u oksidnom sloju elektrode, usled cementacije ( $Cu^{2+} \xrightarrow{+2e^-} Cu^0$ ) i najzad, usled eventualne oksidacije samog rastvora EDTA.

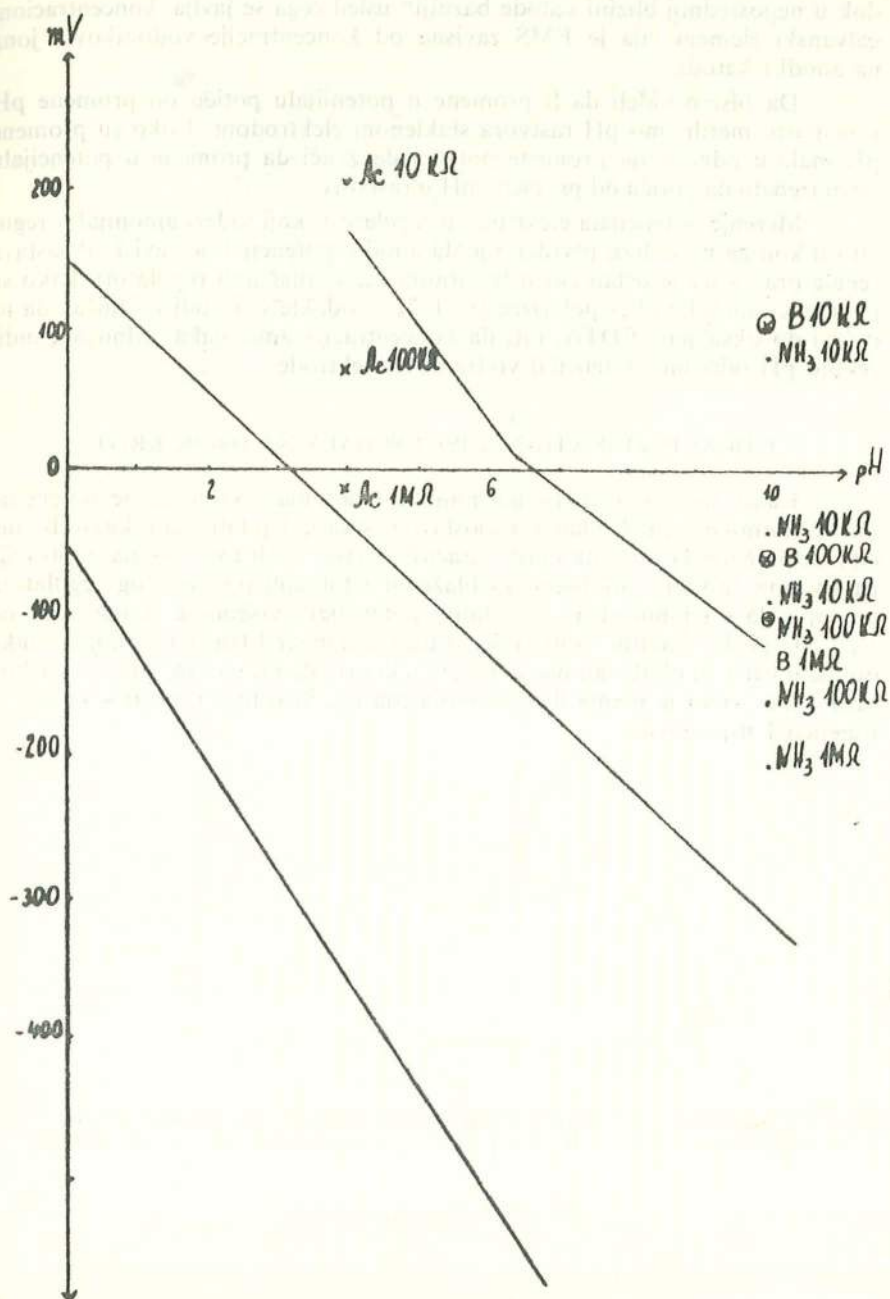
Pretpostavka da potencijal zavisi od promene koncentracije volframatnih jona može da važi samo iznad  $pH=10$ , jer potencijal volframove elektrode menja se kao funkcija od koncentracije  $WO_4^{2-}$  samo u oblasti od  $pH=10$  do  $pH=14$ . U slučaju da se EDTA kompleksira sa  $WO_4^{2-}$  jonom, anodni potencijal ostaje niži sve dok se rastvoru ne doda jon metala u višku. Kada se rastvoru doda metal u višku ravnoteža se pomera u pravcu stvaranja metalnog kompleksona koji je stabilniji. Građenje  $Me-EDTA$  kompleksa prouzrokuje oslobađanje  $WO_4^{2-}$  usled čega i anodni potencijal raste. Promene u tom slučaju zavise od odnosa  $K_s MY/K_s WY$ . Ovo je, međutim, teško proveriti jer je metal već predhodno vezan graditeljem pomoćnog kompleksa. S druge strane, kako je potencijal elektrode pozitivniji od potencijala elektrohemijjski redukovano volframa i potencijala elektrode koja odgovara intermedijarnom oksidu  $WO_{2.9}$  (sl. 7) ona mora biti pokrivena oksidnim slojem a usled toga i promene u EMS moraju biti vezane sa promenama oksidnog sloja. Vrednosti potencijala zavisi će od ravnoteže sistema  $WO_3/WO_2/W$ , a vrednost početnog potencijala zavisice od stepena oksidacije volframa.

S obzirom na metaloksidni karakter ovih elektroda moglo bi se pretpostaviti da se potencijal elektroda tokom titracije menja usled promene pH rastvora ili promene pH u neposrednoj blizini elektroda. Ukoliko se na anodi stvaraju vodonikovi joni, rastvor u neposrednoj blizini anode postaje kiseliiji



Sl. 6 — Krive dobivene pri titraciji olova u prisustvu polarizovanih folframovih elektroda jačinom struje  $I=2,5 \mu A$  i  $I=25 \mu A$ .





Sl. 7 — Krive pH—mV. Kriva A — elektrohemijski redukovani volfram, kriva B — redukcija volframa do  $WO_{2,9}$  i kriva C — elektroda s kojom smo radili.

dok u neposrednoj blizini katode bazniji<sup>16</sup> usled čega se javlja koncentracioni galvanski element čija je EMS zavisna od koncentracije vodonikovih jona na anodi i katodi.

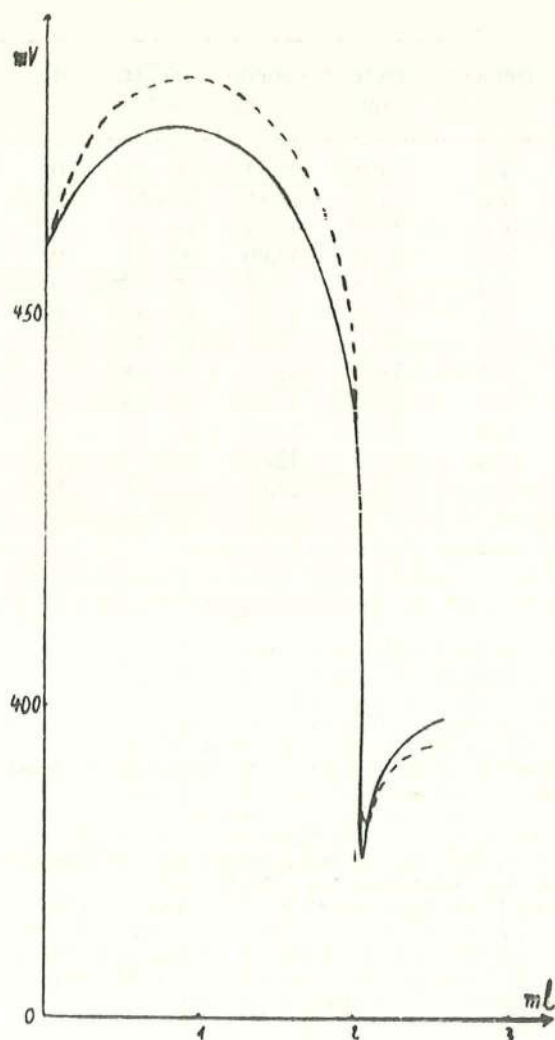
Da bismo videli da li promene u potenciijalu potiču od promene pH u rastvoru merili smo pH rastvora staklenom elektrodom. Kako su promene pH male u odnosu na promene potencijala znači da promene u potenciijalu ne bi trebalo da potiču od promene pH u rastvoru.

Merenje potencijala elektroda u regulatoru koji sadrži amonijak i regulatoru koji ga ne sadrži, utvrđeno je da anodni potencijal ne zavisi od sastava regulatora — jer je ostao isti u boratnom i amonijačnom regulatoru kako sa polarizacijom tako i bez polarizacije (sl. 7) — odakle se izvodi zaključak da ne dolazi do oksidacije EDTA, niti da koncentracija amonijaka, odnosno, indirektno pH određuje potencijal volframove elektrode.

#### UTICAJ BRZINE ČITANJA POTENCIJALA NA OBLIK KRIVE

Kako smo još u preliminarnim ispitivanjima utvrdili da se potencijal na volframovim elektrodama uspostavlja sporo, ispitali smo kako brzina čitanja potencijala utiče na oblik titracione krive. Radi toga vršena je titracija ispitivanog rastvora pri istom razblaženju istoj količini dodatog regulatora i istoj polarizacionoj struji, a čitanje potencijala vršeno je u razmaku od 1', 2', 3', posle dodatih istih količina titracionog sredstva. Krive koje se tako dobijaju istog su oblika ali na završnoj tački pri čitanju na kraćim vremenskim razmacima kriva je manje ili više zaobljena (sl. 8) usled sporosti s kojom se potencijal uspostavlja.





Sl. 8 — Krive dobivene pri titraciji kalcijuma pri  $\text{pH}=10$  u prisustvu polarizovanih elektroda od folframa. Kriva A — čitanjem potencijala na 1' kiva B — čitanjem potencijala na 2'

#### UTICAJ BRZINE MEŠANJA

Brzina mešanja ne utiče na oblik titracione krive ali je neophodno potrebno da za celo vreme titracije ostane konstantna.

Rezultati titracije, upotrebljeni elektrodni sistem, jačina struje i pH rastvora dati su u tablici 1.

Tablica 1.

| r. br. | br. anal. | element | odmereno<br>mg | nađeno<br>mg | elektr.<br>sistem | pH   | jač. struje |
|--------|-----------|---------|----------------|--------------|-------------------|------|-------------|
| 1.     | 6         | Zn      | 20,39          | 20,41        | W—W               | 10   | 2,5 $\mu$ A |
| 2.     | 6         | Zn      | 13,19          | 13,16        | W—W               | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 3.     | 6         | Cu      | 22,75          | 22,67        | W—W               | 4    | 25 $\mu$ A  |
| 4.     | 6         | Cd      | 34,42          | 34,00        | W—W               | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 5.     | 5         | Cd      | 45,79          | 45,82        | Mo—Mo             | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 6.     | 6         | Ca      | 20,31          | 20,31        | W—W               | 10   | 2,5 $\mu$ A |
| 7.     | 7         | Ca      | 20,31          | 20,26        | W—W               | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 8.     | 6         | Cd      | 51,38          | 51,11        | W—W               | 9    | 25 $\mu$ A  |
| 9.     | 6         | Ni      | 29,67          | 29,43        | W—W               | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 10.    | 6         | Cu      | 27,50          | 27,33        | Pt—Pt             | 5    | 25 $\mu$ A  |
| 11.    | 5         | Cu      | 32,10          | 32,00        | Au—Au             | 10   | 25 $\mu$ A  |
| 12.    | 4         | Cu      | 29,05          | 29,06        | legura<br>Au—Cu   | 10,5 | 25 $\mu$ A  |

## LITERATURA

1. Kraft, F., Budapesti tanácskozás, 1966.
2. Vydra, F., Vorlíček, J., Talanta 11 (3) 665, 1964.
3. Vydra, F., Vorlíček, J., Talanta 12, 377, 1964.
4. Vydra, F., Vorlíček, J., Talanta 12, 647, 1965.
5. Martin, A. E., Reilley, C. N., Anal. Chem., 31, 992, 1959.
6. Roždestvenskaja, Z. B., Coniuna, O. A., Berikov, B. T., Zavod. Lab., 1,30, 1963.
7. Katagawa, T., Bull. Chem. Japan., 33, 1124, 1960.
8. Holven, A. L., Ing. Eng. Chem., 21, 935, 1929.
9. Britton, H., Dodd, E., Journ. Chem. Soc., 829, 1931.
10. Kolthof, I., Furman, N., Potencioemtričeskoe titrovanie, ONTI, 1935.
11. Britton, H., Vodorodnie ioni, ONTI, 1936.
12. Budanova, L. M., Platonova, O. P., Zavod. Lab., 21, 1745, 1955.
13. Kabanov, B. N., Polyak, L. I., Zbur. Anal. khim., 11, 678, 1956.
14. Biedermann, W., Schwarzenbach, G., Chimia, 2, 1, 1948.
15. Blaedel, W. Y., Knight, H. J., Anal. Chem., 26, 741, 1954.
16. Bishop, Shert, G. D., Analyst, 87, 467, 1962.

## РЕЗЮМЕ

В приведенном труде сделана титрация при помощи поляризованных электродов  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Cd}^{2+}$ ,  $\text{Ni}^{2+}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Pb}^{2+}$ . Измерением потенциала при различных силах электричества найдено что оптимальная электроплотность  $0,3 \times 10^{-6}$  А/мм<sup>2</sup>. Исследовано влияние различных концентрации регуляторов и утверждено что интервал перемен потенциала в конечной точке титрации зависит от концентрации регулятора. Одновременно с измерением ЭМС измерено и изменение потенциала на аноде и катоде относительно к насыщенному каломельному электроду.

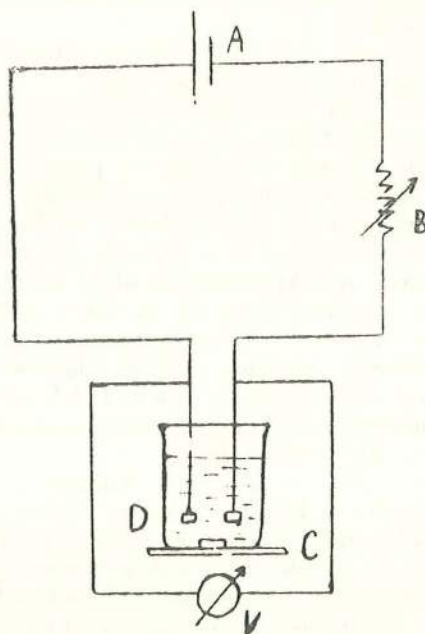
Повышение потенциала на аноде больше повышение потенциала на катоде. Также измерена скорост восстановления потенциала и исследована форма кривых титрации. На основе этих измерений утверждено что потенциал на электродах долго восстанавливается, но титрации можно проводит чтением потенциала на одинаковых интервалах времени.



VILIM VAJGAND—ELISAVETA STANIŠIĆ

**TITRACIJA BAKRA ETILENDIA MINTETRASIRČETNOM  
KISELINOM U PRISUSTVU POLARIZOVANIH ELEKTRODA OD  
PLATINE, BAKRA ZLATA I LEGURE ZLATA I BAKRA**

Za kompleksometrijsko određivanje jonova bakra pored klasične potenciometrijske titracije sve se više upotrebljava titracija sa jednom ili dve polarizovane elektrode. Prvi put titraciju bakra sa polarizovanim elektrodama izvršio je Reylley 1959. g., upotrebljavajući polarizovane živine elektrode. Kasnije su upotrebljene polarizovane platinske elektrode od strane više autora kako u kiseloj<sub>2</sub> tako i u baznoj sredini<sub>3</sub> i pri tome su dobiveni veoma



Sl. 1 — A — akumulator B — otpornik — C — mešalica D — elektrode V — voltmetar

dobri rezultati. Pošto u literaturi nismo našli podatke da su polarizovane elektrode od platine upotrebljene u slabo kiselj sredini  $\text{pH}=6$ , i slabo baznoj  $\text{pH}=7,5$ , mi smo te elektrode uvrstili u okvir naših ispitivanja. Pored ovih elektroda naš rad proširili smo zatim na ispitivanje ponašanja elektroda od zlata, bakra i elektroda napravljenih od 80% zlata i 20% bakra.

Shema aparature s kojom smo radili prikazana je na slici 1. Sve upotrebljene elektrode bile su u obliku pločice površine  $0,9 \text{ cm}^2$  i  $1,0 \text{ cm}^2$ . Optimalna gustina struje polarizacije iznosila je  $0,3 \times 10^{-6} \text{ A/mm}^2$ .

Kako su ispitivanja pokazala, oštrina završne tačke titracije i oblik titracione krive zavisi od prirode upotrebljenih elektroda i upotrebljenog regulatora.

Pri titraciji u prisustvu polarizovanih platinskih elektroda pri  $\text{pH}=6$ , dobija se bilogaritamska kriva. Promene potencijala na završnoj tački titracije su dosta velike (100—200 mV za dodatih 0,1 ml 0,1M rastvora EDTA) i veće su od promena potencijala koje se dobivaju pri  $\text{pH}=10(3)$ . U slabo baznoj sredini  $\text{pH}=7,5$ , pri istim uslovima polarizacije struje skok potencijala javlja se posle tačke ekvivalencije (Sl. 2).

Elektrode od čistog zlata pri titraciji bakra u alkalnoj sredini  $\text{pH}=10$ , daju veoma oštar i veliki skok potencijala (od 90 do 200mV pri dodatku 0,04 ml 0,1 M rastvora EDTA). Potencijal se pre i posle tačke ekvivalencije uspostavlja veoma brzo, a na samoj tački ekvivalencije za nekoliko minuta. Analiza krivih za anodni i katodni potencijal pokazuje da se pri procesima na katodi javljaju veće promene potencijala nego na anodi (sl. 3). Merenjem brzine uspostavljanja potencijala utvrdili smo da se anodni procesi odigra-vaju sporije od katodnih.

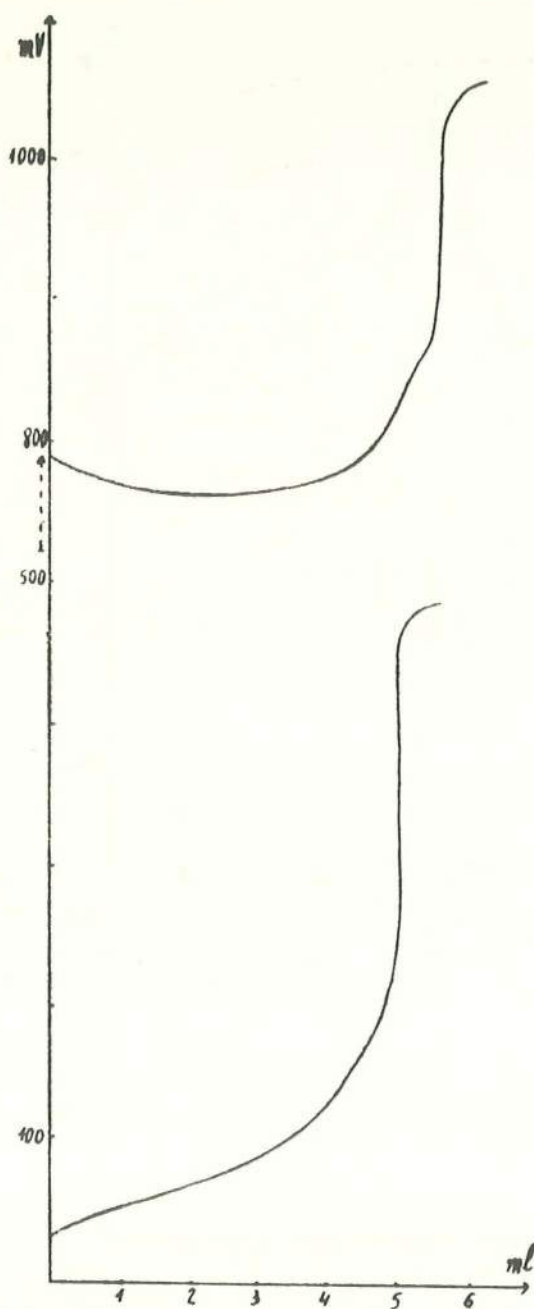
Kako su ispitivanja pokazala, zlatne elektrode u kiselj sredini pri  $\text{pH}=6$  ne daju nikakve promene potencijala.

Titracione krive koje se dobijaju pri radu sa bakarnim elektrodama u natrijumacetatnom regulatoru, imaju maksimum na tački ekvivalencije. Suprotno očekivanju, i pored reverzibilnosti procesa krive su asimetričnog oblika. U alkalnoj sredini oblik krive je isti ali sa mnogo manjim promenama u potencijalu. Pri tim uslovima potencijal se ne može tačno meriti zbog oscilacije skazaljke na voltmetru i zato se titracija ne može izvoditi. Pretpostavili smo da se na površini elektrode stvara oksid bakra. Zato smo pripremili elektrode pokrivene kuprioksidom, ali su takve elektrode nepogodne za rad. Ovim smo potvrdili da se titracija ne može izvoditi u amonijančom regulatoru zbog stvaranja oskidnog sloja na elektrodi.

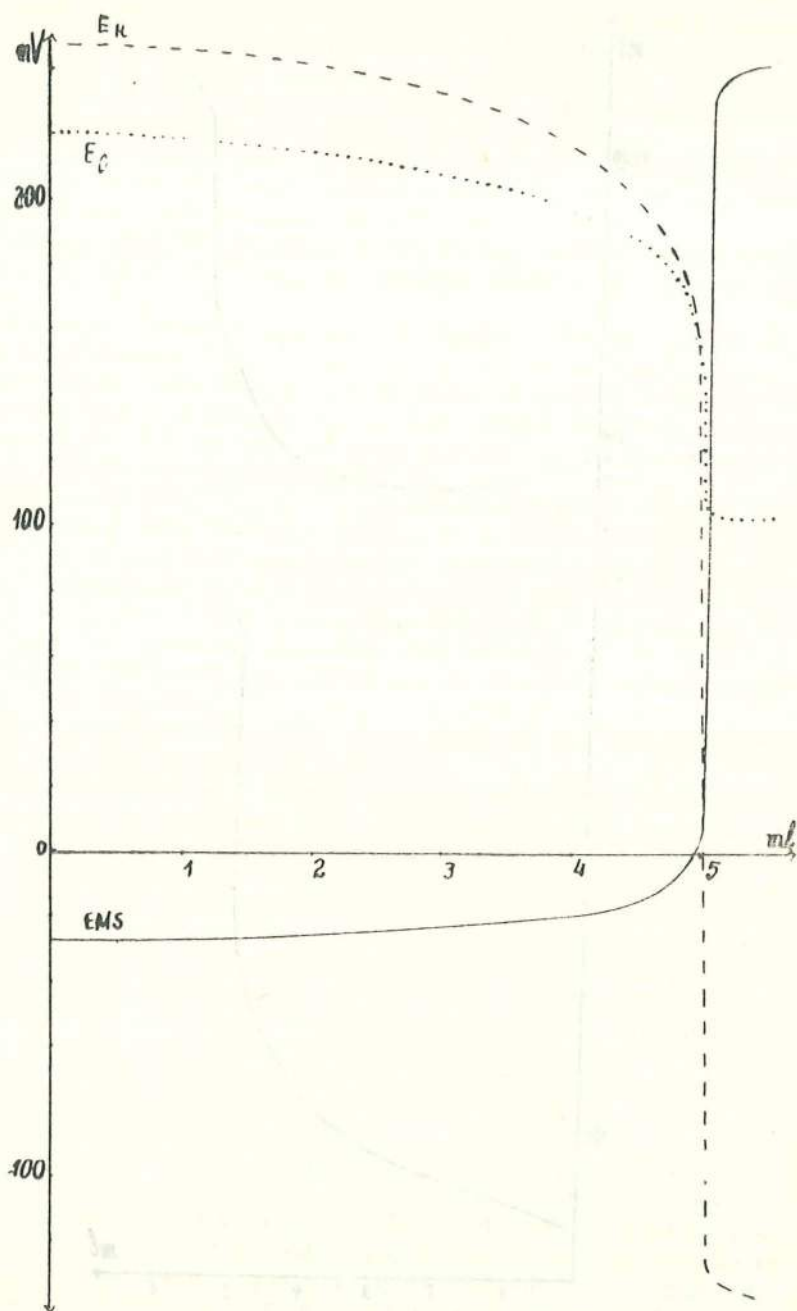
Interesantno je napomenuti da bakarne elektrode koje su na početku davale oštre maksimume, kasnije, posle nekoliko titracija, daju manje izražene maksimume na titracionoj krivoj.

Pošto postoji razlika u ponašanju bakarnih i zlatnih elektroda pri titraciji bakarnih jonova u kiselj i alkalnoj sredini — bakarni joni se dobro titraju u kiselj sredini samo na bakarnoj elektrodi, a u alkalnoj is-ljučivo na zlatnoj — to je bilo i od velikog teoretskog interesa kako će se ponašati legura zlato-bakar. Upotrebljavajući elektrodu koja je sastavljena od 80% zlata i 20% bakra pošlo nam je za rukom da nađemo elektrodu koja zadovoljava u obe pH oblasti. (Sl. 4). Ovo je s teorijske strane utoliko inte-resantnije, što po Tomanovom pravilu takva se legura u elektrohemijskom



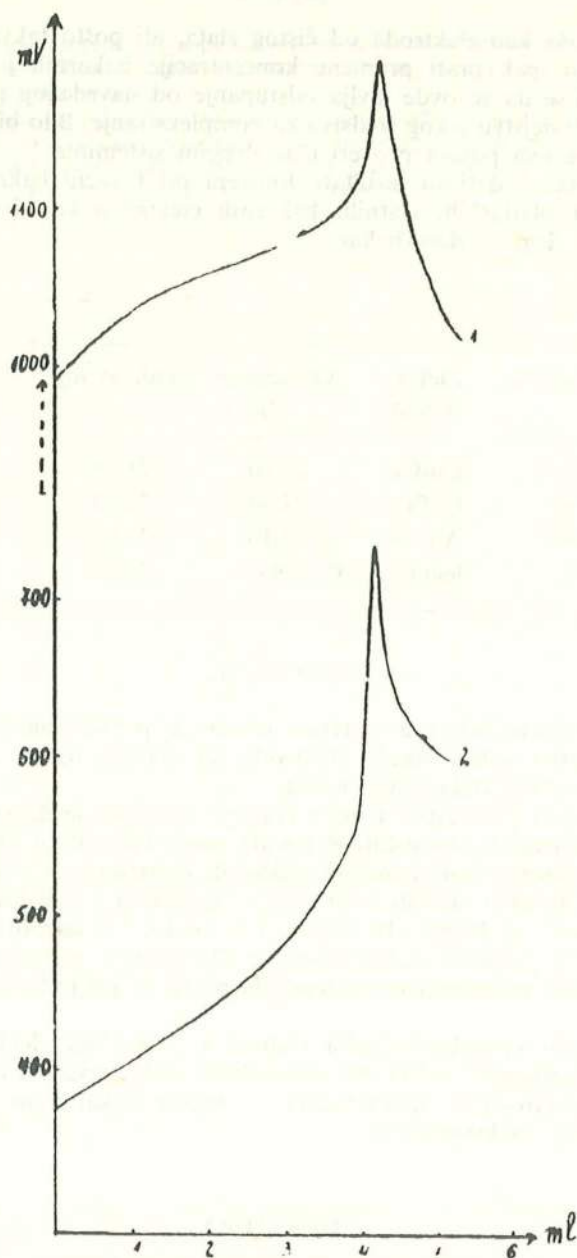


Sl. 2 — Krive dobivene pri titraciji bakra u prisustvu polarizovnih elektroda od Pt. Kriva A + pH=6, kriva B—pH=7,5,



Sl. 3 — Promene anodnog ( $E_a$ ), katodnog ( $E_k$ ) i razlike potencijala anode i katode (EMS) pri titraciji bakra pri pH=10 u prisustvu polarizovanih elektroda od zlata,





Sl. 4 — Krive dobivene pri titraciji bakra u kiseljoj sredini ( $\text{pH}=5$ ) — kriva 1 i u baznoj sredini ( $\text{pH}=10$ ) — kriva 2 u prisustvu polarizovanih elektroda od legure zlato-bakar pr jaćini struje  $I=25\mu\text{A}$ .

pogledu ponaša kao elektroda od čistog zlata, ali pošto takva elektroda u kiseloj sredini ipak prati promene koncentracije bakarnih jonova u toku titracije, vidi se da se ovde javlja odstupanje od navedenog pravila, što se može pripisati dejstvu jakog sredstva za kompleksiranje. Bilo bi od teorijskog interesa da se ova pojava proveri i na drugim sistemima.

U tablici 1 dati su rezultati dobiveni pri titraciji bakra u prisustvu polarizovanih platinskih, zlatnih, bakarnih elektroda kao i elektrode napravljene od legure zlato-bakar.

Tablica 1

| R. br. | Br. odred. | Elektr. sistem | Odmereno mg | Nadeno mg. | % i gr. u %       |
|--------|------------|----------------|-------------|------------|-------------------|
| 1.     | 6          | Cu-Cu          | 21,70       | 21,70      | $100.7 \pm 0,5\%$ |
| 2.     | 5          | Pt-Pt          | 27,50       | 27,33      | $99,6 \pm 0,2$    |
| 3.     | 5          | Au-Au          | 32,10       | 32,00      | $99,6 \pm 0,2$    |
| 4.     | 4          | legure Au-Cu   | 29,05       | 29,06      | $99,9 \pm 0,2$    |

## ZAKLJUČAK

Određivanje bakra u rastvoru vršeno je potenciometrijskom titracijom u prisustvu polarizovanih elektroda od platine, bakra, zlata i legure sastavljene od 80% zlata i 20% bakra.

Merenjem potencijala u toku titracije utvrđeno je da se bakar u prisustvu polarizovanih platinskih elektroda može titrovati u kiseloj i baznoj sredini, u prisustvu polarizovanih bakarnih elektroda — u kiseloj, u prisustvu polarizovanih zlatnih elektroda — u baznoj i u prisustvu polarizovanih elektroda od legure zlato-bakar i u kiseloj i u baznoj sredini.

Najveće promene elektromotorne sile sistema na završnoj tački titracije i najbrže uspostavljanje potencijala pavlja se pri radu sa zlatnim elektrodama.

Pri radu sa polarizovanim zlatnim i platinskim elektrodama dobivaju se bilogaritamske krive, dok pri radu sa polarizovanim bakarnim elektrodama i elektrodama napravljenim od legure bakar-zlato — krive koje se karakterišu maksimumom.

## LITERATURA

1. Martin, A. E., Reilley, C. N., Anal. Chem. **31**, 992, 1959.
2. Vydra, F., Vorliček, J., Talanta **11**, 865, 1964.
3. F. Kraft, Budapesti tanasckozas, 1966.
4. Přibil, R., Himija, **2**, 185, 1952.
5. Siggie, S., Eichlen, D. W., Reinhart, R. S., Anal. Chem., **27**, 1745, 1955



## РЕЗЮМЕ

Определение меди в растворе проведено потенциометрической титрацией при помощи поляризованных электродов из платины, меди, золота и сплава состоящего из 80% золота и 20% меди.

Измерением потенциала в течение титрации найдено что медь при наличии поляризованных платиновых электродов можно титровать в кислой и щелочной среде, в наличии поляризованных медных электродов-в кислых, в наличии поляризованных золотых электродов-в щелочном а в наличии поляризованных электродов из смеси золото-медь и в кислой и щелочной среде.

Самые большие перемены электромоторной силы в конечной точке титрации и самое установление потенциала является при работе с золотыми электродами.

При работе с поляризованными золотыми и платиновыми электродами получаются билогарифмические кривые, а при работе с поляризованными медными электродами и электродами сделанными из сплава медь-золото появляются кривые характеризующиеся максимумом.





KOVILJKA STANKOVIĆ-TOMIĆ

## PRILOG POZNAVANJU LIVADSKE VEGETACIJE MOKRE PLANINE (Kosovo)

Masiv Moke planine uzdiže se s desne strane rijeke Ibra nedaleko od Kosovske Mitrovice. Planina je srednje visine sa strmim padinama obraslim gustim i raznovrsnim šumama. Na zaravnjenom bilu planine, čija je prosječna nadmorska visina oko 1600 m, razvijena je acidofilna vegetacija livada, tresetišta i planinskih vriština.

### FLORISTIČKI SASTAV LIVADA

Floristička građa livada prikazana je na tabeli sa sedam fitocenoloških snimaka. Po malom broju snimaka vidi se da livade na Mokroj planini zapremaju manje površine. Osim toga često su isprekidane sastojinama vegetacije tresetišta i graniče sa planinskim vrištinama. U svim snimljenim sastojinama livada *Nardus stricta* svojim gustim i tvrdim busenima gradi debeli i prostrani pokrivač. Tipac (*Nardus stricta*) se nalazi takođe u vrištinama, tresetištima i pretplaninskim livadama zajednice *Festuco-Pančićietum*, ali s mnogo manjom pokrovnom vrednosti. U livadama su, pored tipca, obilno zastupljene još vrste:

*Succisa pratensis* Mch

*Hypericum quadrangulum* L.

*Centaurea nervosa* Willd.

*Polygonum bistorta* L.

*Dianthus superbus* L.

*Senecio pančićii* Deg.

i *Gentiana germanica* Willd. var.

Na osnovu navedenih vrsta i specifičnih ekoloških uslova ovaj tip livade na Mokroj planini izdvojen je u posebnu asocijaciju *Succiso-Nardetum*. Pomenute vrste su za zajednicu *Succiso-Nardetum* karakteristične i diferencijalne.

*Nardus stricta* je lokalno karakteristična vrsta asocijacije u kojoj gradi prostrane i floristički vrlo jednolične facijese, pogotovo ako je sastojina izložena paši. U julu zajednica mijenja svoj monotoni aspekt jer se tada nalazi u punom cvijetu njena karakteristična vrsta *Centaurea nervosa*, za-

tim, karakteristične vrste sveže: *Campanula abietina*, *Scorzonera rosea*, *Dianthus deltoides*, *Gentiana kochiana* i vrste roda *Potentilla*. Od pratilica u zajednici su najstalnije vrste: *Veratrum lobelianum*, *Galium verum*, *Stellaria graminea*, *Euphrasia montana* i *Alectorolophus rumelicus*.

U vlažnijim sastojinama, pogotovo oko izvora, nalaze se elementi vegetacije tresetišta i bara: *Trollius europaeus*, *Eriophorum latifolium*, *Cardamine pratensis* var. *alpicola*, *Pedicularis verticillata*, *Carex* sp., *Parnassia palustris*, *Pinguicula leptoceras*, *Polytrichum commune* i *Sphagnum cymbifolium*. U izdignutijim i zato suvljim sastojinama prodiru elementi vegetacije vriština: *Bruckenthalia spiculifolia*, *Vaccinium* vrste i dr. Iz navedenoga se vidi da je floristički sastav zajednice neujednačen i da zavisi prvenstveno od vlažnosti tla i paše. Ipak, tipične sastojine, čije je tlo srednje vlažno i koje se kose, imaju homogeniju florističku građu.

Na tabeli je dato poređenje asocijacije *Succiso-Nardetum* sa livadama Bosne, Crne Gore i Srbije u kojima je *Nardus stricta* glavni edifikator. Odmah se vidi da je na Mokroj planini ovo vlažniji tip nardetuma, koji je najrodniji zajednicama *Trifolio-Nardetum* (Blečić—Tatić) na Goliji i *Aurantiacono-Nardetum* (Horvat) na Vlašiću, s kojima ima oko 60% zajedničkih vrsta. Od navedenih zajednica asocijacija *Succiso-Nardetum* se razlikuje, pored karakterističnih vrsta, još ovim diferencijalnim vrstama:

*Thymus albanus* Borb.  
*Jasione orbiculata* Gris.  
*Alchemilla pubescens* L.

*Potentilla ternata* Koch.  
*Carex pallescens* L. i  
*Agrostis alba* L. var.

Zajednica je takođe slična i sa asocijacijom *Nardetum strictae* (Pavlović) na Kopaoniku, što se može zaključiti iz opisa i vrsta koje autor navodi za ovaj tip livade. Na osnovu navedene srodnosti asocijacija *Succiso-Nardetum* podređena je vegetacijskoj svezi *Achillaeo-Arnicion* Horv. et Pawl. i redu *Nardetalia* Horv, koji su u ovom tipu livade dobro karakterizirani vrstama, od kojih se s većim stepenom stalnosti nalaze ove: *Campanula abietina*, *Scorzonera rosea*, *Dianthus deltoides* i *Gentiana kochiana*.

#### EKOLOŠKI USLOVI I RAZVITAK ZAJEDNICE

Zajednica *Succiso-Nardetum* nalazi se na silikatnoj podlozi. Tlo je jako kiselo, duboko i vlažno. Skoro kroz svaku sastojinu teče po jedan izvor oko kojih je tlo barovito. Sastojine su ravne ili su eksponirane jugozapadu, jer u tome pravcu blago je nagnuta čitava planina. Za Mokru planinu nema klimatskih podataka, ali se na osnovu biljnog pokrova može zaključiti da je to područje subalpske klime. To potvrđuje i spektar životnih oblika zajednice (H—89%, G—5%, P—4%, CH—2%). Od 56 vrsta koliko ih je u zajednici zabilježeno 89% su hemikriptofiti prilagođeni na hladno i vlažno stanište.

Livade se kose jedanput godišnje i to u avgustu, ali neredovno. Doprinos im je mali i to je najslabiji tip livade uopšte. Vrlo je loša i kao pašnjak. Jedino u proljeće, kada su buseni *Nardus stricta* mladi i meki, stoka ga pase,



a u ljeto tipac otvrdne i tada ga životinje izbjegavaju. Onda biraju i pasu druge sočne vrste i na taj način sastojine ove zajednice postaju floristički dosadno jednolične. Ovaj tip livade može se popraviti jedino isušivanjem i intenzivnim dubrenjem, a za to ima malo mogućnosti. Jedna od teškoća je udaljenost livada od stalnih naselja.

Asocijacija *Succiso-Nardetum* na Mokroj planini nije se mogla razviti na većim površinama jer za to nema ni geografskih ni ekoloških uslova. Poput oaze ovo je područje opkoljeno krečnjacima Oklačkih glava, Jerebinja i Berima, koji su obrasli miješanim šumama smreke, jele i bukve ili planinskim rudinama. Ipak livade ove zajednice su stare i floristički izdiferencirane.

Zajednica *Succiso-Nardetum* nalazi se u zoni miješane šume molike i smreke (*Pinus peuce*, *Picea excelsa*), čijom je krajnjom degradacijom nastala, što se može vidjeti po nizu prelaznih stadija. U sastojinama zajednice koje se ne kose prodiru elementi vriština, asocijacije *Junipereto-Bruckenthalietum* Ht, a njih opet osvajaju mladice smreke i molike. Ova progresivna sukcesija dala bi brzo pozitivne rezultate kada bi se uklonili negativni antropogeni faktori, kosidba i paša.

#### ZAKLJUČAK

Ispitivanjem acidofilnih livada na Mokroj planini (1966—1968) utvrđeno je da je to vlažniji tip nardetuma koji je na osnovu specifičnih ekoloških uslova i florističke građe izdvojen u novu asocijaciju *Succiso-Nardetum*.

Poređenjem ove zajednice sa sličnim tipovima livada u našoj zemlji zaključeno je da je asocijacija *Succiso-Nardetum* najsirodnija zajednicama *Trifolio-Nardetum* i *Auranticao-Nardetum* pa je podređena vegetacijskoj svezi *Achillaeo-Arnicion* i redu *Nardetalia*.

Livade ove zajednice su antropogene, nastale sječom i paljenjem šuma molike odnosno miješane šume smreke i molike, i njihov progresivni razvitak takode je uslovljen čovjekom.

#### LITERATURA

1. Blečić-Tatić — Acidofilne livade na planini Goliji, Glasnik Prirodnjačkog muzeja, Beograd, 1964.
2. Dunjić-Jovanović R. — Tipovi pašnjaka i livada Suve planine. Ibid. knj. 6, No 2, Beograd, 1955.
3. Grebenščikov O. — O vegetaciji Centralnog dela Stare planine, Zbornik radova Instituta za ekologiju i biogeografiju, br. 1, Beograd, 1950.
4. Horvat I. — Pretplaninske livade i rudine Bosne, Biološki glasnik, Zagreb, 1960.
5. Horvat I. — Vegetacija planina Zapadne Hrvatske. Acta biol. II, Zagreb, 1962.
6. Horvat I. — Vegetacijske studije o Hrvatskim planinama, Zagreb, 1930.
7. Lakušić R. — Vegetacija livada i pašnjaka na planini Bjelasici, Godišnjak Biološkog instituta, Sarajevo, 1966.
8. Pavlović Z. — Vegetacija planine Zlatibora. Zbornik radova Biološkog instituta, knj. XI, Beograd, 1951.
9. Pavlović Z. — O pašnjačkoj i livadskoj vegetaciji centralnog dela Kopaonika, Glasnik Prirodnjačkog muzeja, Serija B, knj. 7, Beograd, 1955.

10. Rudski I. — Ekскурzija na Žljeb i Mokru planinu, Prirodnjački muzej Srpske zemlje, Beograd, 1949.

11. Stanković-Tomić K. — Prilog poznavanju flore Ibarskog Kolašina, Zbornik Filozofskog fakulteta, knj. IV, sv. B, Priština, 1967.

*Koviljka Stanković-Tomić*

# BEITRAG ZUR KENNTNIS DER WIESENVEGETATION VON MOKRA PLANINA (Kosovo)

## Zusammenfassung

Abhänge der Mokra Planina sind von dichten verschiedenartigen Wäldern bewachsen. An der ebenen Gebirgsspitze, deren durchschnittliche Höhe ü. d. Meeres etwa 1600 m beträgt, hat sich azidophyle Wiesenvegetation von Heiden und Torfmoos entwickelt.

Der floristische Aufbau der Wiesen ist mit 7 phytozoologischen Aufnahmen in der Tabelle dargestellt. Auf Grund ihres floristischen Aufbaus und spezifischer, ökologischer Bedingungen wurde dieser Wiesentypus in eine besondere Assoziation *Succiso-Nardetum* ausgesondert. Die Arten *Succisa pratensis*, *Hypericum quadrangulum*, *Centaurea nervosa*, *Polygonum bistorta*, *Dianthus superbus*, *Senecio paniculatus* und *Gentiana germanica* var. sind für die Gesellschaft charakteristisch und differenzial. Die lokalcharakteristische Art der Assoziation *Nardus stricta* bildet dichte und geräumige Fazies. Die Gesellschaft ist dem Vegetationsbund *Achillaeo-Arnicae* Horv. et Pawl. untergeordnet, der in diesem Wiesentypus gut charakterisiert ist.

Die Gesellschaft *Succiso-Nardetum* befindet sich auf Silikatunterlage. Der Boden ist feucht, tief und sauer. Für Mokra Planina sind keine Klimaangaben vorhanden, jedoch ist es möglich auf Grund der Pflanzendecke zu folgern, dass dieses Gebiet dem subalpinen Klima angehört.

Die Assoziation ist durch die äußerste Degradation der Mischwälder *Pinus peuce* und *Picea excelsa* entstanden, was auch an einer Reihe Übergangsstadien ersichtlich ist. In ungemähten Beständen dringen bereits die Heideelemente durch (*Bruckenthalia spiculifolia*, *Vaccinium myrtillus*, *Vaccinium uliginosum*, *Juniperus nana* und a. m.), sie werden aber langsam von den Schösslingen des *Pinus peuce* und *Picea excelsa* besiegt. Diese progressive Sukzession würde sehr rasch positive Ergebnisse leisten, wenn die negativen Wirkungen der anthropogenen Faktoren, der Mahd und der Weide enthoben wären.



Tabela

| Asocijacija                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | SUCCISO-NARDETUM                  |     |                             |         |                          |          |          | Stepen stalnosti<br>(Stetigkeitsgrad) | Trifolio-Nardetum<br>(Golija) | Aurantiaco-<br>Nardetum<br>(Vlašići) | Nardetum—subal-<br>pinum (Bjolasica) |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----|-----------------------------|---------|--------------------------|----------|----------|---------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Životni oblici<br>(Lebensform)                                                                                                     | Nalazište snimka (Fundort<br>Aufnahmen)<br>Nadmorska visina (m. ü. M).<br>Nagib u stepenima (Neigung)<br>Ekspozicija (Exposition)<br>Veličina snimka u m <sup>2</sup> (Grösse der Aufnah-<br>mefläche im m <sup>2</sup> )<br>Broj vrsta u snimci (Artenzahl)<br>Redni broj snimka (Nr. der Aufnahmen) | Ravno<br>mokro<br>1600<br>5.<br>S | —   | Red<br>kamenja<br>1600<br>— | 5<br>SW | Savina voda<br>1600<br>— | 10<br>SW | 10<br>SW |                                       |                               |                                      |                                      |
|                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 50                                | 50  | 50                          | 100     | 50                       | 100      | 50       |                                       |                               |                                      |                                      |
|                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 31                                | 32  | 23                          | 29      | 18                       | 30       | 28       |                                       |                               |                                      |                                      |
|                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1                                 | 2   | 3                           | 4       | 5                        | 6        | 7        |                                       |                               |                                      |                                      |
| KARAKTERISTIČNE VRSTE ASOCIJACIJE<br>(Charakterarten der Assoziation):                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |     |                             |         |                          |          |          |                                       |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Nardus stricta</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                              | 5.5                               | 5.5 | 5.5                         | 5.5     | 4.3                      | 2.2      | 2.2      | V                                     | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Succisa pratensis</i> Meh.                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2.2                               | 2.2 | +2                          | 1.2     | 1.2                      | +2       | +2       | V                                     |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Hypericum quadrangulum</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                      | +2                                | +2  | 1.2                         | +2      | +2                       | +2       | +2       | V                                     |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Centaurea nervosa</i> Willd.                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1.2                               | +2  | 1.2                         | +       | +2                       | +2       | +        | V                                     |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Polygonum bistorta</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.2                               | 1.2 | 1.2                         | 1.2     | .                        | .        | .        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Dianthus superbus</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                           | +2                                | .   | +2                          | .       | .                        | .        | +2       | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Senecio paniculatus</i> Deg.                                                                                                                                                                                                                                                                       | +2                                | .   | +2                          | .       | .                        | .        | +2       | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Gentiana germanica</i> Willd. var.                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.2                               | .   | .                           | +2      | .                        | .        | +2       | III                                   |                               |                                      |                                      |
| DIFERENCIJALNE VRSTE ASOCIJACIJE<br>(Differentialarten der Assoziation):                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |     |                             |         |                          |          |          |                                       |                               |                                      |                                      |
| CH                                                                                                                                 | <i>Thymus albanus</i> Borb                                                                                                                                                                                                                                                                            | .                                 | .   | 1.2                         | 1.2     | .                        | 1.2      | .        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Potentilla ternata</i> Koch.                                                                                                                                                                                                                                                                       | +                                 | .   | .                           | +       | .                        | .        | +        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Carex pallescens</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1.2                               | .   | .                           | 1.2     | 1.2                      | .        | .        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Alchemilla pubescens</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                        | .                                 | .   | .                           | +2      | .                        | +2       | +2       | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Agrostis alba</i> L. var.                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.2                               | 1.2 | +2                          | +2      | .                        | .        | .        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Jasione orbiculata</i> Gris.                                                                                                                                                                                                                                                                       | .                                 | .   | .                           | .       | +2                       | .        | +2       | II                                    |                               |                                      | +                                    |
| KARAKTERISTIČNE VRSTE SVEZE I REDA<br>(Verbunds und Ordnungs Charakterarten)<br>ACHILLAEO-ARNITION Ht et Pawl.<br>I NARDETALIA Ht: |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |     |                             |         |                          |          |          |                                       |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Campanula patula</i> L. ssp. <i>abietina</i> Gris.<br>et Schent.                                                                                                                                                                                                                                   | +2                                | 1.2 | .                           | 1.2     | +2                       | +2       | 1.2      | V                                     | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Scorzonera rosea</i> W. K.                                                                                                                                                                                                                                                                         | +                                 | +   | +                           | +       | +                        | +        | .        | IV                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Dianthus deltoideus</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                         | .                                 | 1.2 | +2                          | +2      | +2                       | +2       | .        | IV                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Gentiana kochiana</i> Perr. et Song.                                                                                                                                                                                                                                                               | +2                                | .   | +2                          | .       | +2                       | +2       | 1.2      | IV                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Anthennaria dioica</i> (L.) Gärtn. var.                                                                                                                                                                                                                                                            | .                                 | .   | .                           | .       | +2                       | +2       | +2       | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Viola latsepala</i> (Wettst.) Beck.                                                                                                                                                                                                                                                                | +2                                | +2  | .                           | .       | .                        | .        | +2       | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Festuca fallax</i> Thuill.                                                                                                                                                                                                                                                                         | +2                                | 1.2 | .                           | .       | .                        | 1.2      | .        | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Potentilla aurea</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                            | +2                                | .   | +2                          | +2      | +2                       | .        | .        | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Luzula campestris</i> (L.) Lam. et DC.                                                                                                                                                                                                                                                             | .                                 | +2  | .                           | .       | .                        | 1.2      | +2       | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Genista sagittalis</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                          | .                                 | .   | .                           | .       | .                        | +2       | +2       | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| G                                                                                                                                  | <i>Botrychium lunaria</i> (L.) Sw.                                                                                                                                                                                                                                                                    | .                                 | .   | +2                          | .       | .                        | .        | +2       | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Deschampsia flexuosa</i> Trin.                                                                                                                                                                                                                                                                     | .                                 | +2  | .                           | .       | +2                       | .        | .        | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Achillea linguata</i> W. K.                                                                                                                                                                                                                                                                        | .                                 | +2  | +2                          | .       | .                        | .        | .        | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Potentilla erecta</i> (L.) Hampe.                                                                                                                                                                                                                                                                  | .                                 | .   | .                           | .       | +2                       | .        | +2       | II                                    |                               |                                      |                                      |
| PRATILICE (Begleiter):                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |     |                             |         |                          |          |          |                                       |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Veratrum lobelianum</i> Bernh.                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1.2                               | +   | 1.2                         | 1.2     | .                        | +2       | 1.2      | V                                     |                               | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Galium verum</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                                | +2                                | +2  | +2                          | +2      | +2                       | +2       | .        | V                                     |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Stellaria graminea</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                          | +2                                | 1.2 | 1.2                         | +2      | .                        | +2       | .        | IV                                    | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Euphrasia montana</i> Jord.                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1.1                               | 1.1 | .                           | 1.1     | .                        | 1.1      | 1.1      | IV                                    | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Alectorolophus rumelicus</i> Vel.                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1.1                               | +   | .                           | 1.1     | .                        | 1.1      | .        | IV                                    | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Briza media</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.2                               | +2  | .                           | +2      | .                        | +2       | .        | III                                   | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Trifolium pratense</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                          | +2                                | +2  | .                           | .       | .                        | 1.2      | .        | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Trifolium repens</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                            | +2                                | 1.2 | .                           | .       | +2                       | .        | .        | III                                   |                               | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Hypocheris pelivanovičii</i> K. Malý                                                                                                                                                                                                                                                               | .                                 | .   | +2                          | +2      | .                        | +2       | .        | III                                   | +                             |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Carex leporina</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                              | .                                 | +2  | .                           | 1.2     | +2                       | .        | .        | III                                   |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Rumex acetosa</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                               | .                                 | .   | +2                          | +2      | .                        | +        | .        | III                                   | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Scabiosa columbaria</i> (L.) Rouy. et<br>Foul. ssp. <i>dubia</i> (Vel.) K. Malý                                                                                                                                                                                                                    | .                                 | +2  | +2                          | .       | .                        | +2       | .        | III                                   | +                             |                                      | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Anthoxanthum odoratum</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                       | .                                 | +2  | .                           | .       | .                        | 1.2      | 1.2      | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| G                                                                                                                                  | <i>Muscari botryoides</i> (L.) Mill.                                                                                                                                                                                                                                                                  | .                                 | +   | .                           | .       | .                        | +        | +        | III                                   | +                             | +                                    | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Deschampsia caespitosa</i> (L.) Beauv. var.<br><i>montana</i> (Rehb.) Hay.                                                                                                                                                                                                                         | +                                 | .   | .                           | .       | +2                       | .        | +2       | III                                   |                               | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Ranunculus oreophilus</i> M. B.                                                                                                                                                                                                                                                                    | +                                 | +   | .                           | +       | .                        | .        | .        | III                                   | +                             |                                      | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Crepis viscidula</i> Fröl.                                                                                                                                                                                                                                                                         | .                                 | +2  | .                           | .       | +2                       | .        | .        | II                                    | +                             |                                      |                                      |
| P                                                                                                                                  | <i>Juniperus nana</i> Willd.                                                                                                                                                                                                                                                                          | +2                                | .   | .                           | +2      | .                        | .        | .        | II                                    |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Valeriana officinalis</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                       | +                                 | .   | .                           | .       | .                        | .        | +        | II                                    |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Gentiana asclepiadea</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                        | .                                 | +2  | .                           | +2      | .                        | .        | .        | II                                    | +                             | +                                    |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Leucanthemum vulgare</i> Lam.                                                                                                                                                                                                                                                                      | .                                 | .   | +2                          | .       | .                        | +2       | .        | II                                    | +                             |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Hieracium hoppeanum</i> Schult.                                                                                                                                                                                                                                                                    | .                                 | +2  | +2                          | .       | .                        | .        | .        | II                                    | +                             |                                      | +                                    |
| H                                                                                                                                  | <i>Sanguisorba officinalis</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                     | +2                                | +2  | .                           | .       | .                        | .        | .        | II                                    |                               |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Lotus corniculatus</i> L. var.                                                                                                                                                                                                                                                                     | .                                 | .   | .                           | .       | .                        | +2       | +2       | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| CH                                                                                                                                 | <i>Vaccinium myrtillus</i> L.                                                                                                                                                                                                                                                                         | .                                 | .   | .                           | .       | .                        | +2       | +2       | II                                    | +                             | +                                    | +                                    |
| G                                                                                                                                  | <i>Crocus veluchensis</i> Herb.                                                                                                                                                                                                                                                                       | .                                 | .   | .                           | .       | .                        | +        | +        | II                                    | +                             |                                      |                                      |
| H                                                                                                                                  | <i>Verbascum densiflorum</i> Bertl.                                                                                                                                                                                                                                                                   | .                                 | +   | .                           | +       | .                        | .        | .        | I                                     |                               |                                      |                                      |





BEDRI KAMBERI

## PRIMENA DIPOLNIH MOMENATA ZA ODREĐIVANJE STRUKTURE KOORDINACIONIH JEDINJENJA

### U V O D

Za molekule kod kojih se centar pozitivne i centar negativne šarže ne poklapaju kaže se da poseduje *permanentni dipol* (1). Električni dipolni momenat ( $\mu$ ) definiše se kao proizvod naelektrisanja ( $q$ ) na jednom centru i rastojanja između centara ( $l$ )

$$\mu = ql \quad (1)$$

Dipolni momenat koji je predstavljen vektorom intenziteta  $ql$  ima smer od pozitivnog ka negativnom naelektrisanju. Dimenzije dipolnog momenta su naelektrisanje puta dužina. Osnovna jedinica za predstavljanje dipolnog momenta je *debaj* (2,3). Dva elementarna naelektrisanja  $e$  ( $4,80 \cdot 10^{-10}$  esj\*) na rastojanju od  $1 \text{ \AA}^{**}$  imaju dipolni momenat  $4,80 \cdot 10^{-18}$  esj sm. Jedan *debaj* jednak je  $1 \cdot 10^{-18}$  esj sm ( $1 \text{ D} = 10^{-10}$  esj.  $10^{-8}$  sm =  $10^{-18}$  esj sm).

Kod više atomskih molekula postoje veći broj veza pa prema tome i više dipolnih momenata. U tom slučaju problem pojave polarnosti molekula svodi se u objašnjavanju asimetrije pojedinih veza. Ukupni dipolni momenat celog molekula dobija se vektorskim sabiranjem momenata veza. Primera radi, dipolni momenat slikovitije može se prikazati na sl. 1.

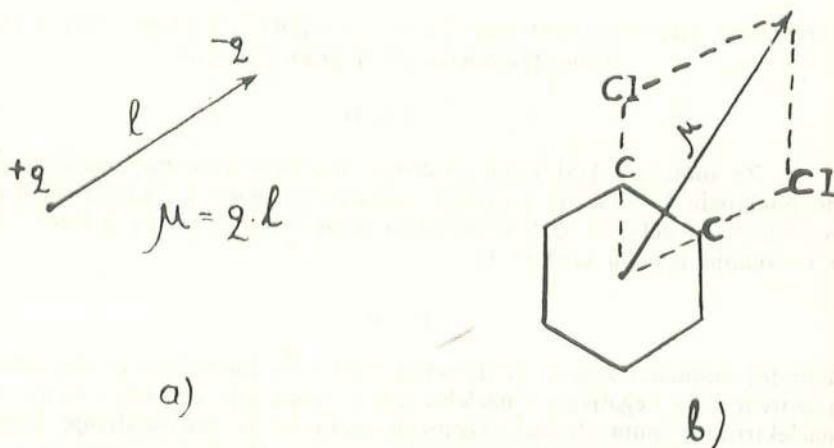
Ovde se nećemo zadržati na detaljnom opisivanju prirode hemijskih veza nego ćemo samo ukratko napomenuti kako se zamišlja građenje molekula. Postoje dva načina pomoću kojih se može zamisliti „postanak” jednog molekula (1). Prema prvom načinu atomi se približavaju jedan drugome na osnovu elektrostatičkih privlačenja kada se elektronski oblaci valencionih elektrona dovoljno približe, reaguju jedan s drugim i grade stabilan raspored atoma u molekulu — nastaje novi molekul. Drugi način može se zamisliti da se jezgra približavaju bez valencionih elektrona gradeći neku vrstu „skeleta pozitivne šarže” na koji postepeno treba dodavati valencione elektrone dok se ne dostigne potreban broj elektrona.

\* Elektrostatičke jedinice.

\*\* Angstrom ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$  sm).

Prema tome, postoje izvesne dozvoljene konfiguracije elektronskih oblaka i ovi „oblici elektronskih oblaka” ili funkcije verovatnoće gustina, mogu se opisati pomoću kvantnih brojeva. Tako dobivene slike verovatnoće nalaženja elektronskih oblaka nazivaju se molekulске orbitale, po analogiji s mnogo prostijim atomskim orbitalama.

Prema molekulsko-orbitalnoj teoriji smatra se da svaki naredni valentni elektron ulazi u polje pozitivne elektronske šarže, koje stvaraju jezgra. Matematičkim postupkom može se opisati verovatnoća nalaženja elektronskog oblaka u blizini nekog jezgra. Ovaj postupak zove se linearna kombinacija atomskih orbitala (skraćeno LCAO).



Sl. 1 — a) Definicija dipolnog momenta, b) vektorsko sabiranje dipolnih momenata u orto-dihlorbenzol (3,7).

Pri postavljanju molekulskih orbitala iz atoma, čije talasne funkcije su već određene, nađeno je da važe sledeći principi: ako postoji mogućnost da se elektronski oblaci dva atoma preklapaju, kada se atomi približavaju jedan drugome, tada se molekulska talasna funkcija ( $\psi$ ) za ovo sjedinjavanje može dobiti linearnom kombinacijom pojedinih talasnih funkcija. Linearna kombinacija dveju veličina dobiva se množenjem svake vrednosti pojedinačno s nekim celim brojem i sabiranjem ovih. Matematički izraz glasi:

$$\psi_{AB} = C_1 \psi_A + C_2 \psi_B \quad (2)$$

gde su  $C_1$  i  $C_2$  celi brojevi. Ako su atomi  $A$  i  $B$  veoma slični, tada je  $C_1$  veoma sličan  $C_2$ ; ako su  $A$  i  $B$  isti onda je  $C_1 = C_2$ . Dve sferne  $s$ -orbitale različitih atoma mogu se preklapati, dve  $p$ -orbitale, oblika gimnastičkog tela, mogu se preklapati ako su orjentisane u istom pravcu. Jedna  $s$ -i jedna  $p$ -orbitala mogu se preklapati ako se sfera približava duž ose gimnastičkog tela, tako da ona prvo pogodi kraj druge sfere. Treba naglasiti da je jednačina (2) lo-



gična ali niukom slučaju potpuno očigledna. Iz nje se može dobiti veći broj dobrih kvalitativnih pretpostavki a manji kvantitativnih.

Talasna priroda elektrona je takva da će se, ako se dva vezana elektronska oblaka približavaju jedan drugome i stvore vezu, izvršiti zgušnjavanje oblaka u području između dva jezgra. Kada preklapanje postane znatno, međusobno dejstvo talasa dozvoljava veće zgušnjavanje elektronskog oblaka nego što bi se to moglo objasniti samo adicijom gustine odvojenih oblaka, jer u isto vreme valencioni elektroni, koji su prvobitno vezani samo s jednim atomom, postaju vezani za ceo sistem. Prema tome nastaje nova konfiguracija elektronskog oblaka usled čega, kao rezultat tzv. „delokalizacije“ elektrona jednačina(2) nema pravi smisao aditivnosti. Međutim, kombinacija verovatnoće gustine odnosi se na kvadrat talasnih funkcija usled čega se može razumeti kvalitativni (a ne i kvantitativni) smisao jednačine(2).

Ako gustinu naelektrisanja ( $\rho$ ) predstavimo kao  $\rho(r)$  onda će dipolni momenat biti jednak njihovom integralnom zbiru

$$\mu = \int \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \, d\tau \quad (3)$$

Gustina ukupnog naelektrisanja molekula  $\rho(\vec{r})$  jednaka je zbiru gustina atomskih  $[\rho_{at}(\vec{r})]$  i elektronskih  $[\rho_{el}(\vec{r})]$  naelektrisanja<sup>2)</sup>

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{at}(\vec{r}) + \rho_{el}(\vec{r}) \quad (4)$$

U prostim slučajevima hemijskih veza, u dvoatomnim molekulima, koji su izolovani od međusobnog dejstva susednih molekula, je najpovoljnije razmotriti uzrok pojave električnog dipolnog momenta. Atomi  $A$  i  $B$  u dvoatomnom molekulu  $A-B$  drže se centrima vezujućih molekulskih orbitala

$$\psi = N(\varphi_A + \lambda\varphi_B) \quad (5)$$

gde su  $\psi$  — stepen preklapanja molekulskih orbitala a  $\varphi_A$  i  $\varphi_B$  valencione atomske orbitale odgovarajućih atoma  $A$  i  $B$ ,  $N$ -tzv. normalni množitelj dok je  $\lambda$ -brojni koeficijent koji određuje ulogu svake atomske orbitale i karakter jonske veze. Za kovalentnu vezu, obrazovanu atomima sa jednakim naelektrisanjem,  $\lambda = 1$ . Ako je veća razlika u elektro-negativnosti između atoma  $A$  i  $B$  onda će i  $\lambda$  više odstupati od 1.

**Dielektrična polarizacija.** — Proučavajući ponašanje molekula u električnom polju susrećemo se sa dipolnim momentom i sklonosti ka polarizaciji koje predstavljaju važna strukturna svojstva molekula.

Pod dejstvom spoljnog polja naboji se u molekulima pomeraju<sup>4)</sup>. Kao što je na početku rečeno, ako se u molekulu električna težišta raznoimenih naboja ne poklapaju — molekul poseduje dipolni momenat. U električnom polju na njega dejstvuje spreg sila, molekul se orijentiše, tj. okreće se kao celina svojim pozitivnim krajem negativnom izvoru polja,

a negativnim krajem prema pozitivnom izvoru. Električna svojstva pojedinih molekula, kao što su sklonost ka polarizaciji i dipolni momenti, ispoljavaju se u makroskopskoj karakteristici materije tzv. *dielektričnoj konstanti*.

Dielektrična konstanta ( $\epsilon$ ) predstavlja odnos kapaciteta kondenzatora ( $C$ ) kada se između polova nalazi neki dielektrik i kapaciteta kondenzatora ( $C_0$ ) kada između ploča kondenzatora je vakuum<sup>5</sup>):

$$\epsilon = \frac{C}{C_0}$$

Detaljnije razmatranje dielektrične konstante tj. njeno merenje i njenu primenu za određivanje dipolnog momenta molekula dao je Friedrich Oehme u svojoj monografiji<sup>6</sup>). Zbog toga ovde se nećemo zadržati na opširnije tretiranje ove veličine.

Dva naboja  $+e$  i  $-e$  na rastojanju  $r$  privlače se po Kulonovom zakonu. Ako među nabojima nema materije (vakuum), sila privlačenja ( $F$ ) je jednaka  $F = \frac{e^2}{r^2}$ . Međutim, ako se između naboja nalazi kakva sredina (na primer neka tečnost, gas ili čvrsta supstanca), tada se sila privlačenja umanjuje, ona nije više  $\frac{e^2}{r^2}$  nego  $\frac{\epsilon e^2}{r^2}$  gde je  $\epsilon$ -dielektrična konstanta ( $\epsilon$  je uvek veća od jedinice). Njena veza sa sklonošću ka polarizaciji izražena je jednačinom Klausius-Mosotia<sup>4</sup>):

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N \alpha = P \quad (6)$$

gde je  $M$ -molekulska težina,  $d$ -gustina,  $N$ -Avogadrov broj,  $\alpha$ -sklonost ka polarizaciji,  $P$ -molekulska polarizacija. Veličina  $\alpha$  — u jednačini(6) sastoji se iz tri dela.

Pre svega, pod dejstvom polja, kada se molekul neke supstance nalazi u električnom polju, pomeraju se elektroni. Ovaj deo polarizacije naziva se *elektronska polarizacija*. Pomeranje elektrona zavisi od jačine veza elektrona u molekulu. Ukoliko su čvršće vezani elektroni utoliko se manje pomeraju, odnosno manje je indukovani momenat ( $m_{ind}$ )

$$m_{ind} = \alpha_{el} \cdot F$$

i obrnuto, ako je elektronska polarizacija ( $\alpha_{el}$ ) veća, tada to pokazuje da su elektroni vezani labavo. U prvoj aproksimaciji elektronska polarizacija ne zavisi od temperature. Ovo je uslovljeno time što je razlika između normalnih i pobuđenih nivoa elektrona po pravilu velika i prema tome verovatnoća za pobuđena stanja je vrlo mala.

Dalje, pod dejstvom polja moguće je pomeranje nabijenih atoma i atomskih grupa u molekulu. Usled toga treba razlikovati, takode, i sklonost ka *atomskej polarizaciji* ( $\alpha_{at}$ ).



Najzad, molekul koji poseduje konstantan dipol okreće se pod dejstvom spoljnog polja težeći da zauzme položaj s najmanjom potencijalnom energijom. Ovo je uzrok sklonosti ka *orijentacionoj polarizaciji* ( $\alpha_{or}$ ). Međutim, u ovom slučaju razmeštaju molekula u polju smeta haotično toplotno kretanje. Prirodno je da orijentaciona polarizacija konstantnih dipola zavisi od temperature (za razliku od elektronske i atomske polarizacije). Kod apsolutne nule ili blizu nje čak i vrlo slabo polje sposobno je da orijentiše molekule potpuno. Pri visokim temperaturama polje nije u stanju da savlada toplotni kaos i orijentacija je neznatna. Efekat mora da zavisi od napona polja, temperature i veličine momenta, tj. od spremnosti samog molekula za orijentacijom.

Na taj način

$$\alpha = \alpha_{el} + \alpha_{at} + \alpha_{or} \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N (\alpha_{el} + \alpha_{at} + \alpha_{or}) = P. \quad (8)$$

Uvedimo oznake:

$$\frac{4}{3} \pi N \alpha_{el} = R, \quad (9)$$

$$\frac{4}{3} \pi N \alpha_{at} = P_{at}, \quad (10)$$

$$\frac{4}{3} \pi N \alpha_{or} = P_{or} \quad (11)$$

$P$  se naziva *ukupna polarizacija*,  $R$  *refrakcija* ili *elektronska polarizacija*,  $P_{at}$  -atomska i  $P_{or}$  -orijentaciona polarizacija.

Elektronska polarizacija može se odrediti iz indeksa prelamanja materije  $n$  po formuli Lorenc-Lorenca:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N \alpha_{el} = R \quad (12)$$

Zraci vidljive svetlosti izazivaju u molekulu samo elektronsku polarizaciju. Za orijentaciju i odgovarajući razmeštaj u polju potrebno je izvesno vreme. U statičkom polju ranije ili kasnije pojavljuju se sve vrste polarizacije. Ali ako je polje promenljivo (kao elektromagnetno polje svetlosti), tada se posle izmene pravca dipoli moraju preorijentisati. U slučaju veće učestanosti molekuli uopšte ne uspevaju da se srede za poljem i orijentacione polarizacije stalnih dipola nema.

Ovu pojavu je razradio Debaj<sup>17)</sup> koristeći se predstavom o vremenu relaksacije, koju je u svoje vreme uveo Maksvel u kinetičku teoriju gasova. Ova teorija razmatra pitanje vremena za koje će se molekuli pomerati iz

ma kog razloga od normalnog rasporeda brzina i vratiti u prvobitni, ako bude odstranjen uzrok koji je izazvao skretanje. Vreme za koje odstupanje padne na  $e^{-1}$ , tj. 0,37 od prvobitne vrednosti, naziva se *vremenom relaksacije* ( $\tau$ ).

Debaj je našao da ako se čestica sa radijusom  $a$  okreće u tečnosti viskoziteta  $\eta$ , imati vreme relaksacije:

$$\tau = \frac{4 \pi \eta a^3}{k T} \quad (13)$$

Za molekul vode je  $a=2 \cdot 10^{-8}$  sm i  $\tau=0,25 \cdot 10^{-1}$  sek. Odgovarajuće učestanosti leže u oblasti kratkih radio talasa.

Pri frekvenciji vidljive svetlosti kada se polje menja  $10^{15}$  puta u sekundi sva polarizacija je uslovljena samo elektronima, pošto stalni dipoli ne uspevaju da se obrnu za  $10^{-15}$  sek. Na taj način indeks prelamanja po formuli Lorenc-Lorenca omogućava da se odredi elektronska polarizacija ( $R$ ). Kada, su  $P_{at}$  i  $P_{or}$  jednaki nuli, a molekuli nepolarni, onda se zadovoljava Maksvelov odnos  $\varepsilon=n_{\infty}^2$ .

Indeks prelamanja zavisi od učestanosti. Obično se meri u promenljivom polju, čija je učestanost mala u poređenju sa učestanosti vidljive svetlosti. Radi upoređenja pune i elektronske polarizacije pri jednakim uslovima poslednju bi trebalo ekstrapolirati prema beskrajno dugim talasima. Radi ovoga postoje različite disperzione formule.

Za većinu supstanci koje poseduju apsorpcionu moć u dalekom ultraljubičastom delu spektra, refrakcija  $R_D$  za žutu liniju natrijuma praktično je blizu  $R_{\infty}$ . Za benzol  $R_D=26,19$ , a  $R_{\infty}=25,12$ . Razlika iznosi oko 4%.

Skлонost ka elektronskoj polarizaciji nije jednaka u raznim pravcima. Vrednost  $\alpha_{el}$  dobijena iz refrakcije, predstavlja srednju veličinu koja je jednaka  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}$ , gde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  predstavljaju sklonost ka polarizaciji u tri uzajamna upravna pravca.

Skлонost ka polarizaciji ima dimenziju dužina na kub. I tako je

$$m = \text{naboj} \cdot \text{dužina} = \alpha \cdot \text{napon} = \alpha \cdot \frac{(\text{naboj})}{(\text{dužina}^2)} \quad (14)$$

ili

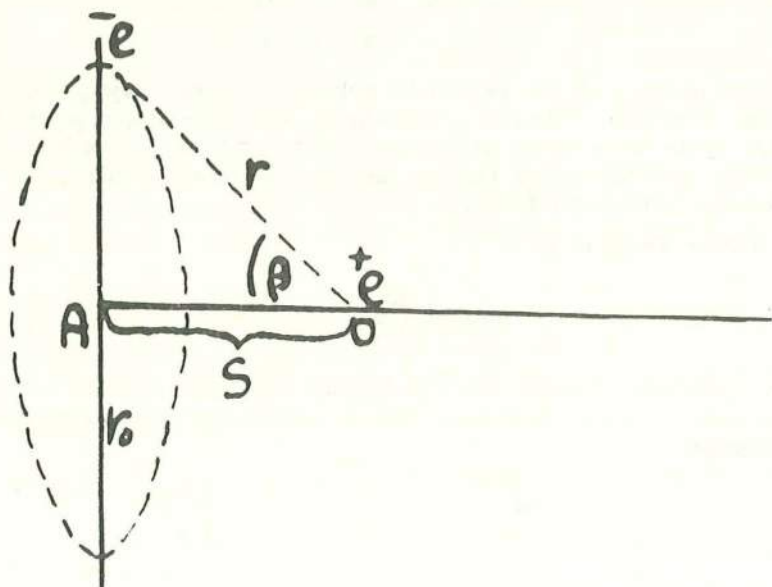
$$\alpha = (\text{dužina})^3 \quad (15)$$

Skлонost ka polarizaciji se meri u  $\text{sm}^3$ . Lako je uvideti da je reda radijus atoma na kub, tj.  $(10^{-8})^3$ . Da bi se ovo jasno pokazalo, razmotrićemo Borov vodonični atom. Elektron se okreće po krugu oko jezgra koji se nalazi u tački  $O$  (sl. 2). Pod uticajem polja  $F$  ravan putanja unekoliko se pomera za veličinu  $S$ , jednaku  $OA$ . Pritom polje deluje na naboj  $e$  silom  $eF$  i indukuje momenat  $m$ :

$$m + eS = \alpha F \quad (16)$$



Sila privlačenja elektrona jezgru jednaka je  $\frac{e^2}{r^2}$ , a njena komponenta u pravcu  $OA$  jednaka je  $\frac{e^2}{r^2} \cos \beta = \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{S}{r}$  (17)



Sl. 2

Ova sila kompenzuje uticaj polja:

$$e F = \frac{e^2 S}{r^3}, \quad (18)$$

ili

$$e S = F r^3 \quad (19)$$

Iz jednačine (16) i (19) nalazimo da je  $\alpha = r^3$  (20)

Pomeranje nije veliko i  $r^3$  je približno jednako  $a^3$ . Tačan račun po talasnoj mehanici za atom vodonika pokazuje da je  $\alpha = \frac{9}{2} a^3$  ( $a$ =Borov radijus).

Iz sklonosti ka polarizaciji helijuma lako je izračunati da je u polju od 300 V/sm pomeranje naboja jednako  $2 \cdot 10^{-16}$  sm.

Atomska polarizacija ( $P_{at}$ ) izazvana je oscilacijama atoma i atomskih grupa. Odgovarajuća učestanost leži u infracrvenoj oblasti. Određivanje atomske polarizacije zadaje velike teškoće. Jedan od načina svodi se na merenje indeksa prelamanja u infracrvenom delu spektra. Po pravilu,  $P_{at}$  nije

veliko. Tako naprimer, prema merenjima Kartrajta i Erera  $P_{at}$  za vodu iznosi 3,2, aceton 0,9, etilalkohol 3,8, dioksan 2,6, benzol 0,55 itd.

Za vrlo veliki broj materija je

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} \gg \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{d} \quad (21)$$

Ovo jasno pokazuje da se sklonost ka polarizaciji ne iscrpljuje pomeranjem elektrona u molekulu. Razlika je uslovljena, uglavnom, orijentacijom konstantnih dipola. Vezu između veličine momenata i sklonosti ka orijentacionoj polarizaciji,  $\alpha_{or}$ , daje teorija Debaj-a, koji prenosi na električne dipole teoriju paramagnetizma Lanževena.

Prema Debaj-u je

$$\alpha_{or} = \frac{\mu^2}{3 k T}, \quad (22)$$

gde je  $T$ -apsolutna temperatura,  $k$ -Bolcmanova konstanta (gasna konstanta koja se odnosi na jedan molekul). Ako se zameni ova vrednost u jednačini (8), dobijamo:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N \left( \alpha_{el} + \alpha_{at} + \frac{\mu^2}{3 k T} \right) \quad (23)$$

Orijentaciona polarizacija jednaka je:

$$P_{or} = \frac{4}{3} \pi N \alpha_{or} = \frac{4}{3} \pi N \frac{\mu^2}{3 k T} \quad (24)$$

Jednačina Klauzius - Mesoti - Debaja(23) je od velike važnosti pošto ona omogućava da se odredi stalni dipolni moment  $\mu$ . Za ovo postoje dva načina. Ako se izmeri  $\varepsilon$  pri raznim temperaturama, može se eliminisati  $\alpha_{el}$  i  $\alpha_{at}$  i izračunati  $\mu$ . Osim toga,  $\alpha_{el}$  se može odrediti iz refrakcije. Pri tome se atomska polarizacija ocenjuje približno (na primer, usvaja se oko 5% od  $P_{el}$ , pošto najveće  $P_{at}$  nije veliko. Ako se u formuli (24) stave brojne vrednosti, dobijamo za dipolni moment u debajima ( $1D=10^{-18}$  esj) na  $25^\circ$

$$\mu = 0,22 \sqrt{P_{or}} = 0,22 \sqrt{P - P_{el} - P_{at}} \quad (25)$$

U slučaju velikih dipolnih momenata orijentaciona polarizacija je velika i mala greška kod  $P_{at}$  ili  $P_{el}$ , neznatno utiče na rezultat. Prema tome, veliki dipolni momenti mogu da se izmere dovoljno tačno. Ali ako je moment mali i jednak, na primer  $0,2 D$ , tada orijentaciona polarizacija iznosi samo  $1 \text{ sm}^3$ . Pri takvoj veličini nije teško pogrešiti zbog netačnog poznavanja atomske polarizacije. Prema tome, mali momenti su nedovoljno tačni.



## METODE ZA ODREĐIVANJE DIPOLNOG MOMENTA

Eksperimentalno određivanje dipolnog momenta zasnovano je u nalaženju orijentacionog efekta (izuzetak je metoda molekularnog snopa) polarnih molekula u datom električnom polju. Teorijsko izračunavanje dipolnog momenta može se primeniti samo u tom slučaju kada se ne uzima u obzir međumolekularno uzajamno dejstvo polarnih molekula slobodno orijentisanih i van polja. Prema tome, najtačnije rezultate dipolnog momenta molekula mogu se dobiti kada se merenje vrši u gasovitoj fazi i pri niskom pritisku<sup>2)</sup>.

Sušтина eksperimentalnog određivanja dipolnog momenta molekula uslovno se može podeliti na dve grupe:

Prva grupa metoda bazira se na merenju statičke dielektrične konstante. Ovo se odnosi na metodu Debaja pri merenjima u gasovitom stanju i u razblaženim rastvorima polarnih supstanci rastvorene u nepolarnim rastvaračima.

Druga grupa metoda zasnovana je na mikrotalasnoj spektroskopiji i molekularnih snopova. U ovu grupu spadaju metoda Štarka, rezonantna mikrotalasna metoda, metoda molekularnih snopova i dr.

Najviše se primenjuju metode koje spadaju u prvoj grupi, jer one daju tačnije rezultate o dipolnom momentu molekula.

*Određivanje dipolnog momenta u gasovitom stanju (prva metoda Debaja)*

U osnovi Debaj-ove formule leži određivanje dipolnog momenta molekula u gasovitom stanju. Jednačinu

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N \left( \alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right) \quad (26)$$

možemo pisati kao

$$P = A + \frac{B}{T} \quad (27)$$

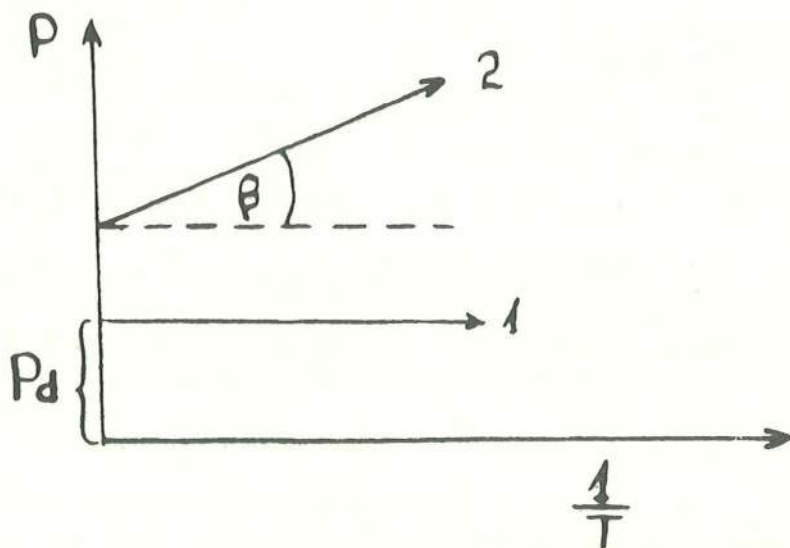
$$\text{gde je} \quad A = \frac{4}{3} \pi N (\alpha_{el} + \alpha_{at})$$

$$\text{i} \quad B = \frac{4}{9} \pi N \frac{\mu^2}{k}$$

Kao što se vidi, na osnovu gornje jednačine, orijentaciona polarizacija zavisi od temperature i javlja se u linearnoj funkciji  $\frac{1}{T}$ .

Za određivanje dipolnog momenta molekula u gasovitom stanju meri se dielektrična konstanta i gustina ispitivajuće supstance pri nekim temperaturama. Po formuli (6) nađe se odgovarajuća molekulaska polarizacija

( $P$ ) i prikazuje se na grafikonu kao funkcija od  $\frac{1}{T}$ , (sl. 3). U slučaju nepolarnih molekula ( $B=0$ ) molekulska polarizacija ne zavisi od temperature, tj. prava linija 1, kao funkcija  $P - \frac{1}{T}$ , paralelna je sa apcismom. Ako molekul



Sl. 3

posедуje stalni dipolni momenat, prava linija 2 ( $P - \frac{1}{T}$ ) sa osom apcise obrazuje ugao  $\beta$ . Ekstrapolacijom prave linije do  $T \rightarrow \infty$  na ordinati dobiva se odsečak  $P_d$ , kome odgovara veličina

$$A = P_d = P_{el} + P_{at},$$

a tangens ugla nagiba—vrednosti  $B$ :

$$B = \tan \beta = \frac{4}{9} \cdot \pi N \frac{\mu^2}{k},$$

odakle je  $\mu = 0,012813 \sqrt{B}$  (28)

Merenje dielektrične konstante i gustine supstance u gasovitom stanju se obično vrši pri niskim pritiscima. Ako se merenja vrše pri visokim pritiscima, onda posmatrana polarizacija u funkciji  $\frac{1}{T}$  odstupa od linearnosti, tj. sile prouzrokovane od međumolekularnog uzajamnog dejstva su znatno velike,



*Određivanje dipolnog momenta u razblaženim rastvorima (druga metoda Debaja)*

Metoda određivanja dipolnog momenta u gasovitom stanju teorijski je oslobođena od sistematske greške. Međutim ona ima nekoliko nedostataka eksperimentalnog karaktera: složenost primenjene aparature, relativno velika radna zapremina, nemogućnost primene u slučajevima kada se pretvaranje substance iz tečnog stanja u gasovito stanje praćeno razlaganjem (raspadanjem).

Prostija i lakša u eksperimentalnom pogledu ali manje teorijski zasnovana, je metoda za određivanje dipolnog momenta u razblaženim rastvorima polarne supstance u nepolarnom rastvaraču. Ovom metodom dozvoljeno je relativno veliko razblaženje rastvorene polarne supstance u nepolarnom rastvaraču dotle dok se molekuli polarne supstance međusobom budu rasporedili kao i u gasovitom stanju, tj. da se oni mogu slobodno orijentisati u spoljašnjem (električnom) polju.

Aditivnost molekulske polarizacije rastvora zavisno od molarnih odnosa rastvarača ( $X_1$ ) i rastvorene supstance ( $X_2$ ), jednačinom Debaja može se predstaviti u obliku:

$$P_{1,2} = \frac{\epsilon_{1,2} - 1}{\epsilon_{1,2} + 2} \cdot \frac{\sum M}{d_{1,2}} = \frac{4}{3} \pi N \alpha_1 X_1 + \frac{4}{3} \pi N \alpha_2 X_2 = P_1 X_1 + P_2 X_2 \quad (29)$$

indeks 1 odnosi se na rastvarač a indeks 2 na rastvorenu supstancu, dok  $M = M_1 X_1 + M_2 X_2$ . Polarizacija rastvora ( $P_{1,2}$ ) i polarizacija rastvarača ( $P_1$ ) određuju se neposredno iz eksperimentalnih vrednosti dielektrične konstante i gustine, dok  $X_1$  i  $X_2$  su date kao poznate veličine, te prema tome, iz jednačine (29) proizilazi da se lako može izračunati polarizacija rastvorene supstance:

$$P_2 = \frac{P_{1,2} - P_1}{X_2} + P_1 \quad (30)$$

Molekulska polarizacija rastvorene supstance određuje se za nekoliko različitih koncentracija a zatim ekstrapolacijom određuje se  $P_2$  do nulte koncentracije da bi na taj način korigovali efekat uzajamnog međumolekularnog dejstva rastvorene supstance:

$$P_{2\infty} = \lim_{X_2 \rightarrow 0} P_2 = \lim_{X_2 \rightarrow 0} \left( \frac{P_{1,2} - P_1}{X_2} + P_1 \right) \quad (31)$$

Znajući veličinu molekulske polarizacije pri beskonačnom razblaženju ( $P_{2\infty}$ ), moguće je izračunati orijentacionu polarizaciju po formuli

$$P_{or2\infty} = P_{2\infty} - P_{el} - P_{at} \quad (32)$$

i onda naći dipolni moment molekula rastvorene supstance

$$\mu = 0,012813 \sqrt{P_{or2} \cdot T} \quad (33)$$

Veliki nedostatak metode razblaženih rastvora javlja se u nemogućnosti ekstrapolacije veličine  $P_2$  pri beskonačnim razblaženjima. Već su vršeni opiti u cilju smanjivanja te greške formulom ekstrapolacije. Najuspešnija i rasprostranjenija je formula Hedestranda

$$P_{or\infty} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M_2}{d} + \frac{M_1 [3\alpha\varepsilon_1 - \beta(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)]}{d_1(\varepsilon_1 + 2)^2} \quad (34)$$

$\varepsilon_1$ ,  $d_1$  i  $M_1$  — odnose se na rastvarač.  $M_2$  — molekulska težina rastvorene supstance. Koeficijent  $\alpha$  i  $\beta$  određuju se iz jednačina

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_1 (1 + \alpha X_2), \quad d_{1,2} = d_1 (1 + \beta X_2)$$

gde su  $\varepsilon_{1,2}$  i  $d_{1,2}$  — dielektrična konstanta i gustina rastvora. Formula (34) primenjuje se kod takvih razblaženih rastvora kod kojih dielektrična konstanta i gustina stoje u linearnoj zavisnosti sa koncentracijom.

Kako pokazuju mnogi eksperimentalni podaci, dipolni momenat određivan metodom razblaženih rastvora obično je niži upoređen sa podacima nađenih kod gasova ili para. Ova razlika prouzrokovana je raznim faktorima (uticaj rastvarača, uzajamno dejstvo među molekulima rastvorene supstance i dr.). Za izračunavanje korekcije uticaja rastvarača Miler (9) je predložio sledeću empirijsku jednačinu:

$$\frac{P_{\infty}}{P_g} = 1 - 0,075 (\varepsilon - 1)^2 \quad (35)$$

gde su  $P_{\infty}$  i  $P_g$  odgovarajuća polarizacija supstance pri beskonačnom razblaženju i gasovitom stanju,  $\varepsilon$  — dielektrična konstanta rastvarača.

Nešto bolji rezultati dobijaju se iz sličnih jednačina (36) i (37)

$$\frac{\mu_r}{\mu_g} = 1 + 0,43 A (\varepsilon - 1), \quad (36)$$

$$\frac{\mu_r}{\mu_g} = 1 + 3 A' \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \quad (37)$$

$\varepsilon$  — dielektrična konstanta rastvarača,  $A$  i  $A'$  — konstante, koje zavise od oblika i razmera molekula ispitivane supstance, a takođe i od položaja dipola. Ove jednačine moguće je primeniti za različite klase jedinjenja. Podjednako pri njihovoj upotrebi nailazi se na teškoće, vezane sa izračunavanjem konstante  $A$  i  $A'$ . Približni rezultati izvođeni po formulama (36) i (37) dovoljno se poklapaju sa ogledima datim u tablici 1<sup>10</sup>).



Tab. — 1 Odnos  $\frac{\mu_r}{\mu_g}$ 

| Supstanca                                       | $\frac{\mu_r}{\mu_g}$ |                 |                 |
|-------------------------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
|                                                 | Ogled (nađeno)        | Po formuli (36) | Po formuli (37) |
| CH <sub>3</sub> J                               | 1,00                  | 1,00            | 0,99            |
| CH <sub>3</sub> Cl                              | 1,12                  | 1,05            | 1,08            |
| CH <sub>3</sub> COCH <sub>3</sub>               | 0,96                  | 0,98            | 0,96            |
| C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH                | 0,98                  | 1,01            | 1,02            |
| izo-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> OH            | 1,04                  | 1,02            | 1,04            |
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COCH <sub>3</sub> | 0,98                  | 0,99            | 0,98            |
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> CN                | 0,90                  | 0,95            | 0,92            |
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> Cl                | 0,92                  | 0,94            | 0,91            |
| CH <sub>3</sub> NO <sub>2</sub>                 | 0,88                  | 0,97            | 0,96            |
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> NO <sub>2</sub>   | 0,94                  | 0,96            | 0,89            |
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> Br                | 0,88                  | 0,95            | 0,92            |
| (C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O | 1,06                  | 1,04            | 1,05            |
| C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Br                | 0,94                  | 0,96            | 0,94            |

Teorija Debaja ne dopušta neposredno ustanoviti vezu između statičke dielektrične konstante čiste polarne tečnosti i njenog dipolnog momenta. Za rešavanje ovog problema su učinjeni pokušaji od strane Onzangera (11) i drugih istraživača. Po teoriji Onzangera, molekuli polarnih tečnosti predstavljaju prazne lopte u čijim centrima raspoređen je tačkasti dipol. Ova teorija data je jednačinom:

$$\frac{(\epsilon_s - n^2)(2\epsilon_s + n^2)}{\epsilon_s(n^2 + 2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi N}{V} \cdot \frac{\mu^2}{3kT} \quad (38)$$

gde je  $\epsilon_s$  — statička dielektrična konstanta,  $n$  — indeks prelamanja i  $V$  — molarna zapremina tečnosti,  $\mu$  — dipolni momenat. Jednačina (38) može se predstaviti u sledećem obliku:

$$\mu^2 = BV \frac{(\epsilon_s - n^2)(2\epsilon_s + n^2)}{\epsilon_s(n^2 + 2)}, \quad (39)$$

$$\text{gde } B = \frac{9kT}{4\pi N} = \frac{9 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 293}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 4,80 \cdot 10^{-38} \text{ CGSE.}$$

Formule (38) i (39) daju mogućnost, znajući  $\epsilon$ ,  $n$ ,  $V$ , za određivanje dipolnog momenta molekula. Iz jednačine (38) dobivaju se bolji rezultati kada se ona primenjuje na slabo polarnim tečnostima. Sa povećanjem polarnosti tečnosti

razlika među dipolnim momentima molekula, određen u gasnoj fazi i u razblaženim rastvorima po metodi Debaja, postaje veća. Kirkvud<sup>12)</sup> je proučavao odnose između statičke dielektrične konstante polarnih tečnosti i dipolnog momenta kod sferičnih molekula. Po njegovoj teoriji imamo sledeći odnos:

$$\frac{(\epsilon_s - 1)(2s + 2)}{9\epsilon_s} = \frac{4}{3}\pi N \left[ \alpha + \frac{\mu^2 g}{3kT} \right] \quad (40)$$

$$g = 1 + z \overline{\cos \gamma},$$

gde je  $z$  — broj najbližih susednih molekula tj. srednji koordinacioni broj molekula polarne tečnosti,  $\overline{\cos \gamma}$  — srednja vrednost kosinus ugla između smerova usmerenih dipola dvaju susednih molekula.

Za određivanje veličine  $g$  treba tačno znati strukturu tečnosti i prirodu sile međumolekularnih uzajamnih dejstva. Ovaj problem još uvek do danas potpuno nije rešen.

Na osnovu statičke teorije Onzangera i Kirkvuda, Šapharonov<sup>14)</sup> je, povezujući statičku dielektričnu konstantu s dipolnim momentom, izveo opštu formulu:

$$\mu_g^2 = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)(2\epsilon_s + \epsilon_\infty)}{3\epsilon_s} \cdot \left( \frac{3}{\epsilon_\infty + 2} \right)^2 \cdot \frac{3VkT}{4\pi N} = \mu_r^2 \quad (41)$$

gde je  $\mu_g$  — dipolni momenat molekula u beskonačno razređenom gasu,  $N$  — broj molekula u zapremini  $V_M$ ,  $\epsilon_\infty$  — veličina dielektrične konstante koja se odnosi na deformaciju molekula polarne tečnosti pri datom spoljašnjem polju. Parametar  $g$  ima isti smisao kao u jednačini Kirkvuda. Formula (41) takođe, daje slične rezultate u čijoj osnovi leži pretpostavka o sferičnom obliku molekula dielektrika da molekul poseduje stalni dipol i ispunjava homogenu sredinu sa dielektričnom konstantom  $\epsilon_\infty$ . Prema tome odstupanje  $g$  od 1 može biti prouzrokovano ne samo periodičnošću i orijentacijom molekula (pri odsustvu orijentaiconog uticaja kratkodejstvujućih sila  $\overline{\cos \gamma} = 0$ ;  $g = 1$ ), nego i nesavršenstvom same teorije. Međutim, parametar  $g$  može služiti kao merilo odstupanja efektivnog dipolnog momenta  $\mu_r$  molekula u tečnoj fazi od veličine momenat  $\mu_g$  u gasnoj fazi

$$\sqrt{g} = \frac{\mu_r}{\mu_g}.$$

U tablici 2 (13) dati su rezultati izračunatog  $\mu_r$  na 25°C po formuli (41). Ovi rezultati su upoređeni sa vrednostima  $\mu_g$  za polarne tečnosti.

U heksanu, benzolu i ugljendisulfidu  $\mu_g$  za hlorbenzola jednak je 1,52—1,54 D i  $\sqrt{g} = 1,0$ .

Kao što se vidi iz priloženih podataka kod prve četiri tečnosti  $\mu_g$  i  $\mu_r$  dobro se slažu a najviše odstupanje  $\sqrt{g}$  od jedinice verovatno je prouzro-



kovano netačnim merenjima dielektrične konstante ili nesavršenošću same teorije. M. J. Šapharonov<sup>13</sup>) dokazao je zavisnost  $\sqrt{g}$  od temperature  $g=f(t^\circ)$  što omogućava da se izvede zaključak o karakteru raspoređivanja orijentacije molekula polarnih tečnosti.

Tab. 2 — Vrednosti  $\epsilon_\infty$ ,  $\epsilon_s$ ,  $\mu$  i  $d$  za tečnosti

| Tečnost     | $t^\circ\text{C}$ | $\epsilon_s$ | $\epsilon_\infty$ | $d_4$ | $\mu_g \cdot 10^{18}$<br>CGSE | $\mu_r \cdot 10^{18}$<br>CGSE | $\sqrt{g}$ |
|-------------|-------------------|--------------|-------------------|-------|-------------------------------|-------------------------------|------------|
| Aceton      | 25                | 20,50        | 2,11              | 0,785 | 2,85                          | 2,91                          | 1,02       |
| Nitrobenzol | 25                | 35,25        | 2,43              | 1,198 | 4,21                          | 4,20                          | 1,00       |
| Nitrometan  | 30                | 35,87        | 1,90              | 1,124 | 3,50                          | 3,50                          | 1,00       |
| Piridin     | 25                | 12,9         | 2,27              | 0,978 | 2,22                          | 2,22                          | 1,00       |
| Hlorbenzol* | 25                | 5,62         | 2,24              | 1,101 | 1,70                          | 1,53                          | 0,90       |
| Hloroform   | 20                | 4,81         | 2,34              | 1,489 | 1,02                          | 1,12                          | 1,10       |
| Etiletar    | 20                | 4,33         | 1,97              | 0,713 | 1,16                          | 1,32                          | 1,14       |

Teškoće pri izračunavanju dipolnog momenta po formuli(41) u prvom redu vezane su sa određivanjem veličine  $\epsilon_\infty$ . Veličinu  $\epsilon_\infty$  možemo odrediti po formuli

$$P_d = \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} \cdot V_M, \quad (42)$$

gde je  $P_d$  — deformaciona polarizacija jednaka zbiru elektronskoj ( $P_{el}$ ) i atomskoj ( $P_{at}$ ) polarizaciji i  $V_M$  — molarna zapremina. Veličinu  $\epsilon_\infty$  moguće je odrediti merenjem apsorpcije svetlosti u dalekoj infracrvenoj oblasti.

Frölih<sup>14</sup>) uveo je jednačinu koja je, po njegovom mišljenju, bolja i potpunija od jednačina(38, 40 i 41):

$$\epsilon_s - \epsilon_\infty = \frac{3 \epsilon_s (2 \epsilon_s + \epsilon_\infty)}{(2 \epsilon_s + 1)^2} = \frac{4 \pi N \mu_i \mu_i^*}{3 k T}, \quad (43)$$

gde je  $\mu_i$  — dipolni momenat molekula anđen u sredini sa dielektričnom konstantom  $\epsilon_s$ ,  $\mu_i^*$  — dipolni momenat sfere, koja sadrži značajni broj molekula koji imaju dielektričnu konstantu  $\epsilon_s$ .  $\mu_i^*$  možemo smatrati kao momenat sfere ako jedan od ovih molekula zauzima stacionarni noložaj  $\mu_i$ . Veličina  $\mu_i$  ne javlja se stalno a zavisi od  $\epsilon_s$  i  $\epsilon_\infty$ .

Mada izvođenje formule(43) nije moguće primenom formule(41) koja se odnosi na šuplji oblik molekula sa dielektričnom konstantom  $\epsilon_\infty$  i poseduje tačkasti dipol i primenom formule(43) ne dobivaju se istovetni rezultati. Ne osvrćući se na druge jednačine, vezujući statičku dielektričnu konstantu polarnih tečnosti s dipolnim momentom molekula, napominjemo da

u svim jednačinama sadrži se eksperimentalno neodređeni parametar  $g$  što ujedno otežava i njihovu primenu. Ipak razmotrene jednačine mogu biti korisne (ako se zna veličina dipolnog momenta) za izučavanje bližeg poretka tečnosti.

### *Određivanje dipolnog momenta pomoću efekta Štarka*

Promene u spektru molekula izazvane dejstvom spoljašnjeg električnog polja (efekat Štarka) mogu biti iskorišćene za određivanje dipolnog momenta molekula.

Obrtni nivo odgovara punom momentu količine kretanja ( $j$ ). U odsustvu spoljašnjeg polja ( $2j+1$ ) trenutno se javlja slični sa  $2j+1$  moguće orijentacije vektora momenta količine kretanja u prostoru. Tako da  $U$  — energija molekula sa dipolnim momentom  $\vec{\mu}$  u spoljašnjem homogenom električnom polju  $E$  zavisi od uzajamne orijentacije vektora  $\vec{\mu}$  i  $\vec{E}$ :

$$U = -(\vec{\mu} \cdot \vec{E}), \quad (44)$$

U opštem slučaju energestko stanje molekula odgovara različitim orijentacijama vektora  $\vec{\mu}$ , pa prema tome i različite orijentacije vektora momenta količine kretanja bivaju različite. Efekat Štarka u spoljašnjem električnom polju može se smatrati kao rastvavljanje linija koje odgovaraju obrtnom nivou. Merenje veličine razdvajanja povratnih linija u spoljašnjem električnom polju dozvoljava izračunavanje veličine dipolnog momenta molekula.

U zavisnosti od prisustva postojećeg dipolnog momenta, smer dužine vektora ukupnog momenta količine kretanja, posmatra se odgovarajući efekat Štarka prvog reda (razdvajanje linija proporcionalno je prvom stepenu napona spoljašnjeg polja  $E$ ) ili efekat Štarka drugog reda (razdvajanje je proporcionalno  $E^2$ ). Za efekat Štarka u slučaju linearnih molekula ili molekula tipa simetrične čigre moguće je dobiti tačnu formulu koja povezuje dipolne momente sa veličinom razdvajanja. Linearni molekuli imaju efekat Štarka drugog reda. Razdvajanje nivoa može biti predstavljeno u obliku

$$\Delta \varepsilon = \frac{\mu^2}{2 \hbar B} \cdot \left[ \frac{j(j+1) - 3M^2}{j(j+1)(2j-1)(2j+3)} \right] E^2, \quad (45)$$

gde je  $\mu$  — dipolni momenat molekula,  $\hbar$  — Plankova konstanta podeljena sa  $2\pi$ ,  $B$  — momenat inercije molekula koji se odnosi na osu, koja prolazi kroz centar mase normalno osi molekula,  $j$  — kvantni broj momenta količine kretanja,  $M$  — kvantni broj projekcije vektora momenta količine kretanja u pravcu linija električnog polja  $E$ .

Kod molekula tipa simetrične čigre posmatra se linearni efekat Štarka:

$$\Delta \varepsilon = \frac{2 \mu K M}{j(j+1)(j+2)} \cdot E, \quad (46)$$



gde je označavanje isto kao i forumuli (45).  $K$  — kvantni broj projekcije vektora momenta količine kretanja na osu simetrije molekula.

Ako spoljašnje električno polje  $E$  je poznato, prelaz sa tačnošću identifikovan, pomeranjem gustine linija uslovljene efektom Štarka, moguće je odrediti dipolni momenat molekula. Merenje se vrši metodom mikrotalasne spektroskopije.

Tačnu formulu za razlaganje efekta Štarka u molekulima asimetrične čigre je teško dobiti. Ipak proučavanje efekta Štarka omogućava izračunavanje dipolnog momenta i u ovom slučaju. Velika osetljivost metode dozvoljava određivanje dipolnog momenta i u onim slučajevima kada se molekul nalazi u ekscitiranom stanju.

### *Određivanje dipolnog momenta metodom molekulskog snopa*

Za određivanje dipolnog momenta molekula može biti upotrebljena metoda otklanjanja molekulskih snopova u električnom polju. Molekul, koji se kreće duž pravca  $OX$  u heterogenom električnom polju  $E_0$ , koji takođe, kao i njegov gradijent, upravo na  $OX$ , podleže dejstvu sila  $\mu_z$  (ef).  $\frac{dE_0}{dz}$ , izazivajući otklanjanje snopa u pravcu ose  $z$ . Posle merenja efekta pomeranja snopa može se izračunati veličina dipolnog momenta molekula. Mala tačnost, ove metode uslovljena je prisustvom različitih molekula u samom snopu koji se nalazi u različitim stanjima raspoređeni po brzini i netačnog merenja gradijenta električnog polja.

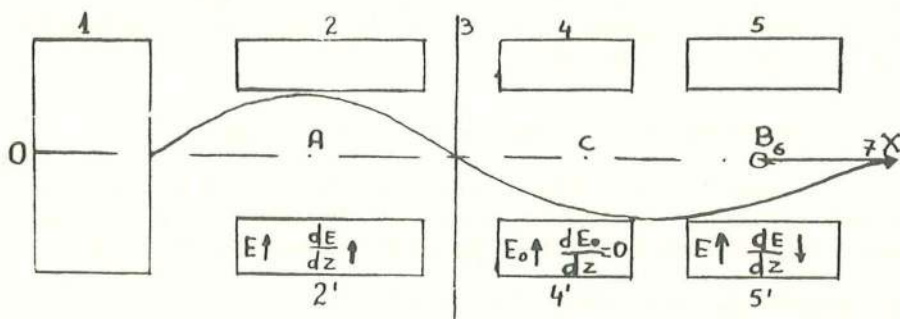
Ovom metodom su određeni dipolni momenti samo linearnih molekula. Detaljnija uputstva o teoriji i merenjima pomoću ove metode data su u monografiji (15) od strane Smita.

### *Električno-rezonantna metoda određivanja dipolnog momenta*

Neodređenosti, koje su se pojavile u metodi otklona molekularnog snopa, moguće je odstraniti primenom električne rezonantne metode. Princip metode je razjašnjen na slici 4 gde je 1 — izvor molekularnog snopa, 2, 2' — elektrode koje stvaraju električno polje u oblasti  $A$  u pravcu  $2' \rightarrow 2$  sa gradijentom u smeru  $2' \rightarrow 2$ , 3 — otvor kolimatora, 4, 4' — elektrode koje stvaraju homogeno električno polje u smeru  $4' \rightarrow 4$  u oblasti  $C$  (u ovoj oblasti stvara se promenljivo električno polje), 5, 5' — elektrode koje stvaraju električno polje u oblasti  $B$  u smeru  $5' \rightarrow 5$  sa gradijentom u smeru,  $5 \rightarrow 5'$ , 6 — zaklon koji odstranjuje molekule sa malim efektivnim dipolnim momentom, 7 — detektor. Snop molekula iz izvora 1 usmeren je duž ose sistema. Molekuli prolaze kroz oblasti  $A$  i  $B$  heterogenog polja sa strogo

suprotnim gradijentima  $\frac{dE}{dz}$  i oblasti homogenog polja  $C$ . Konstrukcija aparature je takva da se snop molekula koji se nalazi u jednom određenom povratnom stanju, skuplja posle prolaska kroz tri oblasti  $A$ ,  $B$  i  $C$  ka jednoj tački, u kojoj je smešten detektor čestica. Mada trajektorija (putanje) čestica

sa različitim putanjima je različita unutar snopa, ipak se oni skupljaju ili usmeravaju u tački gde je smešten detektor<sup>7)</sup> ako se usput ne dešavaju promene orijentacije. Nisko-frekventno polje, koje deluje u oblasti  $C$  homogenog polja  $E_0$ , pri pravilno izabranoj frekvenci indukuje prelaz između stanja sa različitim orijentacijama dipolnih momenata molekula, izaziva promene trajektorije u oblasti  $B$  pa prema tome molekuli i nepadaju na detektor. Promena frekvence polja i izmerena promena takvih čestica, koje padaju na



Sl. 4

detektor, određuju frekvenciju na kojoj se javlja rezonanca. Na taj način u rezonantnoj metodi proučava se prelaz između nivoa molekula u homogenom statičkom polju  $E_0$  koje odgovara različitim orijentacijama dipolnih momenata. Električnom rezonantnom metodom određuju se dipolni momenti samo linearnih molekula. Formulu koja daje mogućnost za izračunavanje dipolnih momenata linearnih molekula posle izmerene frekvence  $\nu$  kod prelaza (pri transformaciji)  $(1,0) \rightarrow (1, \pm 1)$  možemo predstaviti u obliku<sup>15)</sup>:

$$h\nu = \frac{3(\mu E_0)^2}{20(\hbar^2/2B)} - \frac{0,00959(\mu \cdot E_0)^4}{(\hbar/2B^3)} \quad (47)$$

gde veličina  $B$  ima smisao kao i u formuli(45).

Električna rezonantna metoda daje visoku tačnost, ali neophodnost složenih aparatura i ozbiljnih eksperimentalnih teškoća ograničavaju oblast njene primene.

#### *Određivanje dipolnog momenta tečnosti pomoću merenja gubitka u dielektričnoj konstanti u mikrotalasnoj oblasti*

U tečnostima veliki broj sudara bližih susednih molekula međusobom mešaju posmatrane diskretne krive linije. Podjednako polarne tečnosti pokazuju široke trake pri visokim frekvencijama. Ova široka oblast apsorpcije ima maksimum pri frekvenciji  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$ ,<sup>5)</sup> gde je  $\tau$  — srednje vreme



relaksacije pri preorijentaciji molekularnih dipola. Merenjem frekvence maksimalne apsorpcije moguće je odrediti veličinu  $\tau$ . Apsorpcija određuje se gubitkom tangens ugla ( $\operatorname{tg} \delta$ ). Po teoriji Debaja<sup>16)</sup> 17) za razblažene rastvore polarnih supstanci u nepolarnim rastvaračima tangens ugla je jednak:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(\varepsilon + 2)^2}{\varepsilon} \cdot \frac{4 \pi \mu^2 C N_o \nu}{27 k T \nu_o [1 + (\nu / \nu_o)^2]} \quad (48)$$

gde je  $\varepsilon$  — statička dielektrična konstanta rastvora,  $\mu$  — dipolni moment molekula polarne substance,  $\nu$  — dobivena frekvencija,  $\nu_o = \frac{1}{2} \pi \tau$  — frekvencija maksimalne apsorpcije i  $C$  — koncentracija.

Iz merenja tangens ugla pri tri ili više brojeva različitih frekvenci, na osnovu jednačine (48), moguće je izračunati vrednosti za  $\varepsilon$ ,  $\mu$  i  $\nu_o$ . Moguće je takođe vršiti merenja pri postojećim frekvencijama i permanentnim temperaturama pri čemu se dobijaju neophodni podaci za određivanje dipolnog momenta, srednjeg vremena relaksacije i dielektrične konstante.

#### *Određivanje dipolnog momenta veza merenjem intenziteta traka apsorpcionih spektara*

Za proučavanje prostornih struktura molekula i upoznavanje prirode hemijske veze neophodno je ne samo određivanje ukupnog dipolnog momenta nego i momenta pojedinih veza. Dosada razmotrene eksperimentalne metode za određivanje dipolnog momenta malo mogu da pomognu za nalaženje momenta pojedinih veza u složenim molekulima.

Mekke<sup>16)</sup> je predložio novu metodu za eksperimentalno određivanje dipolnog momenta unutar molekularnih veza. Metoda se zasniva na merenjima intenziteta infracrvenih spektara molekula tako da intenzitet vibracionih traka, uglavnom, zavisi od promene dipolnog momenta. Ovo nam daje mogućnost za određivanje momenta veza, valentnih vibracija koje su uslovljene odgovarajućim apsorpcionim trakama. Prema kvantnoj mehanici intenzitet apsorpcione trake koja odgovara prelazu  $\nu \rightarrow \nu'$  ( $\nu$  i  $\nu'$  su vibracioni kvantni brojevi) je određen kvadratom odgovarajućeg tzv. pseudomomenta.<sup>16)</sup> Na taj način postoji principijelna mogućnost određivanja električnog momenta veza iz eksperimentalno izmerene površine odgovarajuće apsorpcione trake pod uslovom da su poznate talasne funkcije koje odgovaraju molekulskim vibracionim stanjima koja se kombinuju, kao i zavisnost dipolnog momenta veza od međuatomskeg rastojanja.

Mekke je takođe predložio empirijsku formulu, koja karakteriše moment pojedinih veza kao zbir jonskih, kovalentnih i induktivnih komponenta.

Na osnovu izmerenog intenziteta trake infracrvenih apsorpcionih spektara određuje se dipolni moment pojedinih veza prostih molekula ( $\text{HCl}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CHCl}_3$ ,  $\text{CF}_4$ ,  $\text{SiF}_4$ ).

## ATOMSKA POLARIZACIJA

Pri izračunavanju dipolnog momenta po formulama (32 i 33) metodom razblaženih rastvora javlja se nekoliko nedostataka, koji se pre svega odnose na atomsku polarizaciju,  $P_{at}$ .

Obično  $P_{at}$  od prilike iznosi 5—10% od  $P_{el}$  i zanemaruje se pri izračunavanju a pri tome se unose i neznatne greške pri određivanju dipolnog momenta. U slučajevima kada je dipolni momenat mali (reda veličina od 0,1—0,5 D), uticaj  $P_{at}$  je neznatan da bi se moglo pogrešiti. Za određivanje atomske polarizacije primenjuju se sledeće metode:

1. *Merenjem temperaturske zavisnosti molekularne polarizacije.* — Segment (odsečak)  $P_d$  na grafikonu 3

$$P - \frac{1}{T} \text{ odnosi se na } P_d = P_{el} + P_{at}$$

Znajući vrednost za elektronsku polarizaciju ( $P_{el}$ ) moguće je izračunati atomsku polarizaciju ( $P_{at}$ ). Ova metoda tačnija je pri merenjima u gasovitim fazama a kod merenja u razblaženim rastvorima tačnost opada.

2. *Merenjem dielektrične konstante substance u čvrstom stanju pri temperaturi bliže tački topljenja.* — U ovom slučaju izračunavanje se vrši pomoću formule (29). Ovakva merenja pri datim uslovima isključuju orijentacioni efekat tako da dobijena molekularna polarizacija biće jednaka

$$P_d = P_{el} + P_{at}.$$

Odavde, znajući  $P_{el}$ , možemo izračunati vrednost za atomsku polarizaciju<sup>10</sup>).

3. *Atomsku polarizaciju možemo odrediti pomoću merenja indeksa prelamanja pri infracrvenim frekvencijama* a izračunavanje se vrši po disperzionoj formuli

$$P_{at} = \frac{N}{9\pi} \sum_i \frac{e_i^2}{m_i (\nu_i^2 - \nu_o^2)} \quad (49)$$

gde su  $e_i$  i  $m_i$  — efektivni naboj, i masa, povezano sa sopstvenom vibracijom molekula pri frekvenci  $\nu_i$ , a  $\nu_o$  — frekvenca upadne svetlosti. Postoje tablice u kojima su date atomske polarizacije za atome i molekule pojedinih elemenata i njihovih jedinjenja.<sup>2)</sup>

*Primena dipolnog momenta.* — Dipolni momenat, kao molekulska konstanca, karakteriše električnu simetriju odnosno geometriju molekula.

Poznavanje veličine dipolnog momenta neophodno je za izučavanje prirode hemijskih veza, stepen donor-akceptorskih osobina pojedinih atoma odnosno radikala i za kvantno-mehaničkih merenja.

Na osnovu veličine dipolnog momenta može se zaključiti o izomeriji odnosno konfiguraciji organskih i kompleksnih jedinjenja

Na sledećim primerima prikazaćemo primenu dipolnih momenata na proučavanju struktura kompleksnih jedinjenja kobalta.

E. O. Fischer i S. Schreimer<sup>18</sup>) vršili su merenje dipolnih momenata metalnih kompleksa ciklopentadienila tipa  $\text{Me} (\text{C}_5\text{H}_5)_2$  za prelazne elemente



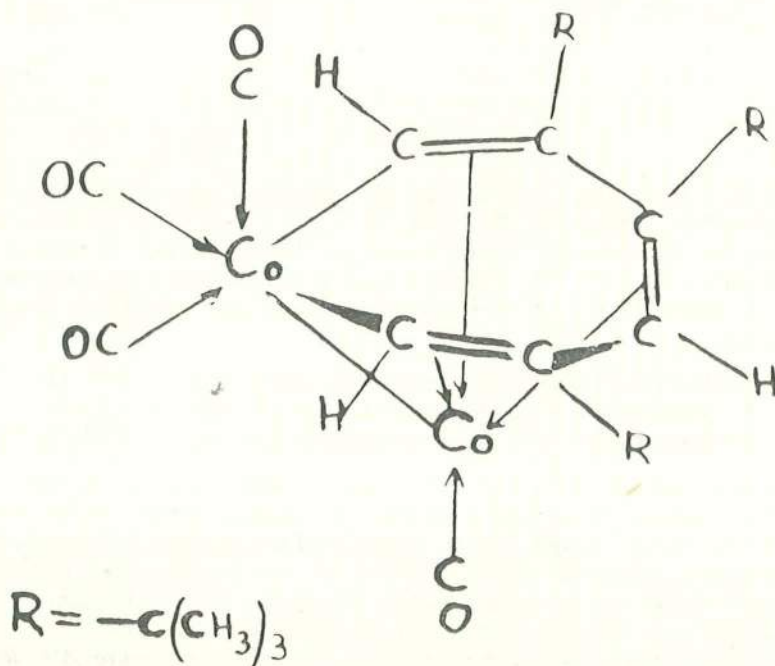
Co, Ni, Ru, Os, Cr i V. Dipolni momenat ovih kompleksa jednak je nuli. Oni pretpostavljaju da među ligandima nema nikakav napon. Slično i kod šestočlanih aromatičnih kompleksa tipa  $Mc (C_6H_6)_2$  su našli da dipolni momenat jednak je nuli. Na osnovu toga oni pretpostavljaju trans položaj substituenata.

Aromatični metalni karbonili tipa  $Ar Mc (CO)_3$  poseduju veliki dipolni momenat a momenti rastu kada se u benzolovom prstenu uvedu substituenti sa donorskim osobinama kao što su  $-CH_3$ ,  $-NH_2$ ,  $-OH$ ,  $-OCH_3$ , a smanjuju kada se uvedu substituenti sa akceptorskim osobinama kao što su  $-F$  ili  $-COCH_3$ . Oni ove promene pripisuju polarizaciji  $\pi$ -veza u smeru prsten ( $\delta^+$ )  $\rightarrow M(\delta^-)$ .

Rentgenografskim ispitivanjima utvrđeno je da ovi kompleksi imaju pentagonalnu antiprizmatičnu molekulsku strukturu.

Merenje dipolnih momenata vršeno je u razblaženim benzolovim rastvorima na  $25^\circ$ . Izračunato je po jednačini Hedestranda (34). Pri tome je nađeno da dipolni momenat di-ciklopentadienil kobalta,  $/(Co (C_5H_5)_2/$  jednak je nuli ( $\mu = 0 \pm 0,38 D$ ).

Na osnovu merenja dipalnog momenta ( $\mu = 2,20 \pm 0,16 D$ ) U. Kruerke sa saradnicima<sup>19)</sup> za kompleksno jedinjenje  $Co (CO)_4 / (CH_3)_3 C.C_2H_5/3$  pretpostavljaju nesimetričnu strukturnu formulu (I), Atom kobalta u  $Co (CO)_3$  grupi gradi sa molekulima alkina nepravilan sedmočlani prsten na kome susedne tercijarne butil grupe sterno nisu ometane. Razaranjem kompleksa

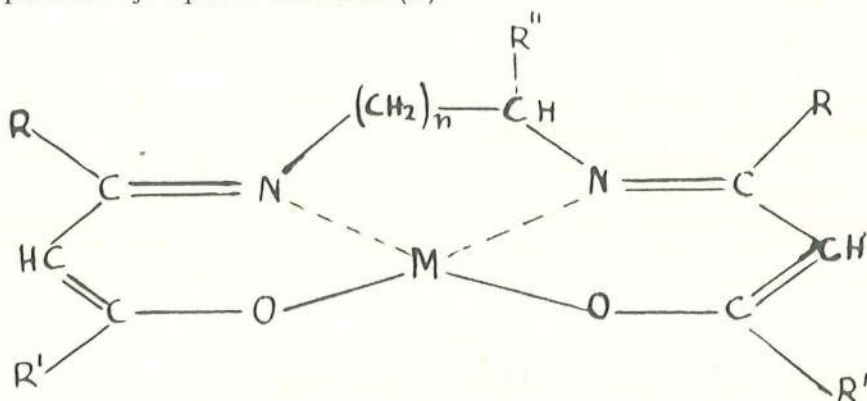


Formula I

(I) pomoću broma kobalt se odvaja u obliku  $\text{CoBr}_2$ , pri čemu organski ligand zatvara benzolov prsten.

Merenje dipolnog momenta izvedeno je u razblaženom benzolovom rastvoru.

J. Paul i E. Artur<sup>20)</sup> proučavali su kompleksna jedinjenja metala sa acetil-aceton-etilendiaminom i njihovim derivatima. Oni su uporedo vršili određivanje dipolnih momenata kompleksnih jedinjenja Pd, Cu, Ni i Co, čiji koordinacioni brojevi u ovom slučaju iznose četiri. Na osnovu merenja dipolnih momenata su došli do zaključka da stabilnost ovih kompleksa je povezana sa dipolnim momentom i to sa opadanjem dipolnog momenta smanjuje se i njihova stabilnost po sledećem redosledu: Pd Cu Ni Co. Kvadratno-planarna struktura tih kompleksa i njihovih adicijonih jedinjenja prikazano je opštom formulom (II)



Formula II

gde a)  $\text{R} = \text{R}' = \text{CH}_3$ ; — acetil-acetonat ostatak, b)  $\text{R} = \text{C}_6\text{H}_5$ ,  $\text{R}' = \text{CH}_3$ , — benzoil-aceton ostatak, c)  $\text{R} = \text{CH}_3$ ,  $\text{R}' = \text{CF}_3$ , — trifluoro-acetil-acetonat ostatak, Pod a) kao most je etilen-diamin  $n=1$  a  $\text{R}=\text{H}$ , pod b) most je propiendiamin,  $n=1$ ,  $\text{R}=\text{CH}_3$ , i pod c) most je trimetilendiamin,  $n=2$ ,  $\text{R}=\text{H}$ .

U tabeli (II) prikazani su dipolni momenti za komplekse bakra, nikla i kobalta:

1. Bis-benzoil-aceton-propilendiimino-bakar (II) = 4,54 D
2. Bis-benzoil-aceton-propilendiimino-nikal (II) = 4,35 D
3. Bis-benzoil-aceton-propilendiimino-kobalt (II) = 4,03 D

Sva merenja su vršena u razblaženim benzolovim rastvorima.

U nastavku ovog rada tabelarno su prikazani dipolni momenti kompleksnih jedinjenja i drugih metala. U prvoj koloni data je molekulska formula kompleksnog jedinjenja metala, velikim slovom je naznačen upotrebljeni rastvarač: B-benzol, Us-ugljendisulfid, H-heksan, Ch-cikloheksan, D-dioksan. Zatim naznačena je temperatura pri kojoj je vršeno merenje, vrednost dipolnog momenta, koja je podvučena, i redni broj literature gde je rad objavljen.



## Kompleksna jedinjenja aluminijuma

|                                                                            |                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ NH}_4\text{Br}$                             | $20^\circ \text{ B } 6,7 \text{ (20)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ JBr}$                                       | $20^\circ \text{ Us } 1,3 \text{ (21)}$                                                                                                       |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ KBr}$                                       | $20^\circ \text{ B } 9,7 \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ KCl}$                                       | $20^\circ \text{ B } 10, \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ LiBr}$                                      | $20^\circ \text{ B } 8,5 \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ LiCl}$                                      | $20^\circ \text{ B } 8,2 \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ NaBr}$                                      | $20^\circ \text{ B } 9,3 \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ RbBr}$                                      | $20^\circ \text{ B } 9,0 \text{ (21)}$                                                                                                        |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ RBr}$                                       | $20^\circ \text{ B } 10,4 \text{ (21)}$                                                                                                       |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ RbCl}$                                      | $20^\circ \text{ B } 10,5 \text{ (21)}$                                                                                                       |
| $\text{AlBr}_3 \text{ H}_2\text{S}$                                        | $\text{B } 5,14 \text{ (22), B } 5,11 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 5,25 \text{ (24)}$                                                   |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ CsBr}$                                      | $20^\circ \text{ B } 10,6 \text{ (21)}$                                                                                                       |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ CsCl}$                                      | $20^\circ \text{ B } 10,9 \text{ (21)}$                                                                                                       |
| $\text{Al}_2\text{Br}_6 \text{ C}_4\text{H}_8\text{O}_2 \text{ (dioksan)}$ | $25^\circ \text{ B } 4,62 \text{ (25)}$                                                                                                       |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_4\text{H}_8\text{O}_2$                            | $25^\circ \text{ B } 5,23 \text{ (25)}$                                                                                                       |
| $\text{AlBr}_3 \text{ 2C}_4\text{H}_8\text{O}_2$                           | $25^\circ \text{ B } 5,19 \text{ (25)}$                                                                                                       |
| $\text{AlBr}_3 \text{ (C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$                          | $\text{B } 6,54 \text{ (22), B } 6,39 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 6,59 \text{ (24)}$                                                   |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_5\text{H}_5\text{N}$                              | $\text{B } 8,03 \text{ (26)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ o—ClC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$                       | $\text{B } 9,56 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ n—ClC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$                       | $\text{B } 8,13 \text{ (26), } 20^\circ \text{ Us } 7,45 \text{ (28)}$                                                                        |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_7\text{H}_5\text{NO}_2$                           | $\text{B } 9,13 \text{ (22), B } 9,08 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 9,30 \pm 0,13 \text{ (24), } 20^\circ \text{ Us } 8,51 \text{ (28)}$ |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_6\text{H}_6$                                      | $5,1 \text{ (24)}$                                                                                                                            |
| $\text{AlBr}_3 \text{ o—CH}_3\text{C}_2\text{H}_4\text{NO}_2$              | $\text{B } 9,30 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ n—CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$              | $\text{B } 9,76 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3$                          | $\text{B } 6,58 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ C}_9\text{H}_7\text{N}$                              | $\text{B } 8,88 \text{ (26)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ n—(CH}_3)_3\text{CC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$         | $20^\circ \text{ Us } 9,06 \text{ (28)}$                                                                                                      |
| $\text{AlBr}_3 \text{ (C}_6\text{H}_5)_2\text{O}$                          | $\text{B } 6,56 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{ClBr}_3 \text{ (C}_6\text{H}_5)_2\text{NH}$                         | $\text{B } 6,68 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlBr}_3 \text{ (C}_6\text{H}_5)_2\text{CO}$                         | $\text{B } 8,41 \text{ (27)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlCl}_3 \text{ C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$                           | $\text{B } 6,86 \text{ (22), B } 6,82 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 6,94 \text{ (24)}$                                                   |
| $\text{AlCl}_3 \text{ C}_4\text{H}_8\text{O}_2$                            | $25^\circ \text{ B } 5,19 \text{ (25)}$                                                                                                       |
| $\text{AlCl}_3 \text{ (C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$                          | $\text{B } 6,54 \text{ (22), B } 6,45 \text{ (23), } 25^\circ \text{ B } 6,68 \text{ (24)}$                                                   |
| $\text{AlCl}_3 \text{ C}_5\text{H}_5\text{N}$                              | $\text{B } 8,02 \text{ (26)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlCl}_3 \text{ o—ClC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$                       | $\text{B } 9,48 \text{ (29)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlCl}_3 \text{ n—ClC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$                       | $\text{B } 7,79 \text{ (29)}$                                                                                                                 |
| $\text{AlCl}_3 \text{ C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$                           | $\text{B } 9,05 \text{ (22), B } 8,99 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 9,25 \text{ (24)}$                                                   |
| $\text{AlCl}_3 \text{ C}_6\text{H}_5\text{COCl}$                           | $\text{B } 8,92 \text{ (22), B } 8,87 \text{ (23), } 20^\circ \text{ B } 9,04 \text{ (24)}$                                                   |

|                                                                 |                                    |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $\text{AlCl}_3$ o— $\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ | 8,92 (29)                          |
| $\text{AlCl}_3$ n— $\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ | 9,68 (29)                          |
| $\text{AlCl}_3$ $\text{C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3$              | 6,54 (29)                          |
| $\text{AlCl}_3$ $(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{NH}$             | B 6,52 (26)                        |
| $\text{AlCl}_3(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{CO}$                | B 8,72 (22), 20°B 8,32 ± 0,14 (24) |

## Jedinjenja berilijuma

|                                                      |                                                 |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\text{BeBr}_2$ 2 $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 20° B 7,57 (22), B 7,52 (23)                    |
| $\text{BeCl}_2$ 2 $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | 20° B 6,74 (22), B 6,74 (23), 20<br>B 6,71 (24) |
| $\text{Be}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$                  | 25° B 2,46 ± 0,06 (307)                         |

## Jedinjenja bora

|                                                                                                              |                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\text{BH}_3\text{CO}$                                                                                       | Štark 1,795 (31)                                  |
| $\text{BH}_3\text{CH}_3\text{NH}_2$                                                                          | 25° 5,19 ± 0,04 (32)                              |
| $\text{BH}_3$ $(\text{CH}_3)_2\text{NH}$                                                                     | 25° B 4,87 ± 0,03 (32)                            |
| $\text{BH}_3$ $(\text{CH}_3)_3\text{N}$                                                                      | 25° B 6,57 ± 0,01 (33), 4,45 ± 0,05 (32)          |
| $\text{BH}_3$ $\text{C}_3\text{H}_7\text{NH}_2$                                                              | 25° B 4,68 ± 0,045 (32)                           |
| $\text{BH}_3$ $(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{NH}$                                                            | 25° B 4,55 ± 0,05 (32)                            |
| $\text{BH}_3(\text{CH}_3)_3\text{CNH}$                                                                       | 25° B 4,64 ± 0,05 (32)                            |
| $\text{BH}_3\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$                                                                    | 25° B 5,86 ± 0,01 (33)                            |
| $\text{BH}_2\text{Cl}$ $(\text{CH}_3)_3\text{N}$                                                             | 25°B 5,37 (32)                                    |
| $\text{BBr}_3\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$                                                                   | 25° B 7,90 ± 0,06 (33)                            |
| $\text{BF}_3$ $(\text{CH}_3)_2\text{PCF}_3$                                                                  | H±B 13,1 ± 0,5 (38)                               |
| $\text{BCl}_3$ $\text{CH}_3\text{CN}$                                                                        | B 7,65 (22), B 7,62 (23), 25°B 7,74 ± 0,16 (24)   |
| $\text{BCl}_3$ $\text{C}_2\text{H}_5\text{CN}$                                                               | B 7,75 (22), B 7,64 (23)                          |
| $\text{BCl}_3$ $(\text{CH}_3)_3\text{N}$                                                                     | 20° B 7,83 (24)                                   |
| $\text{BCl}_3$ $(\text{CH}_3)_3\text{P}$                                                                     | 25° B 6,23 ± 0,02 (36), 25°<br>B 7,03 ± 0,01 (36) |
| $\text{BCl}_3$ $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$                                                            | B 5,98 (22), B 5,96 (23), 20°B 6,04 (24)          |
| $\text{BCl}_3$ $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$                                                            | 25° B 6,00 ± 0,01 (36)                            |
| $\text{BCl}_3$ $\text{ClC}_5\text{H}_4\text{N}$ (trihlor—4— hlor-<br>piridin bor)                            | 25° B 6,71 ± 0,03 (33)                            |
| $\text{BCl}_3$ $\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$                                                                | 25° B 7,70 ± 0,2 (33), B 7,50 (39)                |
| $\text{BCl}_3$ $\text{CNC}_5\text{H}_5\text{N}$ (trihlor-4-cijan- pi-<br>ridin bor)                          | 25° B 4,20 ± 0,05 (33)                            |
| $\text{BCl}_3$ $\text{CH}_3\text{OC}_5\text{H}_4\text{N}$ (trihlor-4-metok<br>si-piridin bor)                | 25°B 8,86 ± 0,02 (33)                             |
| $\text{BCl}_3$ $\text{CH}_3\text{C}_5\text{H}_4\text{N}$ (trihlor-4-metil pi<br>ridin bor)                   | 25° B 8,37 ± 0,06 (33)                            |
| $\text{BCl}_3$ $\text{C}_2\text{H}_5\text{OOC}_5\text{H}_4\text{N}$ (trihlor-4--<br>karboetoksi piridin bor) | 25° B 7,74 ± 0,07 (33)                            |



|                                                                       |                                          |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\text{BCl}_3 (\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                       | $25^\circ \text{ B } 7,01 \pm 0,06 (36)$ |
| $(\text{CH}_3)_3\text{B NH}_3$                                        | $4,15 \pm 0,06 (40)$                     |
| $(\text{CH}_3)_3\text{B N}(\text{CH}_3)_3$                            | $3,92 \pm 0,03 (40)$                     |
| $(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{B} (\text{C}_4\text{H}_9)_4\text{NHO}$ | $25^\circ \text{ B } 1,97 (41)$          |

## Jedinjenja vanadijuma

|                                             |                                         |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{V}(\text{CO})_4$ | $6,17 \pm 0,05 (42)$                    |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{VOCl}_2$         | $4,91 \text{ } 25^\circ\text{B } (30)$  |
| $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{V}$          | $(30) \text{ } 25^\circ \text{ B } 0,0$ |

## Jedinjenja bizumta

|                                     |                                                       |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $(\text{C}_5\text{H}_5)_3\text{Bi}$ | $25^\circ \text{ B } 1,17 (30), \text{ B } 1,17 (43)$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|

## Jedinjenja galijuma

|                                                |             |
|------------------------------------------------|-------------|
| $\text{GaCl}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{CN}$   | $8,65 (44)$ |
| $\text{GaCl}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{COCl}$ | $6,85 (44)$ |

## Jedinjenja gvožđa

|                                                                               |                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Fe}(\text{CO})_5$                                                      | $12^\circ \text{ B } 0,64 (45-47), 20^\circ \text{ B } 0,81 (48),$<br>$0 (42), \text{ mikrotalas. } 0,10-0,15 (49)$ |
| $\text{Fe}(\text{CO})_2(\text{NO})_2$                                         | $3,6 \pm 0,05 (42)$                                                                                                 |
| $\text{Fe}(\text{CO})_4\text{CH}_3\text{CN}$                                  | $5,02 \pm 0,03 (42)$                                                                                                |
| $\text{Fe}(\text{NO})_3\text{Br}$                                             | $3,7 (50)$                                                                                                          |
| $\text{Fe}(\text{NO})_3\text{J}$                                              | $(50) 3,5$                                                                                                          |
| $\text{Fe}_2(\text{CO})_6 \cdot \text{C}_6\text{H}_5\text{ClC}_6\text{H}_5/2$ | $3,3 \pm 0,2 (51)$                                                                                                  |
| $\text{C}_4\text{H}_4\text{Fe}_2(\text{CO})_6$                                | $\text{B } 25^\circ 2,86 (52)$                                                                                      |
| $\text{C}_6\text{H}_6\text{F}_2(\text{CO})_6$ (centrosimetričan)              | $\text{B } 25^\circ 1,70 (52)$                                                                                      |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Fe}_2(\text{CO})_6$                                | $\text{B } 25^\circ 3,41 (52)$                                                                                      |
| $\text{C}_{10}\text{H}_{10}\text{Fe}_2(\text{CO})_4$                          | $\text{B } 25^\circ 3,10 (52)$                                                                                      |
| $\text{C}_{12}\text{H}_{12}\text{Fe}(\text{CO})_4$                            | $\text{B } 25^\circ 3,10 (52)$                                                                                      |
| $\text{C}_7\text{H}_6\text{OFe}(\text{CO})_3$                                 | $\text{B } 25^\circ 4,30 (53)$                                                                                      |
| $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{Fe}(\text{CO})_3$                            | $\text{B } 25^\circ 2,21 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{Fe}_2(\text{CO})_8$                          | $\text{B } 25^\circ 1,73 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{Fe}_2(\text{CO})_5$                          | $\text{B } 25^\circ 4,94 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{18}\text{H}_{12}\text{Cl}_2\text{Fe}(\text{CO})_3$                 | $\text{B } 25^\circ 3,40 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{Fe}_2(\text{CO})_6$                          | $\text{B } 25^\circ 3,94 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{12}\text{H}_{30}\text{Fe}(\text{CO})_4$                            | $\text{B } 25^\circ 2,95 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{16}\text{H}_{20}\text{Fe}(\text{CO})_2$                            | $\text{B } 25^\circ 2,88 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_{13}\text{H}_{20}\text{Fe}(\text{CO})_5$                            | $\text{B } 25^\circ 5,11 (54)$                                                                                      |
| $\text{C}_4\text{H}_3\text{Fe}(\text{CO})_4$                                  | $\text{B } 25^\circ 1,94 (55)$                                                                                      |
| $\text{C}_4\text{H}_6\text{Fe}(\text{CO})_3$                                  | $\text{B } 25^\circ 2,15 (55)$                                                                                      |
| $\text{C}_4\text{H}_6\text{Fe}(\text{CO})_8$                                  | $\text{B } 25^\circ 0,90 (55)$                                                                                      |

|                                                                                            |                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| $\text{Fe}(\text{CO})_3\text{C}_8\text{H}_{10}$ (1, 3, 6-oktatrien tri<br>karbonil železo) | Ch 25° 2,37 (56) |
| $\text{FeCl}_3\cdot 2\text{H}_2\text{O}$ $2\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$                 | 25° 3,33 (57)    |

## Jedinjenja zlata

|                                                          |                |
|----------------------------------------------------------|----------------|
| $\text{AuCl P}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$                  | B 25° 8,4 (58) |
| $\text{AuCl P}(\text{OCH}_3)_3$                          | B 7,08 (59)    |
| $\text{AuCl P}(\text{CO}_6\text{H}_5)_3$                 | B 6,227 (59)   |
| $\text{CH}_3\text{Au P}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$         | B 25° 6,2 (58) |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{AuP}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$ | B 23° 6,2 (58) |
| $\text{Au}(\text{C}_4\text{H}_9)_3\text{CuJ}$            | 1,60 (60)      |
| $\text{Au}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_4\text{Br}$           | Ut 1,30 (60)   |
| $\text{Au}_4(\text{C}_3\text{H}_7)_8(\text{CN})_4$       | Ut 1.47 (60)   |

## Jedinjenja indijuma

|                                               |             |
|-----------------------------------------------|-------------|
| $\text{InBr}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ | B 5,04 (61) |
|-----------------------------------------------|-------------|

## Jedinjenja magnezijuma

|                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| $\text{Mg}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$ | B 25° 0 (30) |
|-------------------------------------|--------------|

## Jedinjenja mangana

|                                                                                                                |                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\text{MnH}(\text{CO})_5$                                                                                      | B 0,79 (65)                  |
| $\text{MnCH}_3(\text{CO})_5$                                                                                   | 0,39 $\pm$ 0,07 (66)         |
| $\text{C}_5\text{H}_5\text{Mn}(\text{CO})_3$                                                                   | 3,30 $\pm$ 0,05              |
| $\text{Mn}(\text{CO})_{10}$                                                                                    | B 25° 0,28, Ch 25° 0,88 (67) |
| $\text{Mn}(\text{CO})_5\text{Br}$                                                                              | B 25° 3,19 (67)              |
| $\text{Mn}(\text{CO})_5\text{J}$                                                                               | B 26° 3,25 (67)              |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Mn}(\text{CO})_5$                                                                   | B 25° 0,79 (67)              |
| $\text{C}_7\text{H}_8\text{Mn}(\text{CO})_5$                                                                   | B 25° 0,57 (67)              |
| $\text{C}_7\text{H}_4\text{Mn}(\text{CO})_5$                                                                   | B 25° 0,83 (67)              |
| $\text{CF}_3\text{Mn}(\text{CO})_5$                                                                            | B 25° 3,65 (67)              |
| $\text{C}_2\text{H}_3\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                  | B 25° 2,27 (67)              |
| $\text{CF}_2\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                           | B 25° 3,53 (67)              |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                  | B 25° 3,53 (67)              |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                  | B 25° 2,16 (67)              |
| $\text{C}_7\text{H}_5\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                  | B 25° 2,26 (67)              |
| $\text{C}_8\text{H}_7\text{OMn}(\text{CO})_5/\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{Mn}(\text{CO})_5/$           | B 25° 2,18 (67)              |
| $\text{C}_8\text{H}_7\text{OMn}(\text{CO})_5$                                                                  | B 25° 2,08 (67)              |
| $/\text{p-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{COMn}(\text{CO})_5/\text{C}_2\text{H}_3\text{OMn}$<br>$(\text{CO})_5$ | B 25° 2,42 (67)              |
| $/\text{Mn}(\text{CO})_4\text{B}(\text{OC}_6\text{H}_5)_{3/2}$                                                 | 2,64 $\pm$ 0,11 (67)         |
| $/\text{p-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{COMn}(\text{CO})_5/\text{CH}_3\text{OMn}$<br>$(\text{CO})_5$          | B 25° 2,92 (67)              |



|                                                                                             |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $/\text{Mn}(\text{CO})_4\text{P}(\text{OC}_6\text{H}_5)_3/2$                                | $2,64 \pm 0,11$ (68)  |
| $\text{Mn}(\text{CO})_4\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$                                    | $5,114 \pm 0,05$ (68) |
| $\text{Mn}(\text{CO})_4\text{P}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$                                    | $2,27 \pm 0,12$ (68)  |
| $/(\text{p}-\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4(\text{NC})_6\text{Mn}/(\text{C}_6\text{H}_5)_4$ | B 23—29—22—29 (69)    |
| $/(\text{p}-\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4(\text{NC})_6/\text{MnC}_6\text{H}_5)_3$        | B 23—29 22—27 (69)    |
| $/(\text{C}_6\text{H}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{NC})_6\text{Mn}/(\text{C}_6\text{H}_5)_4$  | B 23—29 23—57 (69)    |

## Jedinjenja bakra

|                                                                     |             |
|---------------------------------------------------------------------|-------------|
| $/\text{CuBr}(\text{izo}-\text{C}_3\text{H}_7\text{O})_3\text{P}/3$ | B 2,78 (59) |
| $/\text{CuBr}(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}/3$                    | B 3,39 (59) |
| $\text{CuBr}_2(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                     | B 1,65 (59) |
| $\text{CuJ}(\text{izo}-\text{C}_3\text{H}_7\text{O})_3\text{P}$     | B 2,57 (59) |
| $\text{CuJ}2(\text{C}_6\text{H}_5\text{O})_3$                       | B 16 (59)   |
| $\text{CuCl}(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}/3$                     | B 3,21 (59) |
| $\text{CuCl}2(\text{C}_6\text{H}_5\text{O})_3\text{P}$              | B 1,70 (59) |

## Jedinjenja molibdena

|                                                                                                   |                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $\text{Mo}(\text{CO})_3\text{C}_8\text{H}_{10}$ (1, 3, 5-ciklookta-trien karbonil molibden)       | 25° B Ch 4,15 (56)          |
| $\text{Mo}(\text{CO})_2\text{C}_8\text{H}_{10}$ 1,3, 6-ciklookta-trien karbonil molibden          | 25° Ch 1,96 (56)            |
| $\text{Mo}(\text{CO})_4\text{C}_8\text{H}_{12}$ (1, 5-ciklooktadienkarbonil molibden)             | 25° Ch 4,88 $\pm$ 0,06 (70) |
| $\text{Mo}(\text{CO})_3(\text{CH}_3)_3\text{C}_6\text{H}_3$ (1, 3, 5-mezitilen karbonil molibden) | B 6,36 (71)                 |
| $\text{Mo}(\text{C}_5\text{H}_5)_4$                                                               | B 25° 2,61 (72)             |
| $\text{MoO}_2\text{Cl}_2(\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$                                         | B 25° 6,85 (73)             |
| $\text{MoO}_2\text{Cl}_2/\text{CH}_2(\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5)_2/$                         | B 25° 8,26 (73)             |

## Jedinjenja arsena

|                                     |                                 |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| $\text{AsCl}_3\text{C}_2\text{H}_5$ | B 25° cis- 2,61 trans—2,21 (74) |
|                                     | B 25° 5,75 (75)                 |

## Jedinjenja nikla

|                                                                          |                 |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $\text{Ni}(\text{NO}_3)_22(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$              | B 25° 3,85 (76) |
| $\text{NiBr}_22(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$                         | B 20° 0 (76)    |
| $\text{NiCl}_22(\text{C}_2\text{H}_5)_2(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{P}$ | B 20° 0 (77)    |
| $\text{NiCl}_22(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}$                         | B 20° 0 (76)    |
| $\text{NiCl}_22(\text{C}_2\text{H}_5)_2(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{P}$ | B 20° 0 (76)    |
| $\text{NiBr}_22(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                         | 5,9 (78) (79)   |
| $\text{NiJ}_22(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                          | 8,8 (78) (79)   |
| $\text{NiCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{P}$  | 3,2 (80)        |
| $\text{NiBr}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{P}$  | 5,9 (80)        |

|                                                                                                                  |                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\text{NiJ}_2(\text{C}_2\text{H}_5)(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{P}$                                             | 7.5 (80)                                            |
| $\text{Ni}(\text{CO})_2$                                                                                         | 5.42 (80)                                           |
| $\text{Ni}(\text{CO})_4$                                                                                         | 0 <sup>o</sup> 0,3 (83)                             |
| $\text{Ni}(\text{CO})_22(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                                                        | 3,82 (81)                                           |
| $\text{Ni}(\text{CO})_32(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$                                                        | 3,82 (81)                                           |
| $\text{Ni}(\text{CO})_2\cdot\text{o}-\text{C}_6\text{H}_4/(\text{CH}_3)_2\text{As}/_2$                           | 5,24 (81)                                           |
| $\text{Ni}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$                                                                              | B 25 <sup>o</sup> (30) 0                            |
| $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Ni}(\text{CO})_2$                                                                 | B 25 <sup>o</sup> 0 (30)                            |
| $/(\text{C}_5\text{H}_5)_3\text{Ni}_3(\text{CO})_{2/2}$                                                          | B 25 <sup>o</sup> 0 (30)                            |
| $\text{C}_6\text{H}_8\text{Ni}_2\cdot 2(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}$ (bisakrolein nikal-o-bistrifenilfosfin) | B 25 <sup>o</sup> 6,00 (82)                         |
| $/\text{C}_3\text{H}_5\text{NiJ}_2$ (bis-p-alkil nikal jodid)                                                    | B 25 <sup>o</sup> 1,62 Ch 25 <sup>o</sup> 1,48 (84) |
| $(\text{C}_3\text{H}_5\text{NiBr})_2$ (bis-p-alkil nikal bromid)                                                 | B 25 <sup>o</sup> 1,31 (84)                         |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{NiC}_6\text{H}_5$ (p-alil nikal ciklopentadienil)                                     | B 25 <sup>o</sup> 0,78 (84)                         |
| $\text{NiC}_{12}\text{H}_{16}$ (metilciklopentadienil-metilciklopentil nikal—o)                                  | B Ch 25 <sup>o</sup> 1,20 (84)                      |

## Jedinjenja kalaja

|                                                             |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_3\text{OH}$                        | B 20 <sup>o</sup> 6,18 (86)                                           |
| $\text{SnBr}_4(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{CBr}$           | B 25 <sup>o</sup> 2,7 (85)                                            |
| $\text{SnCl}_42\text{CCl}_3\text{COOH}$                     | B 20 <sup>o</sup> 2,09 (87)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_2\text{ClCOOH}$                    | B 3,44 (87)                                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_2\text{BrCOOH}$                    | B 20 <sup>o</sup> 3,59 (88)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_2\text{JCOOH}$                     | B 54,15 (88)                                                          |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_3\text{COOH}$                      | B 20 <sup>o</sup> 56,33 (87)                                          |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$               | B 20 <sup>o</sup> 6,08 (89), B 6,86 (86)                              |
| $\text{SnCl}_42(\text{CH}_3)_2\text{CO}$                    | B 15 <sup>o</sup> 7,7 (90)                                            |
| $\text{SnCl}_4(\text{COOCH}_3)_2$                           | B 4,68 (91)                                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_2\text{ClCOOC}_2\text{H}_5$        | B 18 <sup>o</sup> 7,6 (92), B 7,22 (91)                               |
| $\text{SnCl}_42\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$          | B 20 <sup>o</sup> 7,21 (93)                                           |
| $\text{SnCl}_42(\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$            | B 15 <sup>o</sup> 3,60 (91)                                           |
| $\text{SnCl}_42(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$            | B 7,33 ; $\text{CCl}_4$ 6,24 ; Hp 3,20 (91)                           |
| $\text{SnCl}_4(\text{COOC}_2\text{H}_5)$                    | B 25 <sup>o</sup> 4,90 (94) <sub>n</sub>                              |
| $\text{SnCl}_4\text{CH}_2(\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$       | B 25 <sup>o</sup> 3,57 (94)                                           |
| $\text{SnCl}_4(\text{CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$       | H 25 <sup>o</sup> 5,68 (94)                                           |
| $\text{SnCl}_4(\text{CH}=\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$        | B 25 5,39 (94)                                                        |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$               | B 20 <sup>o</sup> 6,06 (93)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_3\text{H}_7\text{COOH}$             | B 20 <sup>o</sup> 5,79 (93)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_4\text{H}_9\text{OH}$               | B 20 <sup>o</sup> 6,05 (89)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{i}-\text{C}_5\text{H}_{13}\text{OH}$   | B 20 <sup>o</sup> 6,10 (91)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20 <sup>o</sup> 6,52 (94), 20 <sup>o</sup> $\text{CCl}_4$ 4,96 (96) |
| $\text{SnCl}_4-\text{n}-\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$    | B 20 <sup>o</sup> 4,32 (96)                                           |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_2\text{H}_5\text{CHO}$              | B 18 <sup>o</sup> 7,5 — 8,1 (92)                                      |
| $\text{SnCl}_42\text{C}_4\text{H}_5\text{COOH}$             | B 20 <sup>o</sup> 5,73 (87), B 7,77 (97)                              |



|                                                                                    |                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\text{SnCl}_4\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$                                     | B 20° 5,29 (93)                         |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_2\text{H}_3\text{COC}_6\text{H}_5$                          | B 18° 8,7 (90)                          |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_4\text{H}_9$                         | B 20° 6,44 (95)                         |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_5\text{H}_{11}$                      | B 20° 6,38 (95)                         |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_{10}\text{H}_8$                                             | Ch 18—40° 1.2 (98)                      |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$ (tetrahidrofuran)                      | 5,94 (99)                               |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$ „                                      | 4,33 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_4\text{H}_8\text{S}$ (tetrahidrotiofen)                     | 4,88 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_4\text{H}_8\text{S}$ ( „                                    | 6,000 (100)                             |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{S}$ (2, 5-dimetiltiofan)                | 5,71 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_6\text{H}_{12}\text{S}$ „                                   | 5,47 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$ (dipropilsulfid)                   | 6,49 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$ „                                   | 3,83 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{J}$ (dialsulfid)                       | 6,38 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_3\text{H}_5)_2\text{S}$ „                                   | 5,34 (100)                              |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{S}$                                    | B 25° (101) 6,71                        |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_8\text{H}_{17})_2\text{S}$                                 | B 25° (101) 6,70                        |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_9\text{H}_{19})_2\text{S}$                                 | B 20° 6,72 (101)                        |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_{18}\text{H}_{32})_2\text{S}$                              | B 25° 0,32 (101)                        |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{S}$                                     | B 25° 4,10 (101)                        |
| $\text{SnCl}_4(\text{C}_8\text{H}_{17})_2\text{S}$                                 | B 25° 4,10 (101)                        |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_5\text{H}_4(\text{COOC}_4\text{H}_9)_2$                     | B 5,22 (91)                             |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_8\text{H}_{17}\text{OH}$                                    | B 20° 6,16 (102)                        |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$                               | N 20° 5,32 (102)                        |
| $\text{SnCl}_4\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{C}_2\text{H}_5$                      | B 4,42 (91)                             |
| $(i\text{-C}_4\text{H}_9\text{OSnCl}_3\text{-}i\text{-C}_4\text{H}_9\text{OH})_2$  | B 20° 3,24 (103)                        |
| $(\text{C}_4\text{H}_9\text{OSnCl}_3\text{-}i\text{-C}_5\text{H}_{11}\text{OH})_2$ | B 20° 3,10 (103)                        |
| $\text{Sn}(\text{C}_3\text{H}_5)_4\text{TiCl}_4$                                   | B 20° 2,82 (104)                        |
| $\text{Sn}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}_2\text{TiCl}_4$                        | B 20° 3,00 (104)                        |
| $\text{Sn}(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{Cl}_2\text{TiCl}_4$                        | B 20° 3,50 (104)                        |
| $\text{Sn}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$                                                | B 25° 0,96 ±0,10 (30), B 29° 1,02 (105) |

## Jedinjenja osmijuma

|                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| $\text{Os}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$ | B 25° 0 (30) |
|-------------------------------------|--------------|

## Jedinjenja paladijuma

|                                                             |                                 |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\text{PdBr}_2\text{2n-CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{CN}$ | 2,29 (106)                      |
| $\text{PdJ}_2\text{2n-ClC}_6\text{H}_4\text{CN}$            | 1,10 (106)                      |
| $\text{PdJ}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{CN}$                 | 1,53 (106)                      |
| $\text{PdJ}_2\text{2n-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{CN}$   | 1,93 (106)                      |
| $\text{PdJ}_2\text{2n-CH}_3\text{O-C}_6\text{H}_4\text{CN}$ | 2,53 (106)                      |
| $\text{PdJ}_2\text{-2n-CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{CN}$ | $\alpha$ -10,3 $\beta$ -0 (107) |
| $\text{PdCl}_2\text{2}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$     | 1,05 (108)                      |
| $\text{PdCl}_2\text{2}(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$     | 1,04 (108)                      |

$\text{PdCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{As}$   
 $/\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}.\text{PdCl}_2\text{P}(\text{C}_3\text{H}_7)_3/2$   
 $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{Pd}$  (cikloheksadien—1,3-  
 ciklopentadien paladijum)  
 $(\text{C}_4\text{H}_7\text{PdCl})_2$   
 $(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{P}/_4\text{Pd}$

$\alpha$ —**10,3**  $\beta$ —0 (107)  
 Ch **2,11** (109)  
**2,22**  $\pm$  0,04 (110)  
 B  $25^\circ$  **2,91** (111)  
 cis—**8,3** (114)

### Jedinjenja platine

$\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Sb}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{i}-\text{C}_5\text{H}_9)_2\text{S}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$   
 $\text{Pt}(\text{NO}_2)_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$   
 $\text{PtBr}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$   
 $\text{PtBr}_2(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$   
 $\text{PtBr}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$   
 $\text{PtBr}_2(\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{S}$   
 $\text{PtBr}_2(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH})_2\text{S}$   
 $\text{PtJ}_2\text{C}_8\text{H}_8$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_3\text{H}_5)_3\text{P}$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{Sb}$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{S}$   
 $\text{PtJ}_2(\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2)_2\text{S}$   
 $/\text{PtCl}_2\text{PCl}_3)_2$   
 $/\text{PtCl}_2\text{C}_6\text{H}_{10}/$   
 $/\text{PtCl}_2(\text{CH}_3\text{O})_3\text{P}/_3$   
 $\text{PtCl}_3(\text{CH}_3\text{O})_3\text{P}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Se}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{i}-\text{C}_3\text{H}_7)_2\text{S}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5\text{O})_3\text{P}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$

$\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{As}$

$\text{PtCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{Sb}$   
 $\text{PtCl}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{CN}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{H}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{i}-\text{C}_5\text{H}_9)_2\text{S}$   
 $\text{PtCl}_2(\text{i}-\text{C}_3\text{H}_7\text{O})_3\text{P}$

B  $20^\circ$  cis—**13,7** (113)  
 B  $20^\circ$  cis—**13,1**, trans—**2,48** (113)  
 B  $20^\circ$  trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  cis—**13,7**, trans—**2,51** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**13,7** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**11,9**, trans—**3,93** (112)  
 B  $20^\circ$  trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  cis—**8,9**, trans—**2,66** (112)  
 B  $20^\circ$  trans—**2,32** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**11,2**, trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  trans—**2,19** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**8,7** (112)  
 B  $20^\circ$  **7,3** (116)  
 B  $20^\circ$  trans—**2,41** (112)  
 B  $20^\circ$  **11,1** (115)  
 B  $20^\circ$  cis—**8,2**, trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  trans—**0** (114)  
 B  $20^\circ$  trans—**2,18** (112)  
 B  $20^\circ$  trans—**2,37** (112)  
 B **3,8** (117)  
 B **6,1** (116)  
 B **4,02** (117)  
 B **9,23** (117)  
 BB  $20^\circ$  cis—**9,5**; trans—**2,41** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**9,1**; trans—**2,41** (112)  
 B  $20^\circ$  cis—**9,0**; trans—**2,39** (112)  
 B  $20^\circ$  trans—**3,9** (112)  
 B **9,12** (115)  
 B  $20^\circ$  cis—**10,7**; trans—**0** (114),  
 $25^\circ$  B **10,9** (118)  
 B  $20^\circ$  cis—**10,5**; trans—**0** (114); B  
 $25^\circ$  **10,9** (118)  
 B  $20^\circ$  cis—**9,2** (114); B  $25^\circ$  **10,45** (118)  
 B **12,5** (119)  
 B  $20^\circ$  cis—**9,2**; trans—**2,35** (113)  
 B  $20^\circ$  cis—**9,0**; trans—**2,41** (113)  
 B **6,05** (117)



|                                                                                                 |                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}$                                         | B 20° cis— <b>11,5</b> ; trans— <b>0</b> (114) |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_2\text{H}_3)_2(\text{C}_6\text{H}_5)\text{P}$                   | B 20° trans— <b>0</b> (114)                    |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{Fe}$                                        | B 20° cis— <b>6,0</b> ±0,5 (119)               |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_4\text{H}_9)_3\text{P}$                                         | B 20° cis— <b>11,5</b> ; trans— <b>0</b> (114) |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_4\text{H}_9)_2\text{As}$                                        | B 20° trans— <b>0</b> (114)                    |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_4\text{H}_9)_3\text{Sb}$                                        | B 20° cis— <b>10,9</b> (114)                   |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2)_2\text{S}$                              | B 20° cis— <b>7,8</b> (113)                    |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{Sb}$                                        | B 20° cis— <b>9,8</b> (114)                    |
| $[\text{Pt}_2\text{Cl}_2(\text{C}_2\text{H}_5\text{S})_2]/(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}/_2/$ | cis— <b>10,3</b> ; trans— <b>0</b> (112)       |
| $[\text{Pt}_2\text{Cl}_2(\text{C}_2\text{H}_5\text{S})_2]/(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}/_2/$ | cis— <b>13,0</b> (112)                         |
| $\text{PtCl}_2\text{C}_2\text{H}_4\cdot n-\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{NH}_2$           | <b>2,35</b> (120)                              |
| $\text{PtCl}_2\text{C}_2\text{H}_4\cdot n-\text{ClC}_6\text{H}_4\text{NH}_2$                    | <b>1,79</b> (120)                              |
| $\text{PtCl}_2\text{2}(\text{CH}_3)_2\text{PCF}_3$                                              | HI <b>9,2</b> ±0,5 (121)                       |
| $\text{Pt}_2\text{Cl}_2(\text{SCN})_2(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}$                          | cis— <b>1,36</b> (122)                         |
| $\text{Pt}_2\text{Cl}_4\text{2}(\text{C}_3\text{H}_7)_3\text{P}$                                | D <b>1,6</b> (122)                             |

## Jedinjenja renijuma

|                                                         |                                       |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $\text{Re}_2(\text{CO})_{10}$                           | B 25° <b>1,18</b> (67)                |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Re}(\text{CO})_5$            | B 25° <b>1,25</b> (67)                |
| $\text{CH}_3\text{CRe}(\text{CO})_5$                    | B 25° <b>2,47</b> (67)                |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{Re}(\text{CO})_5$ | B 25° <b>2,54</b> (67)                |
| $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{ReH}(\text{CO})_2$       | <b>3,85</b> B (30), <b>3,85</b> (123) |

## Jedinjenja žive

|                                     |                                             |
|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\text{HgCl}_2\text{C}_2\text{H}_2$ | cis— <b>2,76</b> ; trans— <b>1,64</b> (124) |
|-------------------------------------|---------------------------------------------|

## Jedinjenja rutenijuma

|                                                             |                     |
|-------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\text{Ru}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$                         | B 25° <b>0</b> (30) |
| $\text{RuHJC}_2\text{H}_4\text{2P}(\text{C}_2\text{H}_5)_5$ | <b>5,23</b> (125)   |

## Jedinjenja olova

|                                     |                                                       |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\text{Pb}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$ | B 25° <b>1,29</b> ±0,04 (30), B 25° <b>1,63</b> (105) |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|

## Jedinjenja srebra

|                                                             |                     |
|-------------------------------------------------------------|---------------------|
| $[\text{AgBr}(1-\text{C}_3\text{H}_7\text{O})_3\text{P}]_3$ | B <b>3,53</b> (117) |
| $[\text{AgJ}(1-\text{C}_3\text{H}_7\text{O})_3\text{P}]_3$  | B <b>3,43</b> (117) |

## Jedinjenja antimona

|                                                |                   |
|------------------------------------------------|-------------------|
| $\text{SbCl}_3\text{C}_{13}\text{H}_8\text{O}$ | <b>8,49</b> (126) |
|------------------------------------------------|-------------------|

## Jedinjenja talijuma

|                                               |                  |
|-----------------------------------------------|------------------|
| $\text{TiCl}_3\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$ | B 20° 3,66 (127) |
| $\text{TiCl}_3\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$   | B 20° 4,07 (127) |
| $\text{TiCl}_3\text{C}_9\text{H}_7\text{N}$   | B 20° 5,68 (127) |

## Jedinjenja tantala

|                                     |                  |
|-------------------------------------|------------------|
| $\text{Ta}(\text{C}_5\text{H}_5)_4$ | B 25° 4,09 (128) |
|-------------------------------------|------------------|

## Jedinjenja titana

|                                                               |                               |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $\text{TiBr}_4\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$             | B 20° 5,12 (129)              |
| $\text{TiBr}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$    | B 20° 6,46 (129)              |
| $\text{TiBr}_4\text{CH}_3\text{COOC}_3\text{H}_7$             | B 20° 2,09 (129)              |
| $\text{TiBr}_4\text{.i-CH}_3\text{COOC}_5\text{H}_{11}$       | B 20° 4,98 (129)              |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{CN}$                  | B 16° 6,05 (90)               |
| $\text{TiCl}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                       | B 5,12 (91)                   |
| $\text{TiCl}_4\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$             | B 4,95 (91), B 20° 4,95 (130) |
|                                                               | B 20° 5,03 (129)              |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$    | B 20° 6,65 (129)              |
| $\text{TiCl}_4\text{CCl}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$            | B 20° 2,10 (130)              |
| $\text{TiCl}_4\text{CH}_3\text{COOC}_3\text{H}_7$             | B 4,88 (91)                   |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$    | B 4,80 (51), B 4,88 (130)     |
| $\text{TiCl}_4\text{.n-CH}_2\text{COOC}_4\text{H}_9$          | B 4,96 (91), B 4,88 (130)     |
| $\text{TiCl}_4\text{.n-CCl}_3\text{COOC}_4\text{H}_9$         | B 20° 2,12 (130)              |
| $\text{TiCl}_4\text{.i-CCl}_3\text{COOC}_4\text{H}_9$         | B 20° 2,23 (130)              |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_6\text{H}_9$    | B 5,74 (91)                   |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$    | B 20° 4,52 (95)               |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_6\text{H}_5\text{CN}$                  | B 15° 6,16 (90)               |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_4\text{H}_9$    | B 20° 4,46 (95)               |
| $\text{TiCl}_4\text{i-CH}_3\text{COOC}_5\text{H}_{11}$        | B 20° 4,48 (130)              |
| $\text{TiCl}_4\text{i-CCl}_3\text{COOC}_5\text{H}_{11}$       | B 20° 2,23 (130)              |
| $\text{TiCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_5\text{H}_{11}$ | B 20° 4,37 (95)               |
| $\text{TiCl}_4(\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$                    | B 25° 4,25 (131)              |
| $\text{TiCl}_4(\text{CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$         | B 25° 3,55 (131)              |
| $\text{TiCl}_4\text{CH}_2(\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$         | B 25° 3,76 (131)              |

## Jedinjenja urana

|                                                                 |                               |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2(\text{C}_4\text{H}_9)_3\text{PO}_4$ | $\text{CCl}_4$ 3,1±0,01 (132) |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------|

## Jedinjenja hroma

|                                                |                          |
|------------------------------------------------|--------------------------|
| $\text{Cr}(\text{C}_6\text{H}_6)_2$            | B 0 (133), B 25° 0 (134) |
| $\text{Cr}(\text{C}_6\text{H}_6)_2$            | B 25° 0 (30)             |
| $\text{Cr}(\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3)_2$ | B 25° 0 (134), B 0 (30)  |



|                                                                      |                                         |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\text{Cr/C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_{2/2}$                         | B 25° 0 (30)                            |
| $\text{Cr}(\text{C}_5\text{H}_5)(\text{C}_6\text{H}_6)$              | B 25° 0 (30)                            |
| $\text{Cr}(\text{C}_6\text{H}_6)(\text{CO})_2$                       | B 5,08 (30)                             |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3\text{Cr}(\text{CO})_3$              | B 25° $5,20 \pm 0,04$ (30), 5,26 (30)   |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3\text{Cr}(\text{CO})_3$             | B 25° $5,26 \pm 0,03$ (71), B 5,43 (30) |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{OHCr}(\text{CO})_3$                       | B 25° $3,13 \pm 0,07$ (71)              |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2\text{Cr}(\text{CO})_3$              | B 25° $5,40 \pm 0,05$ (71)              |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{N}(\text{CH}_3)_2\text{Cr}(\text{CO})_2$  | B 6,30 (30)                             |
| $(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$                     | B 5,35 (30)                             |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{FCr}(\text{CO})_3$                        | B 25° $4,75 \pm 0,03$ (71), B 4,91 (30) |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{ClCr}(\text{CO})_3$                       | B 5,08 (30)                             |
| $\text{o}-\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$ | B 25° $5,37 \pm 0,02$ (71)              |
| $\text{m}-\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$ | B 25° $3,99 \pm 0,05$ (71)              |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{ClCr}(\text{CO})_3$                       | B 5,08 (30)                             |
| $\text{o}-\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$ | B 25° $5,37 \pm 0,02$ (71)              |
| $\text{m}-\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$ | B 25° 3,39 (71)                         |
| $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cr}(\text{CO})_3$                     | B 25° 3,49 (135)                        |
| $\text{C}_5\text{H}_5\text{Cr}(\text{CO})_2\text{NO}$                | 3,2 (42)                                |

## Jedinjenja cinka

|                                                 |                  |
|-------------------------------------------------|------------------|
| $\text{ZnCl}_2\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$     | D 20° 9,20 (136) |
| $\text{ZnCl}_2\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$     | D 8,86 (136)     |
| $\text{ZnCl}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{P}$ | B 7,57 (136)     |

## Jedinjenja cirkonijuma

|                                                            |                                             |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\text{ZrBr}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                    | B 20° 4,50 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                    | B 20° 7,85 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$          | B 20° 3,15 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 3,40 (138), B + etilacetat 4,50 (137) |
| $\text{ZrBr}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 3,97 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 5,75 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 3,80 (137)                            |
| $\text{ZrBr}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 4,21 (137), (138)                     |
| $\text{ZrJ}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                     | B 20° 4,24 (139), (138)                     |
| $\text{ZrJ}_4\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$           | B 20° 3,17 (138), (139)                     |
| $\text{ZrJ}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$  | B 20° 3,49 (138), (139)                     |
| $\text{ZrJ}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$  | B 20° 3,93 (139)                            |
| $\text{ZrJ}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$  | B 20° 4,23 (138), (139)                     |
| $\text{ZrJ}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$  | B 20° 3,07 (139)                            |
| $\text{ZrCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 4,84 (140)                            |
| $\text{ZrCl}_4\text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 7,67 (140), B 20° 6,68 (102)          |
| $\text{ZrCl}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                    | B 20° 4,45 (141)                            |
| $\text{ZrCl}_4\text{HCOOC}_2\text{H}_5$                    | B 20° 7,63 (142), B 20° 7,76 (102)          |
| $\text{ZrCl}_4\text{C}_3\text{H}_7\text{COOC}_2\text{H}_5$ | B 20° 4,18 (141)                            |

|                                                                 |                  |
|-----------------------------------------------------------------|------------------|
| $\text{ZrCl}_4 2i\text{—HCOOC}_3\text{H}_7$                     | B 20° 7,76 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 \text{CH}_3 \text{COOC}_2\text{H}_5$             | B 20° 3,89 (141) |
| $\text{ZrCl}_4 2\text{CH}_3 \text{COOC}_2\text{H}_5$            | B 20° 6,75 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 \text{CH}_3 \text{COOC}_3\text{H}_7$             | B 20° 3,85 (141) |
| $\text{ZrCl}_4 2\text{CH}_3 \text{COOC}_3\text{H}_7$            | B 20° 6,73 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 \text{C}_3\text{H}_7 \text{COOC}_2\text{H}_5$    | B 20° 3,53 (141) |
| $\text{ZrCl}_4 2\text{C}_3\text{H}_7 \text{COOC}_2\text{H}_5$   | B 20° 5,23 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 2i\text{—CH}_3 \text{COOC}_4\text{H}_9$          | B 20° 6,74 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 2\text{CH}_3 \text{COOCH}_2\text{C}_6\text{H}_5$ | B 20° 6,54 (142) |
| $\text{ZrCl}_4 \text{CH}_2(\text{COOC}_2\text{H}_5)$            | B 20° 9,21 (91)  |
| $\text{ZrCl}_4(\text{COOC}_2\text{H}_5)_2$                      | B 20° 7,52 (91)  |
| $\text{ZrCl}_4 n\text{—C}_2\text{H}_5 \text{NH}_2$              | B 20° 6,30 (140) |

## ZAKLJUČAK

U ovom radu opisana je teorija, metode i primena dipolnih momenata za određivanje strukture koordinacionih jedinjenja. Posebno je ukazano na značaj i ulogu dipolnog momenta kao važne molekulske konstante koja karakteriše električnu simetriju odnosno geometriju molekula.

Na osnovu literaturnih podataka, koji su svrstavani po elementima odnosno njihovim koordinacionim jedinjenjima, može se videti da primena dipolnih momenata ima veliki značaj za određivanje konfiguracije i geometrije kompleksnih jedinjenja.

Posebno su razmotrena kompleksna jedinjenja kobalta čiji dipolni momenat znatno doprineo na utvrđivanju njihovih stereohemijskih struktura.

Na kraju ovog rada tabelarno su prikazani literaturni podaci sa vrednostima dipolnih momenata koordinacionih jedinjenja svih metala, čiji se dipolni momenat može izmeriti. Iz tih podataka može se zaključiti da primena dipolnih momenata igra veliku ulogu u određivanju strukture koordinacionih jedinjenja.

## LITERATURA

1. Douglas and McDaniel, Concepts and Models of Inorganic Chemistry, Blaisdell—New York—Toronto—London, 432, 1965.
2. Osipov OA. Minkin, Spravočnik po dipolni momentam, Moskva, 1962.
3. Walter J. Moore, Fizička hemija, Naučna knjiga, Beograd, 267, 1962.
4. J. K. Sirkin i M. E. Djatkin, Hemiska veza i struktura molekula, „Građevinska knjiga”, Beograd, 221, 1957.
5. Arnold Weissbergerr, Physical Methods of Organic Chemistry, INC., New York, 111., 2553; 2599, 1960.
6. Oehme Friedrich, Dielektričeskie izmerenija, Izdatelstvo „Himija”, Moskva, 1967.
7. Gordon M. Barov, Physical Chemistry, McGraw-Hill, New York, 420, 1966.
8. G. Hedestrand, Z. Phys. Chem. 2, 428, 1929.
9. H. Miller, Z. Physik, 34, 689, 1933.
10. C. P. Smyth, Dielectric Behaviour and structure, INC., New York, 1955.



11. L. Onsager, J. Am. Chem. PHYS. 7, 911, 1939.
12. J. Kirkwood, J. Chem. Phys., 7, 911, 1939.
13. M. I. Šapkaronov, Metodi issledovanija teplovogo dviženija molekul i stroenija židkosti, Izd. — vo MGU, 1936.
14. G. Frelih, Teorija dielektrikov I. L. M. 1960.
15. K. F. Smit, Molekularne pučki, Fizmatgiz, 1959.
16. V. N. Kondratjev, Struktura atoma i molekula, Naučna knjiga, Beograd, 1966.
17. P. Debaj, G. Zak. Teorija električkih svojstv molekul, Onti, 1936.
18. E. O. Fischer, W. Frohlich, Ber., 92, 938, 1959.
19. U. Kruerke, C. Hoodzand, W. Hübel, Ber. 94, 2817, 1961.
20. McCarthy P. J., Martell A. E., J. Am. Chem. Soc., 78, 2101, 1956.
21. I. A. Šeka, Ž. Fiz. him. 23, 1180, 1949.
- 21a. I. A. Šeka, Z. A. Dokl. AN SSSR, 69, 197, 1949.
22. H. Ulich, Nespital N. Z. Angew. Chem. 44, 750, 1931.
23. H. Ulich, N. Nespital, Z. Elektrochem. 37, 559, 1931.
24. W. Nespital, Z. Phys. Chem., B 16, 153, 1932.
25. I. A. Šeka, K. F. Karliševa, Ž. Obš. him., 21, 833, 1951.
26. I. A. Šeka, Raboti po himii rastvorov i kompleksnih soedinenij, Izd. — vo AN SSSR, 94, 905, 1954.
27. I. A. Šeka, Ž. fiz. him., 16, 99, 1942.
28. P. Gagnau, D. Janjić, B. P. Siz, Helv. Chim. Acta. 41, 1023, 1958.
29. I. A. Šeka, Zap. in-ta, himii, AN USSR, 7, № 1. 57, 1940.
30. E. O. Fischer, S. Schreiner, Ber. 92, 938, 1959.
31. M. V. Strandberg, C. S. Pearsall, M. T. J. Chem. Phys., 17, 429, 1949.
32. H. Notz., H. Beyer, Ber 93, 939, 1960.
33. C. M. Bax, A. R. Katritzky, E. L. J. Chem. Soc. 1254, 1958.
34. A. W. Laubengayer, G. R. Finlay, J. Am. Chem. Soc. 65, 884, 1943.
35. P. Chalandom., P. B. Siz, Helv. Chim. Acta., 41, 697, 1958.
36. G. M. Philips, J. S. Hunter, L. E. Sutton, J. Chem. Soc. 146, 1945.
37. R. C. Ostroff, C. A. Brown, J. A. Hawkins, J. Am. Chem. Soc., 73, 5480, 1951.
38. L. Batt, B. Grownlock, Can. J. Chem., 38, 119, 1960.
39. J. Schemelz, A. G. Hill, C. Curran, J. Phys. Chem., 65, 1273, 1961.
40. H. J. Becher, Z. anorg. allgem. chem., 270, 273, 1925.
41. J. A. Geddes, C. A. Kraus, Trans. Far. Soc., 32, 585, 1936.
42. E. Weiss, W. Heiber, Z. anorg. allgem. chem., 287, 223, 1956.
43. E. O. Fischer, S. Schreiner, Ber. 93, 1417, 1961.
44. H. Ulich, G. Heyne, Z. phys. chem. B 49, 284, 1941.
45. E. Bergmann, L. Engel, Z. phys., 32, 507, 1931.
46. E. Bergmann, L. Engel, Z. Elektrochem., 47, 563, 1931.
47. E. Bergmann, L. Engel, Z. Phys. Chem., B13, 232, 1931.
48. W. Graffunder, E. Haymann, Z. phys. Chem., B15, 377, 1932.
49. W. D. Horrocks, E. N. Di Carlo, J. phys. Chem., 66, 187.
50. W. Heiber, W. Beck, Z. Naturforsch., 136, 194, 1958.
51. W. Hübel, E. H. Braye, J. Inorg. and Nucl. Chem. 10, 250, 1959.
52. E. Weiss, W. Hübel, R. Merenyi, Ber., 95, 1169, 1962.
53. E. Weiss, W. Hübel, R. Merenyi, Ber. 95, 1179, 1962.
54. E. Weiss, W. Hübel, R. Merenyi, Ber. 95, 1195, 1962.
55. H. D. Mudroch, E. Weiss, Helv. Chim. Acta, 45, 1160, 1962.
56. E. O. Fischer, C. Palm, H. P. Fritz, Ber., 92, 2645, 1959.
57. P. A. McCusker, T. J. Lane, S. Kenard, J. Am. Chem. Soc., 81, 2974, 1959.
58. G. Kalvin, G. E. Coates, Chem. and Ind. London, 1628, 1959.
59. B. A. Arbuzov, T. G. Šavša, Dokl. AN SSSR, 84, 507, 1952.
60. A. Burawoj, C. S. Gibson, G. C. Hapson, H. M. Powell, J. Chem. Soc., 1690, 1937.
61. I. A. Šeka, Ž. obš. himii, 26, 26, 1956.
62. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chem., 229, 282, 1936.
63. U. Kruerke, Choodzand, W. Hübel, Ber., 94, 2631, 1961.
64. E. O. Fiescher, C. Pal., Z. Naturforsch., 14b, 598, 1959.
65. W. Hieber, G. Wagner, Z. Naturforsch., 136, 339, 1958.
66. W. Hieber, G. Wagner, Ann., 618, 24, 1958.
67. W. Beck, W. Hieber, H. Tengler, Ber., 94, 862, 1961.

68. W. Hieber, W. Freyer, Ber., 92, 1765, 1959.
69. A. Sacco, L. Maldini, Rend. ins. Lombardo Sci. Pt. 1. 91, 286, 1958.
70. E. O. Fischer, W. Frohlich, Ber., 92, 2995, 1959.
71. E. W. Randall, L. E. Sutton, Proc. Chem. Soc., 93, 1959.
72. E. O. Fischer, Y. Hristidy, Ber. 95, 253, 1962.
73. H. L. Kraus, W. Hubel, Ber., 94, 2875, 1961.
74. G. A. Barclay, R. J. Le Fewre, J. Chem. Soc., 556, 1950.
75. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chemie, 250, 268, 1943.
76. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chem., 229, 265, 1936.
77. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chem., 229, 282, 1936.
78. M. L. Venanzi, J. Chem. Soc., 719., 1958.
79. M. L. Venanzi, J. Inorg. and Nuclear Chem. 8, 137, 1958.
80. R. C. Hayter, F. S. Humiec, J. Am. Chem. Soc., 84, 2004, 1962.
81. J. Chatt, F. Hart, Chem. Ind., 1474, 1958.
82. G. N. Schrauzer, Ber., 94, 642, 1961.
83. L. E. Sutton, J. B. Bently, J. Chem. Soc., 652, 1933.
84. E. O. Fischer, G. Bueger, Ber., 94, 2410, 1961.
85. F. Fairbrother, J. Chem. Soc., 503, 1945.
86. N. Gurjanovae, I. P. Goldštein, Ž. obš. him., 32, 12, 1962.
87. O. A. Osipov, G. S. Samofalova, E. I. Gluško, Ž. obš. him., 27, 1428, 1958.
88. O. A. Osipov, O. E. Kašlireninov, Ž. obš. him., 31, 1755, 1961.
89. O. A. Osipov, V. M. Artemova, N. G. Bedarev, Ž. obš. him., 29, 975, 1959.
90. H. Ulich, E. Hertel, W. Z. Nespital, Phys. Chem., B 17, 21, 1931.
91. O. A. Osipov, Uč. zap. Rastovskogo na Donu, UN—TA, 60, 13, 1959.
92. V. I. Krasilnikov, Ž. fiz. him., 18, 174, 1944.
93. O. A. Osipov, V. I. Minkin, V. A. Kogan, Ž. fiz. him., 36, 889, 1962.
94. O. A. Osipov, V. M. Artemova, V. A. Kogan, Ju. A. Lisenko, Ž. obš. him, 32, 1368, 1962.
95. O. A. Osipov, Ž. obš. him., 26, 323, 1956.
96. O. A. Osipov, Ju. B. Kletenik, Ž. obš. him., 31, 1755, 1961.
97. E. N. Gurjanova, P. Goldštein, Ž. obš. him., 32, 12, 1962.
98. H. Tsubonura, Chem. Sos. Japan, 11, 41, 1954.
99. V. N. Vasileva, T. V. Talalaeva, K. A. Kočeškov, AN SSSR, 143, 844, 1962.
100. I. P. Goldštein, E. N. Gurjanova, K. A. Kočeškov, Dokl. AN SSSR, 144, 569, 1962.
101. I. P. Goldštein, E. N. Gurjanova, K. A. Kočeškov, Dokl. AN SSSR, 138, 1099, 1962.
102. O. A. Osipov, V. I. Minkin, V. A. Kogan, Z. fiz. him., 36, 889, 1962.
103. A. A. Bless, Phys. Rev., 37, 1149.
104. O. A. Osipov, O. E. Kašlireninov, Z. obš. him., 32, 1717, 1962.
105. E. Weiss, Z. anorg. allgem. Chem., 287, 236, 1956.
106. T. Fujita, M. Njamada, B. Kadaki, Sci., 19, 80, 1954.
107. J. Chatt, F. A. Nature, 169, 673, 1952.
108. F. G. Mann, D. Purdie, J. Chem. Soc., 1549, 1935.
109. E. O. Fischer, H. Werner, Ber., 93, 2075, 1960.
110. R. Huttel, J. Kratzer, Angew. chim. ital., 89, 1457, 1959.
111. E. O. Fischer, H. Werner, Ber., 95, 703, 1962.
112. J. Chatt, F. A. Hart, J. Chem. Soc., 2363, 1953.
113. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chem., 225, 97, 1935.
114. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem., Chem., 229, 225, 1963.
115. A. Grinberg, Z. A. Razumova, A. D. Troickaja, Izv. AN SSSR OHN, 253, 1946.
116. K. A. Jensen, Acta Chem. Scand. 7, 866, 1953.
117. B. A. Arbutov, T. G. Savša, Dokl. AN SSSR, 84, 507, 1952.
118. J. Chatt, R. G. Wilkins, J. Chem. Soc., 4306, 1952.
119. K. A. Jensen, Z. anorg. allgem. Chem., 231, 365, 1937.
120. J. Chatt, L. A. Dunsanson, J. Chem. Sos., 2939, 1953.
121. L. Batt, B. G. Gownlock, J. Chem. Soc., 376, 1960.
122. J. Chatt, F. A. Hart, Nature, 169, 673, 1952.
123. E. Bergmann, L. Engel, Z. Electrochem., 77, 563, 1931.
124. A. N. Nesmejanov, Izv. AN SSSR, OHN, 137, 1945,



125. J. Chat, R. G. Hayter, J. Chem. Soc., 153, 1959.
126. A. Ždanov, O. A. Osipov Dokl. AN. SSSR, **128**, 719, 1959.
127. G. Birnbaum, J. Chem. Phys., **27**, 360, 1957.
128. E. O. Fischer, Y. Hristidy, Ber. **95**, 253, 1962.
129. B. Kletenik, O. A. Osipov, Z. opš. him., **31**, 710, 1961.
130. O. A. Osipov, A. Lisenko, Ž. obš. him., **30**, 3866, 1961.
131. A. A. Osipov, V. M. Artemova, Ž. OBS him, **32**, 1368, 1962.
132. V. B. Ševčenko, A. S. Solovkin, Radiohimija, **1**, 257, 1959.
133. E. O. Fischer W. Z. Hafner Naturforsch. **10b**, 665, 1955.
134. E. Weiss Z. anorg. allgem. Chem. **287** 236 1956.
135. E. O. Fischer Ber. **94**, 2410, 1961.
136. J. Schmelz A. G. Hill C. Curran J. Phys. Chem. **65**, 1005, 1961.
137. Ju. B. Kletenik O. A. Osipov Ž. obš. him. **29**, 11, 1959.
- 679 1959. 138. Ju. B. Kletenik O. A. Osipov Izv. viš. zaved. Himija i him. tehnologija **2**,  
 139. O. A. Osipov Ju. B. Kletenik Ž. obš. him. **29**, 2119, 1959.
140. O. A. Osipov Ju. B. Kletenik Ž. obš. him. **31**, 2451, 1961.
141. Ju. B. Kletenik O. A. Osipov E. E. Kravcov Ž. obš. him. **29**, 11, 1959.
142. O. A. Osipov, Ju. B. Kletenik, Ž. obš. him., **27**, 2921, 1957.

*Bedri Kamberi*

#### APPLICATION OF DIPOLES MOMENTS FOR THE DETERMINATION OF THE STRUCTURE OF COORDINATIONAL COMPOUNDS

##### *S u m m a r y*

In this works is described the theory, method and application of dipoles moments for the determination of the structure of coordinational compounds. The importance, and the role of dipole moment is showed as a very important molecular constant which characterises the electric symetry relating to geometry of a molecul.

On the base of the published references, which are classified from elements relating to their coordinational compounds, it can be seen that the application of dipoles moments has a great importance for the determination of the configurations and geometry of complex compounds.

There has been special research into the coordinational compounds of cobalt, which dipole moment gives conserdable profit for the determination of their streochemical structures.

At the end of this work literary data is tabelary shown with the value of the dipole moments for the coordinational compounds of all metals, in with dipole moment can be measured.

From these data it can be cocluded that the application of dipole moments plays a great part in the determination of the structure of coordinational compounds.





БОГДАН ДАМЊАНОВИЋ

НЕКИ ПРИМЕРИ НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА ЧИЈИ ФУРИЈЕРОВИ  
РЕДОВИ КОНВЕРГИРАЈУ НЕРАВНОМЕРНО ИЛИ ДИВЕРГИРАЈУ

Ред облика

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

у коме коефицијенти  $a_n$  и  $b_n$  не зависе од  $x$  називано тригонометриским редом.

Уколико постоји периодичка функција  $f(x)$ , периоде  $2\pi$ , интегрална у Лебеговом смислу на  $(-\pi, \pi)$ , тако да важи

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (2)$$

онда тригонометриски ред (1) називамо Фуријеровим редом од  $f(x)$ . Чињеницу да је (1) Фуријеров ред од  $f(x)$ , тј да су коефицијенти  $a_n$  и  $b_n$  одредени формулама (2) означавамо симболички са

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

Могућност развијања произвољне интегралне и периодичке функције у Фуријеров ред покренула је решавање низа питања и проблема. Већ израз (3) допушта разне могућности: ред у (3) може да конвергира или функцији  $f(x)$ , или некој другој вредности, а може и да дивергира. Једно од основних питања Фуријерових редова је питање његове конвергенције:

да ли Фуријеров ред конвергира или дивергира,

да ли конвергира равномерно,

да ли конвергира на читавом интервалу, или на неком скупу тачака,

да ли може да се успостави веза између коефицицијената Фурије-овог реда и његове конвергенције, као и још низ других питања.

У овом раду изложени су неки примери непрекидних функција чији Фуријерови редови конвергирају неравномерно у околини једне тачке, или на интервалима датог сегмента, као и на примере непрекидних функција чији Фуријерови редови дивергирају у околини једне тачке, на скупу моћи континуума, или на неком пребројивом скупу. За непрекидне функције чији Фуријерови редови конвергирају неравномерно у околини једне тачке, или на неком скупу тачака кажемо да имају „особину Лебега”, док за непрекидно функције чији Фуријерови редови дивергирају у једној тачки, или на неком скупу тачака, кажемо да имају особину „du Bois — Reymonda”. Називи ових особина потичу од имена математичара који су се бавили овим питањима теорије Фуријерових редова. Први део овог чланака садржи извесне критеријуме конвергенције Фуријерових редова. Такође, у овом поглављу упознаћемо се са извесним ставовима и дефиницијама које ћемо користити касније.

Сва излагања у овом раду односе се искључиво на непрекидне функције.

## I

Претпоставимо да се функција  $f(x)$  јавља као збир тригонометриског реда који конвергира равномерно на  $-\pi \leq x \leq \pi$ , тј

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

У том случају интеграцијом члан по члан лако је показати да важи

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (2)$$

тј да је (1) Фуријеров ред од  $f(x)$  и да је  $f(x)$  непрекидна функција.

**§ 1.** Ако је Фуријеров ред од  $f(x) \in C$  равномерно конвергентан, онда се збир тога реда поклапа са  $f(x)$ .

Доказ: Нека је

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad f(x) \in C \quad (3)$$

и ред на десној страни у (3) конвергира равномерно. Означимо са  $S(x)$  његов збир. Како је збир униформно конвергентног реда непрекидних



функција и сам непрекидна функција, то закључујемо да је и  $S(x)$  непрекидна функција, па је

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

тада према (1) и (2) налазимо

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx \, dx \quad (4)$$

Међутим из (3) је

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (5)$$

Упоредјујући (4) и (5) налазимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S(x)] \cos nx \, dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S(x)] \sin nx \, dx = 0,$$

а како је  $(\cos nt, \sin nt)$  потпун ортонормиран систем

$$\text{у } C[-\pi, \pi], \quad \text{тј. } F(x) = f(x) - S(x) \in C \text{ и}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt \, dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt \, dt = 0,$$

то следи да је  $F(t) = 0$ , па је

$$f(x) = S(x). \quad (6)$$

При изучавању конвергенције Фуријерових редова веома важну улогу играју функције

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx \quad (7)$$

и

$$\overline{D}_n(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx. \quad (8)$$

Применом тригонометријских трансформација налазимо

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (9)$$

и

$$\overline{D}_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (10)$$

Функцију  $D_n(x)$  називамо Дирихлеовим језгром, док функцији  $\overline{D}_n(x)$  називамо коњугованим Дирихлеовим језгром. Из (9) и (10) произилази да је за  $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ .

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad \text{и} \quad |\overline{D}_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad (11)$$

За  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  је

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

пошто је за  $x = 0$ , односно за  $x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}, \quad \text{такође можемо да ут-}$$

врдимо да је функција  $\frac{\sin x}{x}$  опадајућа. Тада, на основу (9) и (10) добијамо

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \frac{x}{2\pi}} = \frac{\pi}{2x}, \quad \text{па је}$$



$$|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2x}, \text{ за } 0 < |x| \leq \pi. \quad (13)$$

Истим поступком налазимо да је

$$|\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{x} \text{ за } 0 < |x| \leq \pi. \quad (14)$$

За  $\delta \leq |x| \leq \pi$  је

$$|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2\delta} \text{ и } |\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{\delta} \quad (15)$$

Како су  $D_n(x)$  и  $\bar{D}_n(x)$  периодичке функције, то (15) важи и за

$$\delta \leq x \leq 2\pi - \delta.$$

Дирихлеово језгро користи нам и за израчунавање парцијалних збирова Фуријеровог реда. Означимо са  $\sigma(f)$  Фуријеров ред од  $f(x)$ , а са  $S_n(x)$  његов парцијални збир, дакле

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (16)$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (17)$$

Заменимо ли у (17)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \text{ добијамо}$$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \right) \cos kx + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \right) \sin kx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \sin kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \sin k(t-x) \right] dt. \quad (18)$$

Како је

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) = D_n(t-x), \quad (19)$$

то израз за парцијални збир  $S_n(x)$  добија облик

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \quad (20)$$

Стављајући  $t-x=u$ ,  $t=u+x$ ,  $dt=du$ , добијамо

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du, \text{ а на основу (9) је} \quad (21)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Израз за  $S_n(x)$  можемо да упростимо дајући разломку  $\frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}$

ову форму

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} &= \frac{\sin nu \cdot \cos \frac{u}{2} + \cos nu \cdot \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \\ &= \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} + \frac{1}{2} \cos nu. \end{aligned} \quad (22)$$

Уведимо помоћну функцију

$$g(u) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \quad (23)$$

Функција  $g(u)$  је непрекидна на  $[-\pi, \pi]$  (применом Лопиталовог правила уверавамо се да је  $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 0$ ). Нека је још и  $g(u + 2\pi) = g(u)$ .

Дакле, функција  $g(u)$  је и ограничена функција на  $(-\infty, +\infty)$ . Уврстивши  $g(u)$  у (22) добијамо

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{u} + g(u) \sin nu + \frac{\cos nu}{2}. \quad (24)$$

Користећи (24) израз за  $S_n(x)$  добија форму

$$\begin{aligned} S_n(x) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) g(u) \sin nu du + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \cos nu du \end{aligned} \quad (25)$$

Позивајући се на лему, коју наводимо без доказа:

ако је  $f(x)$  интеграбилна функција,  $g(x)$  ограничена функција и обе су периодичке са периодом  $2\pi$ , онда интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos nt dt \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin nt dt \quad (26)$$

теже нули равномерно када  $n \rightarrow \infty$ ,

израз за  $S_n(x)$  пишемо у форми

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (27)$$

величина  $o(1)$  тежи нули равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .



Израз (27) пружа нам могућност да утврдимо да ли Фуријеров ред од  $f(x)$  конвергира или дивергира у околним произвољне тачке  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Дефинишемо произвољну функцију  $g(u)$  овако:

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{на } (-\delta, \delta) \\ \frac{1}{u} & \text{на } (-\pi, -\delta) \text{ и } (\delta, \pi), \delta > 0, \text{ и нека је } g(u) \text{ пери-} \end{cases}$$

одичка функција —  $g(u + 2\pi) = g(u)$ . Користимо ли  $g(u)$ , (27) добија облик

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(u+x) g(u) \sin nu \, du + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} \, du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) g(u) \sin nu \, du + o(1), \quad (28)$$

односно

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} \, du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) g(u) \sin nu \, du + o(1), \quad (29)$$

пошто је према изразу за  $g(u)$ ,  $\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) g(u) \sin nu \, du = 0$ . Према

(26) и дефиниције функције  $g(u)$  која је ограничена, други сабирак на десној страни у (29) тежи нули, па је

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} \, du + o(1), \quad (30)$$

величина  $o(1)$  тежи нули равномерно.

Формула (30) нас доводи до једног Риемановог става познатог под именом „принцип локализације Риемана”:

Да ли конвергира или дивергира Фуријеров ред у произвољној тачки  $x$  зависи само од понашања функције  $f(x)$  у околини тачке  $x$ . Према (30), екзистенција  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  зависи само од понашања функције

$f(x)$  на  $(x - \delta, x + \delta)$ .

Израз

$$D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{u} \quad (31)$$

називамо упрошћеним Дирихлеовим језгром. Како је  $D_n^*(u)$  парна функција, то (30) можемо да напишемо у форми

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (32)$$

На основу изложеног о парцијалном збиру Фуријеровог реда налазимо потребне и довољне услове за конвергенцију Фуријеровог реда који означавамо са  $\sigma(f)$ , у произвољној тачки  $x$ .

Претпоставимо да функција  $f(x)$  узима вредност величине 1 на  $[-\pi, \pi]$ , тада је и  $S_n(x) = 1$  за произвољно,  $n$  па је према (32):

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (33)$$

Означимо са  $S$  збир Фуријеровог ред за произвољну тачку  $x$ . Помножимо ли са  $S$  и леву и десну страну од (33), добијамо

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta S \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (34)$$

Одузимајући (34) од (32) долазимо до релације

$$S_n(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) - f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du + o(1) \quad (35)$$

Релација (35) нас доводи до закључка:

да би Фуријеров ред од  $f(x)$  конвергирао броју  $S$  у тачки  $x$ , потребно је и довољно да буде испуњена релација

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (36)$$

Ако би ред  $\sigma(f)$  имао за збир баш вредност функције  $f(x)$  у тачки  $x$ , онда (36) постаје

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (1). \quad (37)$$

Стављајући

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \quad (38)$$

поменути закључак гласи:

да би у произвољној тачки  $x \in [-\pi, \pi]$  Фуриеров ред  $\sigma(f)$  конвергирао самој вредности функције  $f(x)$ , потребно је и довољно да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0, \quad \delta > 0. \quad (39)$$

Уколико је још  $f(x)$  и непрекидна у функција на  $(a, b)$ , закључујемо:

ако је  $f(x)$  непрекидна на  $(a, b)$  и  $\varepsilon > 0$ , то за равномерну конвергенцију реда  $\sigma(f)$  на  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ , потребно је и довољно да буде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (40)$$

равномерно на  $[a, b]$ , где је  $0 < \delta < \varepsilon$  и  $u \leq \delta$ .

На изведеним условима се и заснивају критеријуми о конвергенцији Фуриерових редова у произвољној тачки  $x$ . Наведимо, без доказа, неке најпознатије критеријуме о конвергенцији Фуриерових редова. Критериум Динна гласи:

Ред  $\sigma(f)$  конвергира ка  $f(x)$  у свим регуларним тачкама за које интеграл

$$\int_0^{\delta} |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \frac{du}{u} \quad (41)$$

има смисла.



За тачку  $x_0$  кажемо да је регуларна ако постоји  $f(x_0-0)$  и  $f(x_0+0)$  и ако је

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \quad (42)$$

Критериум Жордана гласи:

Ако је  $f(x)$  функција ограничене варијације на  $(a, b)$ , онда  $\sigma(f)$  конвергира у сакој тчки тога интервала. Збор од  $\sigma(f)$  је  $f(x)$  у тачкама непрекидности, а у тачкама прекида тај збир износи  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ . Ако је  $(a', b') \in (a, b)$  и ако је  $f(x)$  непрекидна

за  $x \in (a', b')$ , онда  $\sigma(f)$  конвергира равномерно на  $(a', b')$ .

У примерима Фуријерових редова непрекидних функција који неравномерно конвергирају, или дивергирају у околини неке тчке веома важну улогу играју Фејерови полиноми:

$$\begin{aligned} Q(x, n) = & \frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \frac{\cos(n+2)x}{n-2} + \\ & + \frac{\sin(n+3)x}{n-3} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \left[ \frac{\cos(2n+1)x}{1} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(2n+2)x}{2} + \frac{\cos(2n+3)x}{3} + \dots + \frac{\cos 3nx}{n} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x, n) = & \frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \frac{\sin(n+2)x}{n-2} + \\ & + \frac{\sin(n+3)x}{n-3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{1} - \left[ \frac{\sin(2n+1)x}{1} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(2n+2)x}{2} + \frac{\sin(2n+3)x}{3} + \dots + \frac{\sin 3nx}{n} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Упознајмо се са неким особинама од  $Q(x, n)$  и  $\bar{Q}(x, n)$ . Покажимо да постоји константа  $C$  за коју важе односи

$$|Q(x, n)| \leq C \quad \text{и} \quad |\bar{Q}(x, n)| \leq C \quad (45)$$

Полиноме  $Q(x, n)$  и  $\bar{Q}(x, n)$  можемо да напишемо и у форми

$$\begin{aligned}
 Q(x, n) &= \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} = \\
 &= -2 \sin 2nx \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}; \\
 \bar{Q}(x, n) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2n-k)x - \sin(2n+k)x}{k} = \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$= -2 \cos 2nx \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (47)$$

Чиниоци  $-2 \sin 2nx$  и  $-2 \cos 2nx$  који се јављају у (46) и (47) су ограничене величине за фиксирани  $n$  и  $x$ . Остаје да докажемо да је и

$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{x}$  ограничена величина. Како је, према (7), (9), (22), (23) и (24),

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}, \quad (48)$$

то је

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x \left( \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\
 &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin(2n+1)\frac{t}{2} dt + \\
 &\quad + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t} dt. \quad (49)
 \end{aligned}$$

За  $n \rightarrow \infty$ , према (26) сабирак

$$\int_0^x \left[ \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t} \right] \sin (2n+1) \frac{t}{2} dt \rightarrow 0.$$

Сабирек  $\int_0^x \frac{\sin (2n+1) \frac{t}{2}}{t} dt$ , сменом  $u = (2n+1) \frac{t}{2}$

трансформираше се у  $\int_0^{(2n+1) \frac{x}{2}} \frac{\sin u}{u} du$ . За  $n \rightarrow \infty$  он постаје

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du. \quad (50)$$

На основу релације (33) која је гласила

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt + o(1), \text{ стављајући } nt = u \text{ добијамо}$$

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\delta} \frac{\sin u}{u} du + o(1), \text{ а за } n \rightarrow \infty \text{ налазимо да је}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \quad (51)$$

Дакле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad (52)$$

Последица од (52) је ограниченост збира  $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ , те су доказани односи (45).

Означимо са  $\varphi(x, Q)$  и  $\varphi(x, \bar{Q})$  произвољне парцијалне збирове полинома  $Q(x)$  и  $\bar{Q}(x)$ . Тада је



$$|\varphi(x, Q)| \leq 2(1 + \ln n), \text{ и}$$

$$|\varphi(x, \bar{Q})| \leq 2(1 + \ln n) \quad (53)$$

Докажимо тачност релације (52). Како је

$$|\varphi(x, Q)| \leq |Q(x, n)|, \text{ тј.}$$

$$|\varphi(x, Q)| \leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

пошто је  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$  [види (66) и (67)]. На

основу овога убеђујемо се да је прва неједнакост у (53) тачна, аналогно убеђујемо се и у другу релацију у (53).

Покажимо да је за  $\delta \leq x \leq \pi$

$$|\varphi(x, Q)| \leq M\delta \text{ и } |\varphi(x, \bar{Q})| \leq M\delta, \quad (54)$$

где константа  $M\delta$  зависи само од  $\delta$ . Како смо са  $\varphi(x, Q)$  означили збир произвољног броја сабирака у изразу за  $Q(x, n)$ , то  $\varphi(x, Q)$  износи:

$$\sum_{k=0}^p \frac{\cos(n+k)x}{n-k}, \text{ ако је } p \leq n-1;$$

или

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{n-k} - \sum_{k=1}^p \frac{\cos(2n+k)x}{k}, \text{ ако је } p \leq n. \quad (55)$$

Према (55) зборови, који се појављују у изразима за  $\varphi(x, Q)$  су облика  $\sum \alpha_k \cos(n+k)x$ . Коefицијенти  $\alpha_k$  су или монотono растући  $\left(\frac{1}{n-k}\right)$ , или монотono опадајући  $\left(\frac{1}{k}\right)$ , но, у сваком случају нису већи од 1, па је

$$\varphi(x, Q) \leq \sum_{k=0}^p \cos(n+k)x, \text{ за } p \leq n-1 \text{ и за } \delta \leq x \leq \pi.$$

Како  $\sum_{k=0}^p \cos(n+k)x$  зависи само од  $\delta$ , то је  $|\varphi(x, Q)| \leq M\delta$ .

Исто расуђивање нас убеђује у тачност релације (55) ако је

$$\varphi(x, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{k} - \sum_{k=1}^p \frac{\sin(2n+k)x}{k} \quad \text{за } p \leq n, \text{ а такође}$$

и у односу на  $|\varphi(x, \bar{Q})|$ .

Означимо са  $P(x, n)$  збир првих  $n$  чланова од  $Q(x, n)$ , а са  $\bar{P}(x, n)$  збир првих  $n$  ђланова од  $\bar{Q}(x, n)$ :

$$P(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1},$$

$$\bar{P}(x, n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{1} \quad (56)$$

Тада је

$$P(0, n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\bar{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) = \frac{\sin n \frac{\pi}{4n}}{n} + \frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{4n}}{n-1} + \dots + \frac{\sin(2n-1) \frac{\pi}{4n}}{1} \quad (57)$$

Применимо ли на функцију  $\ln x$  у интервалу  $[n, n+1]$  образац коначног прираштаја, добијамо

$$l_n(n+1) - l_n = \frac{1}{n+\theta}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (57)$$

Последице релације (57) су

$$l_n \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \quad (58)$$

и

$$l_n \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1}. \quad (59)$$

Посматрајмо ред 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - l_n \frac{n+1}{n} \right). \quad (60)$$

Према (58) сваки члан реда (60) је позитиван, узимајући у обзир и (59) добијамо

$$0 < \frac{1}{n} - l_n \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} \quad (60)$$

Упоредјујући ред (60) са конвергентним редом  $\sum \frac{1}{n^2}$ , закључујемо да он конвергира. Означимо ли збир од (60) на  $C$ , онда за његов парцијални збир важи релација

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - l_n \frac{k+1}{k} \right) &= 1 - l_n 2 + \frac{1}{2} - l_n \frac{3}{2} - l_n \frac{4}{3} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n} - l_n \frac{n+1}{n} = \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - (l_n 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n+1}{n}) = \\ &= H_n - l_n (n+1) \rightarrow C, \text{ за } H_n \text{ смо означили парцијални збир хармо-} \\ &\text{ниског реда } \sum \frac{1}{k}, \text{ дакле} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - l_n \frac{k+1}{k} \right) = H_n - l_n (n+1) \rightarrow C \quad (62)$$

$$\text{Ајлер је израчунао да је } C \approx 0,577 \quad (63)$$

Величину  $l_n (n+1)$  можемо заменити са  $l_n n$ , јер њихова разлика тежи нули:  $l_n (n+1) - l_n n = l_n \frac{n+1}{n} = l_n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Тада (62) постаје  $H_n = l_n n + C + \gamma_n$ ,  $\gamma_n$  је бесконачно мала величина. Из (64) налазимо

$$H_n > l_n n \quad (65)$$

Сада релацију (57) можемо да напишемо у облику

$$P(0, n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > l_n n, \quad (66)$$



односно

$$\begin{aligned} \bar{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) &= \frac{\sin n \cdot \frac{\pi}{4n}}{n} + \frac{\sin(n+1) \frac{\pi}{4n}}{n-1} + \dots + \frac{\sin(2n-1) \frac{\pi}{4n}}{1} > \\ &> \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} l_n n, \\ \bar{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) &> \frac{l_n n}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (67)$$

Наведимо још и неке дефиниције и појмове из теорије скупова.

За скуп који је еквивалентан скупу природних бројева кажемо да је пребројив. Постоје и бесконачни скупови чији се елементи не могу кореспондирати елементима скупа природних бројева. Такве скупове називамо непребројивим. За њих се каже да имају моћ континуума. Пример таквог скупа је скуп свих тачака произвољног одсечка.

Поменимо још и став:

Ако је ред непрекидних функција на  $[a, b]$  неограничено дивергентан на скупу свуда густом на  $[a, b]$ , онда скуп тачака неограничено дивергенције има моћ континуума на произвољном одсечку од  $[a, b]$ .

Докази свих ставова који су поменути у овом поглављу, а нису извођени, могу се наћи у монографијама наведеним у цитираној литератури под бројевима 1 и 2.

## II

Већ смо поменули, у овом поглављу упознаћемо се са неким примерима Фуријерових редова непрекидних функција који не конвергирају равномерно на  $[-\pi, \pi]$ , као и са примерима непрекидних функција чији Фуријерови редови дивергирају.

1. Упознајмо се најпре са примером непрекидне функције чији Фуријеров ред конвергира свуда равномерно, сем у околини једне тачке.

Нека је

$$a \in \mathbb{N}, a > 1; \quad (1)$$

$$n_k = ak^2, n_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}; \quad (2)$$

$$\bar{Q}_k(x) = \bar{Q}(x, n_k), \quad (3)$$

$$\text{где је } \bar{Q}_k(x) \text{ Фејеров полином [I gl. (44)].} \quad (3)$$

Уочимо ред

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} \left\{ \frac{\sin n_k x}{n_k} + \frac{\sin (n_k + 1) x}{n_k - 1} + \dots + \frac{\sin (2 n_k - 1) x}{1} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{\sin (2 n_k + 1) x}{1} + \frac{\sin (2 n_k + 2) x}{2} + \dots + \frac{\sin 3 n_k x}{n_k} \right] \right\} \quad (3)$$

$$\text{и ред } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx \quad (5)$$

који добијамо кад у (4) уклонимо велику заграду.

Доказаћемо:

а) ред (4) је униформно (и апсолутно) конвергентан, па му је збир, означимо га са  $g(x)$ , непрекидна, функција;

б) ред (5) је Фуриеров ред од  $g(x)$ ;

ц) ред (5) не конвергира униформно у тачки  $x=0$ .

Како је на основу [I, (45)] за произвољно  $x$  и  $k$

$$|\overline{Q}_k(x)| < C. \quad (6)$$

а сем тога ред  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k}$  конвергира, те закључујемо да је

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{1}{k l_n^2 k} \overline{Q}_k(x) \right| < C_1, \quad (7)$$

тј. да ред (4) апсолутно и униформно конвергира. На основу овога и закључујемо да је функција  $g(x)$  непрекидна.

Покажимо да је (4) Фуриеров ред од  $g(x)$ . Према (1) и (2) за  $k \geq 2$  је

$$ak^2 > 3 a^{(k-1)^2}, \quad (8)$$

односно

$$n_k > 3 n_{k-1}. \quad (9)$$

Замењујући  $n_k$  са  $ak^2$  у (4) добијамо:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} \overline{Q}_k(x) = \frac{1}{2 l_n^2 2} \left\{ \frac{\sin a^4 x}{a^4} + \frac{\sin (a^4 + 1) x}{a^4 - 1} + \dots + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin(2a^4 - 1)x}{1} - \left[ \frac{\sin(2a^4 + 1)x}{1} + \frac{\sin(2a^4 + 2)x}{2} + \dots + \right. \\
& \left. + \frac{\sin(3a^4)x}{a^4} \right] + \frac{1}{3l_n^2 3} \left\{ \frac{\sin a^9 x}{a^9} + \frac{\sin(a^9 + 1)x}{a^8 - 1} + \dots + \right. \\
& \left. + \frac{\sin(2a^9 - 1)x}{1} - \left[ \frac{\sin(2a^9 + 1)x}{1} + \dots + \frac{\sin(3a^9)x}{a^9} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{4l_n^2 4} \left\{ \frac{\sin a^{16} x}{a^{16}} + \dots + \frac{\sin(2a^{16} - 1)x}{1} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\sin(2a^{16} + 1)x}{1} + \dots + \frac{\sin(3a^{16})x}{a^{16}} \right] \right\} + \dots \quad (10)
\end{aligned}$$

Водећи рачуна о неједнакости (9), увидамо да су коефицијенти уз  $x$  у синусима у растућем поретку у свакој загради, као и да су међусобом различити. Према томе ред (4) је тригонометриски ред (сада је јасно зашто су нам били потребни услови (8) и (9)). Ове чињенице и јесу довољне да закључимо да је (4) Фуриеров ред од  $g(x)$ . Ако на пример, обе стране једнакости

$$g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x)$$

помножимо са  $\sin px$  и интегралимо их у границама од 0 до  $2\pi$ , то на основу равномерне конвергенције реда (4), интегрисање на десној страни у (4), односно у (10), можемо вршити тако, што ћемо интегрисати сваку велику заграду посебно. Сваки интеграл форме

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{1}{k l_n^2 k} \left\{ \frac{\sin ak^2 x}{ak^2} + \dots + \frac{\sin(1ak^2 - 1)x}{1} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\sin 2ak^2 + 1)x}{1} + \dots + \frac{\sin 3ak^2 x}{ak^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

заменејемо коначним бројем интеграла, при чему ће сви они бити једнаки 0, сем случаја када у подинтегралној функцији коефицијент уз  $x$  буде износио  $p$ . На овај начин се и убеђујемо да су коефицијенти уз такво  $\sin px$  уствари и Фуриерови коефицијенти функције  $g(x)$ . Тако, на пример за  $a=2$  ред (10), односно (4) је



$$\begin{aligned}
g(x) = & \frac{1}{2 l_n^2 2} \left\{ \frac{\sin 2^4 x}{2^4} + \dots + \frac{\sin (2 \cdot 2^4 - 1) x}{1} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\sin (2 \cdot 2^4 + 1) x}{1} + \dots + \frac{\sin (3 \cdot 2^4 x)}{2^4} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{3 l_n^2 3} \left\{ \frac{\sin 2^9 x}{2^9} + \dots + \frac{\sin (2 \cdot 2^9 - 1) x}{1} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\sin (2 \cdot 2^9 + 1) x}{1} + \dots + \frac{\sin (3 \cdot 2^9 x)}{2^9} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{4 l_n^2 4} \left\{ \frac{\sin 2^{16} x}{2^{16}} + \dots + \frac{\sin (2 \cdot 2^{16} - 1) x}{1} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\sin (2 \cdot 2^{16} + 1) x}{1} + \dots + \frac{\sin (3 \cdot 2^{16} x)}{2^{16}} \right] \right\} + \quad (11)
\end{aligned}$$

За овај случај (када је  $a = 2$ ) Фуриерови којефицијенти од  $g(x)$  су

$$\begin{aligned}
a_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 15) \quad a_{16} = \frac{1}{2 l_n^2 2 \cdot 2^4}, \quad a_{17} = \frac{1}{2 l_n^2 2 (2^4 - 1)}, \dots, \\
a_{31} &= \frac{1}{2 l_n^2 2}, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = -\frac{1}{2 l_n^2 2}, \quad a_{34} = -\frac{2}{2 l_n^2 2 \cdot 2}, \dots, \\
a_{48} &= \frac{1}{2 l_n^2 2 \cdot 2^4}, \quad a_k = 0 \quad (k = 49, 50, \dots, 2^9 - 1), \quad a_{2^9} = \frac{1}{3 l_n^2 3 \cdot 2^9}, \dots,
\end{aligned}$$

Дакле, уверили смо се да је (10) Фуриеров ред од  $g(x)$ .

Прођимо на испитивање конвергенције Фуриеровог реда од  $g(x)$ . Најпре се убедимо да су парцијални зборови Фуриеровог реда од  $g(x)$  ограничени. Означимо произвољан парцијални збир Фуриеровог реда од  $g(x)$  са  $S_n(x, g)$ . Тада је

$$S_n(x, g) = \sum_{k=2}^m \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}^k(x) + \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) \quad (12)$$

са  $\varphi(x, \bar{Q}_{m+1})$  смо означили произвољан парцијални збир Фејеровог полинома  $\bar{Q}_{m+1}(x) = \bar{Q}(x, n_{m+1})$ . Тасност једнакости (12) увиђамо посматрајући (10). У  $S_n(x, g)$  улазе и они чланови Фуриеровог реда чији су којефицијенти нуле. Тако, рецимо је

$$S_2 a^{25} - 1(x, g) = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x) + \frac{1}{5 l_n^2 5} \left\{ \frac{\sin a^{25} x}{a^{25}} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\sin (2 a^{25} - 1) x}{1} \right\}.$$

Како је, према [I gl. (45)]

$$\left| \sum_{k=2}^m \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x) \right| \leq C \sum_{k=2}^m \frac{1}{k l_n^2 k} < A, \quad (13)$$

а такође је [I, (53)]

$$\frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) \leq \\ \leq \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \cdot 2(1 + l_n n_{m+1}), \quad (14)$$

односно

$$\leq \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) \leq \\ \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \cdot 2[1 + l_n a^{(m+1)^2}]. \quad (15)$$

На основу (15) је

$$\frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) < \frac{2(m+1) l_n a}{l_n^2 (m+1)} \quad (16)$$

Дакле, према (12), (13) и (16) следи да је

$$|S_n(x, g)| \leq B, \quad (n = 0, 1, \dots; 0 \leq x \leq 2\pi) \quad (17)$$

Значи, пуоизвољан парцијални сбир Фуријевог реда од  $g(x)$  је ограничен. Приметимо, да ако означимо разлику између произвољног  $S_n(x, g)$  и  $g(x)$  са  $R_n(x, g)$ , то на основу (17), као и ограничености функције  $g(x)$  добијамо

$$|R_n(x, g)| \leq K, \quad (n = 1, 2, 3, \dots; -\pi \leq x \leq \pi). \quad (18)$$

Означимо Фуриеров ред од  $g(x)$  са  $\sigma(x)$ . Покажимо да за  $x \in (-\pi, \delta)$ , или  $x \in (\delta, \pi)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\sigma(g)$  конвергира равномерно. Према (12) и значења ознаке  $R_n(x, g)$  је

$$R_n(x, g) = \frac{1}{(m+1)l_n^2(m+1)} \varphi(x, \bar{Q}_{m+1}) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x). \quad (19)$$

Узимајући у обзир [I, (45)] и [I, (53) и (54)] једнакост (19) прелази у неједнакост

$$|R_n(x, g)| \leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} + \frac{M \delta}{(m+1) l_n^2 (m+1)} < \varepsilon; n, m \rightarrow \infty \quad (20)$$

Релација (20) потврђује равномерну конвергенцију  $\sigma(g)$  за  $x \in (-\pi, \delta)$  и  $x \in (\delta, \pi)$ . Јасно је да  $\sigma(g)$  за  $x=0$  или  $x = \pm \pi$  конвергира. Покажимо да  $\sigma(g)$  конвергира неравномерно у околини тачке  $x=0$ , уколико број  $a$  ( $a > 1$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ) погоднио изаберемо.

Осмотримо парцијални збир од  $\sigma(g)$  ранга  $V_m = 2n_m - 1$ . Сваки такав парцијални збир има облик

$$Sv_m(x, g) = \sum_{k=2}^m \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x) + \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \bar{P}(x, n_{m+1}), \quad (21)$$

где је

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, n_{m+1}) &= \frac{\sin n_{m+1} x}{n_{m+1}} + \frac{\sin (n_{m+1} + 1) x}{n_{m+1} - 1} + \dots + \\ &+ \frac{\sin (2n_{m+1} - 1) x}{1} \end{aligned} \quad (22)$$

јер је последњи члан у парцијалном збиру  $Sv_m(x, g)$  облика

$$a_{vm} = \frac{1}{(m+1) l_n^2 (m+1)} \cdot \frac{\sin (2n_{m+1} - 1) x}{1} \quad (23)$$

Већ смо поменули да је  $S_n(x, g) - g(x) = R_n(x, g)$ , па је према (21)



$$Rv_m(x, g) = Sv_m(x, g) - g(x) = \frac{1}{(m+1)l_n^2(m+1)} \bar{P}(x, n_{m-1}) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} \bar{Q}_k(x) \quad (24)$$

Стављајући

$$x_{m+1} = \frac{\pi}{4 n_{m+1}}, \quad (25)$$

и узимајући у обзир ([I, (45)] и [I, (66)], налазимо да је

$$\begin{aligned} Rv_m(x_{m+1}, g) &> \frac{1}{(m+1)l_n^2(m+1)} \bar{P}\left(\frac{\pi}{4 n_{m+1}}, n_{m+1}\right) - \\ &- C \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k l_n^2 k} > \frac{1}{(m+1)l_n^2(m+1)} \cdot \frac{l_n n_{m+1}}{\sqrt{2}} - \\ &- \frac{C}{(m+1)l_n^2(m+1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Како је

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(m+1)l_n^2(m+1)} \cdot \frac{l_n n_{m+1}}{\sqrt{2}} - \frac{C}{(m+1)l_n^2(m+1)} = \\ &= \frac{l_n a^{(m+1)^2}}{\sqrt{2} (m+1) l_n^2 (m+1)} - \frac{C}{(m+1) l_n^2 (m+1)}, \end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned} Rv_m(x_{m+1}, g) &> \frac{(m+1) l_n a}{\sqrt{2} l_n^2 (m+1)} - \frac{C}{(m+1) l_n^2 (m+1)} > \\ &> \frac{(m+1) l_n a}{\sqrt{2} l_n^2 (m+1)} - C. \end{aligned}$$

Дакле

$$Rv_m > \frac{(m+1) l_n a}{\sqrt{2} l_n^2 (m+1)} - C \quad (27)$$

Уколико желимо да, рецимо, овај остатак буде воћи од 1. то можемо изабрати  $a$  тако да испуњава неједнакост

$$\frac{(m+1)l_n a}{\sqrt{2}l_n^2(m+1)} - C > 1, \text{ тј. } l_n a > \frac{\sqrt{2}l_n^2(m+1)(1+C)}{(m+1)} \quad (28)$$

Релација (28) говори да се остатак  $Rv_m(x_{m+1})$ , може учинити већи од 1. Уверили смо се да за низ тачака

$$x_{m-1} - \frac{\pi}{4n_{m+1}}, \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4n_{m+1}} = 0,$$

и за тако изабрано  $a$ , које испуњава (28), је

$$Rv_m(x_{m+1}) > 1 \quad (29)$$

Постојање релације (29) и потврђује чињеницу да  $\sigma(g)$  неравномерно конвергира у околини тачке  $x=0$ , односно чињеницу да функција  $g(x)$  има „особину Лебега”.

2. следећи пример се односи на непрекидну функцију чији Фуриеров ред конвергира неравномерно на сваком интервалу одсечка  $[-\pi, \pi]$ . Да би конструисали такав пример применићемо поступак кондензације сингуларитета.

Означимо са  $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$  елементе произвољног пребројивог свуда густог скупа  $S$  у  $[-\pi, \pi]$  и дефинишимо функцију  $G(x)$  овако:

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g(x - r_k) \quad (30)$$

где је  $g(x - r_k)$  функција коју смо испитивали у 1. примеру и која има сингуларитет одређеног типа у тачки  $x=0$ . Нека су коефицијенти  $a_k$ .

$$\frac{1}{2 \cdot 2}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{6 \cdot 8}, \dots, \quad (31)$$

односно

$$a_k = \frac{1}{2k(3k-1)}$$

Очигледно је да је  $a_k > 0$  и  $a_k < 1$ .

На основу (32) закључујемо да је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(3k-1)}, \text{ односно } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \quad (32)$$

Треба да покажемо да је функција  $G(x)$ , дефинисана са (30) и при условима исказаним са (5), (32) и (34) непрекидна функција чији Фуриеров ред, који ћемо да означимо са  $\sigma(G)$ , конвергира на сваком интервалу размака  $[-\pi, \pi]$ . Примењујући исти поступак и расуђивање као у односу на фун-

кцију  $g(x)$ , убеђујемо се да је ред  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g(x - r_k)$  апсолутно и равно-

мерно конвергентан ред. Из ове чињенице произилази да је функција  $G(x)$  непрекидна функција као и да је ред којим је она дефинисана, њен Фуриеров ред. Како је

$$G(x) = \frac{1}{2 \cdot 2} g(x - r_1) + \frac{1}{4 \cdot 5} g(x - r_2) + \frac{1}{6 \cdot 8} g(x - r_3) + \dots, \quad (34)$$

то ће парцијални збир Фуриеровог реда од  $G(x)$ , означимо га са  $S_n(x, G)$  бити

$$S_n(x, G) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} S_n(g, x - r_k), \quad (35)$$

где је  $S_n(g, x - r_k)$  парцијални збир Фуриеровог реда од  $g(x - r_k)$ . Означимо са  $R_n(G, x)$  разлику

$$S_n(x, G) - G(x) = R_n(G, x), \quad (36)$$

тада је

$$\begin{aligned} R_n(G, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} [S_n(g, x - r_k) - g(x - r_k)] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} R_n(g, x - r_k), \end{aligned} \quad (37)$$

где смо разлику  $S_n(g, x - r_k) - g(x - r_k)$  означили са  $R_n(g, x - r_k)$ .

Бирајући  $N$  довољно велико и с обзиром да је  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} < 1$ ,

можемо сматрати да је

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} < \eta, \quad \eta > 0 \quad (38)$$



Према [I, (45) и II (18)] је  $|R_n(g, x - r_k^2)| \leq k$ , па је

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} R_n(g, x - r_k) \right| \leq k\eta. \quad (39)$$

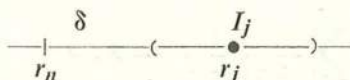
Израз (37), који се односи на  $R_n(G, x)$ , можемо, према (39), да напишемо у форми

$$R_n(G, x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2n(3n-1)} R_n(g, x - r_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)} R_n(g, x - r_n). \quad (40)$$

Како је  $g(x - r_k)$  дефинисана конвергентним редом то  $R_n(g, x - r_k) \rightarrow 0$  за  $n \rightarrow \infty$  и произвољно  $x$ , то имамо

$R_n(G, x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  и произвољно  $x$  (41) Последица од (41) је конвергенција  $\sigma(G)$  у свакој тачки. Остаје нам да докажемо да  $\sigma(G)$  конвергира неравномерно у околини сваке тачке  $r_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ). Како су тачке  $r_k$  елементи пребројивог скупа  $S \in [-\pi, \pi]$ , то је скуп  $S$  свуда густ на  $[-\pi, \pi]$ . Фиксирајмо произвољну тачку  $r_j$  и нека она буде средина произвољно малог интервала, означимо га са  $I_j$ . Тада се произвољан број тачака  $r_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ;  $k \neq j$ ) налази на растојању  $\delta > 0$  од  $I_j$ , па је очигледан однос

$$|x - r_k| \geq \delta, \quad x \in I_j, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad k \neq j$$



Како Фуриеров ред од  $g(x)$  конвергира равномерно за  $x(-\delta, \delta)$ , за произвољно  $\delta > 0$ , то за свако  $k \neq j$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) важи

$$|R_n(g, x - r_k)| < \eta; \quad x \in I_j; \quad n \geq n_0; \quad n_0 = n_0(n) \quad (42)$$

Из (40) произилази да је

$$R_n(G, x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k(3k-1)} R_n(g, x - r_k) +$$

$$+ \frac{1}{2j(3j-1)} R_n(g, x - x_j) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2k(3k-1)} R_n(g, x - r_k) \quad (43)$$

За  $x \in I_j$ , према (42) и (39) и конвергенције реда (31) добијамо

$$\begin{aligned} |R_n(G, x)| &\geq \frac{1}{2j(3j-1)} |R_n(g, x - r_j)| - \eta \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k(3k-1)} - K\eta \geq \\ &\geq \frac{1}{2j(3j-1)} |R_n(g, x - r_j)| - \eta(1 + K) \end{aligned} \quad (44)$$

С обзиром да  $\eta$  можемо узети произвољно мало, то можемо сматрати да је

$$\eta(k+1) < \frac{1}{2 \cdot 2j(3j-1)} \quad (45')$$

Међутим, како за  $g(x)$ , према (29), постоје бројеви  $V_m$  и  $x_m$  за које је  $Rv_m(g, x_m) > 1$ , за  $x_m \rightarrow 0$ , то релација (44) постаје

$$|Rv_m(G, x_m)| \geq \frac{1}{2j(3j-1)} \cdot 1 - \frac{1}{2 \cdot 2j(3j-1)} = \frac{1}{2 \cdot 2j(3j-1)},$$

односно

$$|Rv_m(G, \xi_m)| \geq \frac{1}{2 \cdot 2j(3j-1)}, \quad \xi_m \rightarrow 0. \quad (45)$$

Међутим, (45) нам и указује када ће  $\xi_m \rightarrow 0$ :

само уколико је  $x_m = \xi_m - r_j = 0$ , односно  $\xi_m = r_j$ . Закључујемо: за свако  $x$  које припада околини тачке елемента,  $r_j$ , према (45), Фуриеров ред од  $G(x)$ , конвергира неравномерно, па како  $j$  можемо произвољно да бирамо, то значи да ће  $\sigma(G)$  конвергирати неравномерно у околини сваке тачке  $r_j$ , тј на сваком интервалу чија је средина  $r_j$ .

Дакле,  $G(x)$ , дефинисана са (35), је непрекидна функција чији Фуриеров ред конвергира неравномерно на сваком интервалу  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

3. Покажимо да постоје непрекидне функције чији Фуриерови редови дивергирају.

Упознајмо се са непрекидном функцијом чији Фуриеров ред дивергира у тачки  $x=0$

Нека су и сада испуњени услови

$$a \in N, a \geq 2, n_k = ak^2, n_k \in N, k \in N \quad (46)$$

Означимо са  $Q_k(x) = Q(x, n_k)$  полином Фејера (I, (43)

Дефинишемо функцију  $f(x)$ , редом

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m_k}} Q_k(x), \quad (47)$$

односно

$$f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m_k}} Q_k(x) \quad (48)$$

За полином  $Q_k(x)$  важи, према (I, 45) релација

$$|Q(x, n_k)| \leq C$$

Како је

$$\frac{1}{(l_n l_n k)^{m_k}} = \frac{1}{k^{l_n^{m_k} l_n^{m_k}}} < \frac{1}{k^2}, \quad (49)$$

то закључујемо да ред (47) конвергира апсолутно и равномерно, те је функција  $f(x)$  непрекидна. Замењујући израз за  $Q_k(x)$  у (48) добијамо

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{(l_n l_n 3)^{m_3}} \left\{ \frac{\cos n_3 x}{n_3} + \dots + \frac{\cos (2n_3 - 1)x}{1} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\cos (2n_3 - 1)x}{1} + \dots + \frac{\cos 3n_3 x}{n_3} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{(l_n l_n 4)^{m_4}} \left\{ \frac{\cos n_4 x}{n_4} + \dots + \frac{\cos (2n_4 - 1)x}{1} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\cos (2n_4 + 1)x}{1} + \dots + \frac{\cos 3n_4 x}{n_4} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{(l_n l_n 5)^{m_5}} \left\{ \frac{\sin n_5 x}{n_5} + \dots + \frac{\cos (2n_5 - 1)x}{1} - \right. \\ & \left. - \frac{\cos (2n_5 + 1)x}{1} + \dots + \frac{\cos 3n_5 x}{n_5} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (50)$$

Водећи рачуна о (46), увидамо да је (50) тригонометриски ред, и то по косинусима. Множећи обе стране од (50) са  $\cos px$  и интегралећи у границама од 0 до  $2\pi$  и примењујући аналоган поступак као приликом



доказивања да је (10) Фуриеров ред од  $g(x)$ , закључили бисмо да је десна страна у (50) Фуриеров ред од  $f(x)$ .

Означимо Фуриеров ред од  $f(x)$  са  $\sigma(f)$  и испитајмо конвергенцију, као и карактер конвергенције од  $\sigma(f)$ . Уколико  $x \in (-\pi, -\varepsilon)$  или  $x \in (\varepsilon, \pi)$ ,  $\sigma(f)$  конвергира равномерно као и (47). Убедимо се у ово тврђење.

Означимо са  $S_n(x, f)$  произвољан парцијални збир од  $\sigma(f)$ , тада је

$$S_n(x, f) = \sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} Q_k(x) + \frac{1}{(l_n l_n m)^{m m}} \varphi(x, Q(x, n_m)). \quad (51)$$

где је  $\sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} Q_k(x)$  парцијални произвољни збир од (47).

Дакле

$$S_n(x, f) - \sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} Q_k(x) = \frac{1}{(l_n l_n m)^{m m}} \cdot \varphi(x, Q(x, n_m)) \quad (52)$$

Према (I, (54)), за  $x \in (-\pi, -\varepsilon)$  и  $x \in (\varepsilon, \pi)$  је

$$|\varphi(x, Q_k)| \leq M\varepsilon$$

На основу наведене чињенице је

$$|S_n(x, f) - \sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} Q_k(x)| \leq \frac{M\varepsilon}{(l_n l_n m)^{m m}}. \quad (53)$$

Јасно је да за  $m \rightarrow \infty$

$$|S_n(o, f) - \sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} Q_k(x)| \rightarrow 0 \quad (54)$$

Релација (54) исказује довољан услов за равномерну конвергенцију  $\sigma(f)$  за  $x \in (-\pi, -\varepsilon) \vee (\varepsilon, \pi)$ . Осћаје да покажемо да  $\sigma(f)$  дивергира за  $x = 0$ . Посматрајмо разлику два парцијална збира од  $\sigma(f)$  ранга  $v_m = 2n_m - 1$ , односно  $\eta_m = 3n_{m+1}$ :

Ko je

$$\begin{aligned}
 S y_m(x, f) = & \frac{1}{(l_n l_n 3)^{m 3}} \left\{ \frac{\cos n_3 x}{n_3} + \dots + \frac{\cos (2 n_3 - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_3 + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_3 x}{n_3} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{(l_n l_n 4)^{m 4}} \left\{ \frac{\cos n_4 x}{n_4} + \dots + \frac{\cos (2 n_4 - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_4 + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_4 x}{n_4} \right] \right\} + \\
 & + \dots + \\
 & + \frac{1}{[l_n l_n (m-1)]^{m (m-1)}} \left\{ \frac{\cos (n_{m-1}) x}{n_{m-1}} + \dots + \frac{\cos (2 n_{m-1} - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_{m-1} + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_{m-1} x}{n_{m-1}} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{(l_n l_n m)^{m m}} \left\{ \frac{\cos n_m x}{n_m} + \dots + \frac{\cos (2 n_m - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_m + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_m x}{n_m} \right] \right\} \quad (55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a} \quad S \eta_m = & \frac{1}{(l_n l_n 3)^{m 3}} \left\{ \frac{\cos n_3 x}{n_3} + \dots + \frac{\cos (2 n_3 - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_3 + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_3 x}{n_3} \right] \right\} + \\
 & + \dots + \\
 & + \frac{1}{(l_n l_n k)^{m k}} \left\{ \frac{\cos n_k x}{n_k} + \dots + \frac{\cos (2 n_k - 1) x}{1} - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_k + 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_k x}{n_k} \right] \right\} + \\
 & + \dots +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{[l_n l_n (m-1)]^m (m-1)} \left\{ \frac{\sin n_{m-1} x}{n_{m-1}} + \dots + \frac{\cos (2 n_{m-1} - 1) x}{1} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{\cos (2 n_{m-1} - 1) x}{1} + \dots + \frac{\cos 3 n_{m-1} x}{n_{m-1}} \right] \right\}, \quad (56)$$

па је

$$Sv_m - S\eta_m = \frac{1}{(l_n l_n m)^m m} \left\{ \frac{\cos n_m x}{n_m} + \dots + \frac{\cos (2 n_m - 1) x}{1} \right\} \quad (57)$$

или, према (I, (56))

$$Sv_m(x, f) - S\eta_m(x, f) = \frac{P(x, n_m)}{(l_n l_n m)^m m} \quad (58)$$

За  $x = 0$ , релација (58) постаје (I, 66)

$$Sv_m(0) - S\eta_m(0) = \frac{P(0, n_m)}{(l_n l_n m)^m m} > \frac{l_n n_m}{(l_n l_n m)^m m},$$

односно

$$Sv_m(0) - S\eta_m(0) > \frac{m_2 l_n a}{(l_n l_n m)^m m}. \quad (59)$$

Како је

$$\frac{1}{(l_n l_n m)^m m} < \frac{1}{m^2}, \quad (60)$$

то је тим пре

$$Sv_m - S\eta_m > \frac{m^2 l_n a}{m^2} = l_n a \quad (61)$$

Однос (61) говори да није испуњен Кошијев критеријум конвергенције за низ парцијалних збирова од  $\sigma(f)$  те следи да  $\sigma(f)$  дивергира за  $x=0$ . Уверили смо се да је функција  $f(k)$  дефинисана са (48) непрекидна и да њен Фуриеров ред дивергира у тачки  $x=0$ , тј. да поседује „особину ду Бонса — Рејмонда”.

4. Упознајмо се са примером непрекидне функције чији Фуриеров ред дивергира на скупу моћи континуума (I, str 12).

Потсетимо се да је

$$f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n l_n k)^m k} Q_k(x),$$



функција чији Фуриеров ред конвергира равномерно на  $[-\pi, -\delta]$  и  $[\delta, \pi]$ , док у тачки  $x = 0$  он дивергира.

Уколико бисмо ставили  $n_k = ak^3$  уместо  $n_k = ak^2$  уверили бисмо се да су за  $x=0$  парцијални зборови неограничени. Релација (61) би тада била

$$S_{\nu_m}(0) - S_{\eta_m}(0) = \frac{P(0, n_m)}{m^2} > \frac{m^3 l_n a}{m^2} = m l_n a \quad (62)$$

Релација (62) говори да  $\sigma(f)$  не само што дивергира у  $x=0$ , већ би у тој тачки и  $S_n(0, f)$  били неограничени.

Ако у полиному  $Q_k(k)$  (I, 43) заменимо аргумент  $x$  са  $k!x$  и формирамо функцију  $\phi(x)$  дефинисану редом

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n k)^{l_n k}} Q_k(k!x), \quad (63)$$

добили бисмо

$$\phi(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n k)^{l_n k}} Q_k(k!x) \quad (64)$$

Напоменимо да је

$$\frac{1}{(l_n k)^{l_n k}} = \frac{1}{k^{l_n l_n k}} < \frac{1}{k^2}. \quad (65)$$

Аналогно, као у првом примеру овог поглавља, уверавамо се да је  $\phi(x)$  непрекидна функција и да је (63) њен Фуриеров ред. Означимо Фуриеров ред од  $\phi(x)$  са  $\sigma(\phi)$ . Покажимо да  $\sigma(\phi)$  дивергира на скупу моћи континуума. Најпре докажимо да  $\sigma(\phi)$  дивергира за све  $x$  вредности

$$x = \pm \frac{p}{q} \pi, \quad p, q \in N, \quad (66)$$

као и да су парцијални зборови од  $\sigma(\phi)$  за поменуте вредности аргумента неограничени. Парцијалне збирове од  $\sigma(\phi)$  означимо са  $S_n(\phi, \frac{p}{q} \pi)$ .

Приметимо да је за

$$k!x = 0 \pmod{2\pi} \quad (k! \frac{p}{q} \pi \text{ је дељиво са } 2\pi, k \geq 2)$$

Нека је сада  $l'_k = k!(2n_k - 1)$ ,  $l''_k = 3n_{k-1}(k-1)!$ . У том случају је

$$S'_{l'k}\left(\phi, \frac{p}{q}\pi\right) - S'_{l''k}\left(\phi, \frac{p}{q}\pi\right) = \frac{1}{(l_n k)^{l'n k}} P(k! x, n_k), \text{ па је за } k \geq q$$

и довољно велико  $q$

$$S'_{l'k}\left(\phi, \frac{p}{q}\pi\right) - S'_{l''k}\left(\phi, \frac{p}{q}\pi\right) = \frac{1}{(l_n k)^{l'n k}} P(0, n_k) > \frac{l_n n_k}{(l_n k)^{l'n k}} \quad (67)$$

С обзиром на (65), тим пре је

$$S'_{l'k} - S'_{l''k} > k l_n a. \quad (68)$$

Дакле, парцијални зборови од  $\sigma(\phi)$  за  $x = \pm \frac{p}{q}\pi$  су неограничени те самим тим Фуриеров ред у свим тачкама типа  $x = \pm \frac{p}{q}\pi$  дивергира.

На основу дефиниције; низ функција  $f_n(x)$  називамо неограничено дивергентним ако је испуњен услов

$$\overline{\lim} |f_n(x_0)| = +\infty \quad (69)$$

Према (69) низ парцијалних зброва  $S_n\left(\phi, \frac{p}{q}\pi\right)$  је неограничено дивергентан. Чињеница да је скуп тачака  $x = \pm \frac{p}{q}\pi$ , који је густ на  $[-\pi, \pi]$ , скуп моћи континуума се заснива на последици става (I стр. 12).

Овом приликом напоменимо да је у теорији Фуриерових редова још остало отворено питање;

Да ли постоји непрекидна функција чији Фуриеров ред дивергира на скупу позитивне мере.

Немачки математичар Л. Недер је конструисао непрекидну функцију чији Фуриеров ред дивергира на пребројивом скупу интервала  $[0, 2\pi]$ .

Означимо са  $x_1, x_2, \dots, x_n$  елементе пребројивог скупа интервала  $[0, 2\pi]$ . Дефинишимо функција  $F(x)$  редом

$$\sum a_k f(x - x_k), \quad (70)$$

односно

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(l_n l_n m)^{l'n m}} Q_m(x - x_k) \right) \quad (71)$$

где су коефицијенти  $a_k$  чланови произвољног конвергентног реда, тј  $\sum a_k < +\infty$ , а функција  $f$  је дефинисана са (48). Аналогним расуђивањима као у предходним примерима уверили би се да је  $F(x)$  непрекидна функција. Докажимо да њен Фуриеров-ов ред, означимо га са  $\sigma(F)$  равномерно конвергира свуда сем у тачкама пребројивог скупа  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

Нека је  $\varepsilon > 0$  задат. За посматрану тачку  $x_j$  изаберимо  $p$  произвољно велико и такво да буде  $p > 1$ , тада је  $\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$  (остатак конвергентног реда). Утрећем примеру овог поглавља релација (61), видели смо да за  $\sigma(f)$  постоје парцијални зборови ранга

$$v_m \text{ и } \eta_m \text{ (} v_m = 2n_m - 1; \eta_m = 3n_{m-1} \text{) и за које је}$$

$$Sv_m(f, 0) - S\eta_m(f, 0) < I_n(a), \text{ (} m = 1, 2, \dots \text{)} \quad (72)$$

Означимо произвољан парцијални збир ранга  $n$  од  $\sigma(F)$  са  $S_n(Fx)$ . Тада је

$$S_n(F, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_n(f, x - x_k) \quad (73)$$

односно

$$S_n(F, x_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p a_k S_n(f, x_j - x_k) + a_j S_n(f, 0) +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k S_n(f, x_j - x_k). \quad (74)$$

У овом случају је разлика парцијалних зборова од  $\sigma(F)$  ранга  $v_m$  и  $\eta_m$

$$Sv_m(F, x_j) - S\eta_m(F, x_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p a_k [Sv_m(f, x_j - x_k) -$$

$$- S\eta_m(f, x_j - x_k)] + a_j [Sv_m(f, 0) - S\eta_m(f, 0)] +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k [Sv_m(f, x_j - x_k) - S\eta_m(f, x_j - x_k)], \quad (75)$$



где су  $Sv_m(f, x)$  и  $S\eta_m(f, x)$  одговарајући парцијални зборови од  $\sigma(f)$ . Како су за функцију  $f(x)$  парцијални зборови од  $\sigma(f)$  ограничени, то је

$$|S_n(f, x)| < A; n = 1, 2, \dots; -\pi \leq x \leq \pi \quad (76)$$

Из (70) и (76) следи да је

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty} a_k [Sv_m(f, x_j - x_k) - S\eta_m(f, x_j - x_k)] \right| < 2A\varepsilon \quad (77)$$

Како ред од  $\sigma(f)$  конвергира свуда сем за  $x=0$  то,  $S_n(f, x_j - x_k) \rightarrow f(x_j - x_k)$  за  $n \rightarrow \infty$ ,  $k \neq j$  и  $k = 1, \dots, p$ .

Отуда следи да  $Sv_m(f, x_j - x_k) - S\eta_m(f, x_j - x_k) \rightarrow 0$  при произвољном  $k \neq j$ ,  $k \leq p$  и при  $m \rightarrow \infty$ . Но тада и

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p a_k [Sv_m(f, x_j - x_k) - S\eta_m(f, x_j - x_k)] \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Значи за произвољно  $C > 0$  можемо узети  $m$  тако велико па да важи релација

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p a_k [Sv_m(f, x_j - x_k) - S\eta_m(f, x_j - x_k)] \right| < C \quad (78)$$

Претпоставимо да смо  $\varepsilon$  изабрали тако па да је  $2A\varepsilon < C$  онда из (74), (75), (76), (77) и (78) следи да је

$$Sv_m(F, x_j) - S\eta_m(F, x_j) > a_j l_n a - 2C > \frac{a_j}{2} l_n a, \quad (79)$$

уколико изабреремо  $C$  тако да важи неједнакост  $2C < \frac{a_j}{2} l_n a$  Из (79)

следи да за довољно велико  $m$ ,  $\sigma(F)$  дивергира при  $x = x_j$ , тј. у свим тачкама задатог пребројивог скупа (није испуњен Кошијев критеријум конвергенције за низ  $S_n(F, x)$ ).

Уверимо се да за  $\xi \in [0, 2\pi)$  и  $\xi \neq x_j$ ,  $j$  је произвољно,  $\sigma(F)$  конвергира за  $x = \xi$ . Тада за произвољно  $n$  и  $n + q$ , имамо

$$|S_{n+q}(F, \xi) - S_n(F, \xi)| \leq \sum_{k=1}^n a_k |S_{n+q}(f, \xi - x_k) - S_n(f, \xi - x_k)| + \sum_{p=1}^{\infty} a_k |S_{n+q}(f, \xi - x_k) - S_n(f, \xi - x_k)|. \quad (80)$$

Сви чланови у првом сабирку на десној страни у (80) за  $n \rightarrow \infty$  могу се учинити произвољно малим, јер  $\sigma(f)$  конвергира за  $\xi - x_k \neq 0$ . Други сабирак није већи од  $2A\varepsilon$  где је  $\varepsilon > 0$  произвољно мало. Значи

$$S_{n+q}(F, \xi) - S_n(F, \xi) \rightarrow 0 \text{ за } n \rightarrow \infty, \text{ тј } \sigma(F) \text{ конвергира за } \xi \neq x_k.$$

5. Задњи пример се односи на непрекидну функцију чији Фуриеров ред дивергира на скупу моћи континуума. Пример такве функције је дао мађарски математичар К. Тандори. За конструкцију овакво функције користе нам, такође, полиноми Фејера.

Осмотримо низ тачака  $x_k$ , које ћемо касније изабрати, и нека је функција  $\phi(x)$  дефинисана редом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q(x - x_k, n_k), \quad (81)$$

односно

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q(x - x_k, n_k) \quad (82)$$

где је

$$n_k = ak^2, \quad a \geq 2, \quad a \in N, \quad k \in N. \quad (83)$$

Као што смо доказали да је  $f(x)$  (48) непрекидна функција, закључили бисмо да је и  $\phi(x)$  непрекидна функција, као и да је парцијални збир од  $\sigma(\phi)$  ограничен, тј да је

$$|S_n(\phi, x)| \leq B. \quad (84)$$

Према пређашњим расуђивањима, а која су се односила на парцијалне збирове од  $\sigma(f)$ , ранпа  $V_m$ , односно  $\eta_m$  имали бисмо да је

$$Sv_m(\phi, x) - S\eta_m(\phi, x) = \frac{1}{m^2} \cdot P(x - x_m, n_m), \quad (85)$$

па је за  $x > 0$

$$\frac{1}{m^2} P(0, n_m) > I_n a \quad (86)$$

На основу (85) и (86) тачку  $x_m$  можемо оградити малим интервалом  $I_m$  унутар којег, на основу непрекидности полинома  $P(x, n_m)$  имамо

$$Sv_m(F, x) - Sv_m(F, x) > \frac{1}{2} I_n a, x \in I_m \quad (87)$$

Изаберимо сада тачке  $x_m$  овако:  $x_1, x_2$  и  $x_3$  су такве да је  $I_2 \subset I_1, I_3 \subset I_1$ , а  $I_2$  и  $I_3$  су дисјунктни, дакле,  $x_4, x_5, x_6, x_7$  су такве да је  $I_4 \subset I_2, I_5 \subset I_2, I_4$  и  $I_5$  су дисјунктни,  $I_6 \subset I_3, I_7 \subset I_3, I_6$  и  $I_7$  су дисјунктни.

Наведене релације добијамо бирајући  $I_m$  довољно малим. Продужавајући овај поступак, добити бисмо савршен скуп  $P$  чији се сваки елемент садржи у бесконачном скупу интервала тга  $I_m$ . Уколико за сваки такав елемент важи (87) за бесконачан скуп вредности од  $m$ , тада у свакој таквој тачки  $\sigma(\phi)$  дивергира, тј  $\sigma(\phi)$  дивергира на скупу моћи континуума.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Барг — Тригонометриски редови, Москва, 1961.
2. А. Зигмунд — Тригонометриски редови, Москва, 1965.
3. Г. Х. Хадри и В. В. Рогозински — Редови Фуриера, Москва, 1962.
4. Г. М. Фихтенгоц — Курс диференцијалног и интегралног рачуна. Москва, 1963.
5. L. Neder — Zur theorie der trigonometrischen Reihen, Ma, 84, 1921.
6. K. Tandori — Bemerkung zur Divergenc der Furier-schen Reihen stetiger Funktionen — Debrecin, 1952.

БОГДАН ДАМНЯНОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ FOURIER-ОВЫХ РЯДОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ,  
КОТОРЫЕ НЕРАВНОМЕРНО КОНВЕРГЕНТНЫ ИЛИ ДИВЕРГЕНТНЫ

#### РЕЗЮМЕ

В этой работе конструированы и даны представления характерных случаев Fourier-овых рядов непрерывных функций. Примеры относятся на Fourier-овые ряды непрерывных функций, которые неравномерно конвергентны или дивергентны в одной точке или в каком-нибудь множестве  $[-\pi, \pi]$ . Конструкции примеров базируются на Fejer-овых полиномах и их особенностях.





RADIOVOJE Ž. MARINOVIĆ, DRAGOSLAV R. PEJČINOVIĆ

## O pH VREDNOSTI KORE DRVEĆA I NASELJIMA LIŠAJA XANTHORIA PARIETINA (L.) TH. FR. NA KORI DRVEĆA

### UVOD

Ispitivana je pH vrednost kore drveća i naselja lišaja *Xanthoria parietina* na kori drveća. U vezi sa postavljenim problemom više puta godišnje posećivana je Deliblatska Peščara i izvesni predeli Kosova i južne Srbije u vremenu od marta 1967. do februara 1969. godine. U južnoj Srbiji ispitivanja su vršena najvećim delom u blizini voda.

Proučavani tereni južne Srbije bogati su vodom jer kroz njih protiče veći broj manjih i većih potoka i reka. U potocima i rekama pokretljivost vodene mase je znatna što je pre svega uslovljeno padom terena. Voda što otiče rekama i potocima nailazi na stene o koje se razbija u sitne kapi vlažeći okolno tle a čime obogaćuje i vazduh vodenom parom.

Naselja lišaja proučena su na terenu za vreme prikupljanja materijala, dok je pH vrednost njihove podloge ispitivan u laboratoriji Filozofskog fakulteta u Prištini i Botaničkom zavodu Univerziteta u Beogradu. Prikupljeni lihenološki materijal čuva se pri Botaničkom zavodu Univerziteta u Beogradu.

### MATERIJAL I METOD RADA

Lišaj *Xanthoria parietina* na izučavanom terenu naseljava debela i grane drveća na kome gradi rozete manje više razgraničene jedne od drugih. Rozete su različitog odlika i veličine. Pri skupljanju lišaja sa biljaka zajedno sa njih odsecane su grane koje je naseljavao ili je skidan sa debela zajedno sa korom. Prikupljeni materijal, da bi se sačuvao, posle kratkotrajnog sušenja, stavljan je u platnene kese.

Lišaj je prikupljan sa 24 lokaliteta. Lokaliteti od 1 do 7 nalaze se na Deliblatskoj peščari, a na Kosovu od 8 do 14, dok od 15 do 24 u južnoj Srbiji. Svaki od lokaliteta imao je površinu oko 1 ara.

U ispitivanim površinama lišaj *Xanthoria parietina* obrasta relativno veliki broj derveta. Pokrovnost lišaja određivana je na taj način što su debela drveća oblagana „paus-papirom“ na kome su ucrtavanjem razgraničene površine debela naseljene lišajem od površina koje nisu bile naseljene lišajem.

U izvesnim slučajevima pokrovnost je određivana i subjektivno. Određivanje pokrovnosti vršeno je samo na deblima, dok sa ostalih delova drveća nije uzimana u obzir. Pokrovnost je iskazivana u procentima u odnosu na celokupnu površinu debla.

Vrednost pH određivana je kako na živom tako i na uginulom drveću. U cilju što egzaktnijeg utvrđivanja pH vrednosti kore, materijal sa živih i uginulih drveća pripreman je na isti način.

#### REZULTATI ISTRAŽIVANJA I DISKUSIJA

Vrednost pH kore i drveća i naselja lišaja *Xanthoria parietina* na kori drveća proučavana su na oko 500 drveta. Proučavano drveće taksonomski pripada vrstama *Populus alba*, *Juglans regia*, *Morus alba*, *Pirus malus*, *Prunus avium*, *Prunus domestica* ssp *oeconomica*, *Prunus domestica* var *oeconomica* i *Prunus domestica* var *myrobalana*.

Proučavano drveće raste pojedinačno, u sastavu proređenih ili gustih šuma. Kora pojedinačnog i onog što raste u sastavu pojedinačnih šuma za vreme sunčanih dana dugotrajno je osvetljena direktnom sunčevom svetlošću koja može da dostigne visok intenzitet. Međutim, kora drveća gustih šuma slabije je osvetljena od prethodnih.

Šume su mešovite, ali po sastavu dendroflore nisu mnogo raznovrsne. Međutim, na više mesta na Deliblatskoj peščari topolove šume su grupisane u obliku čistih sastojina.

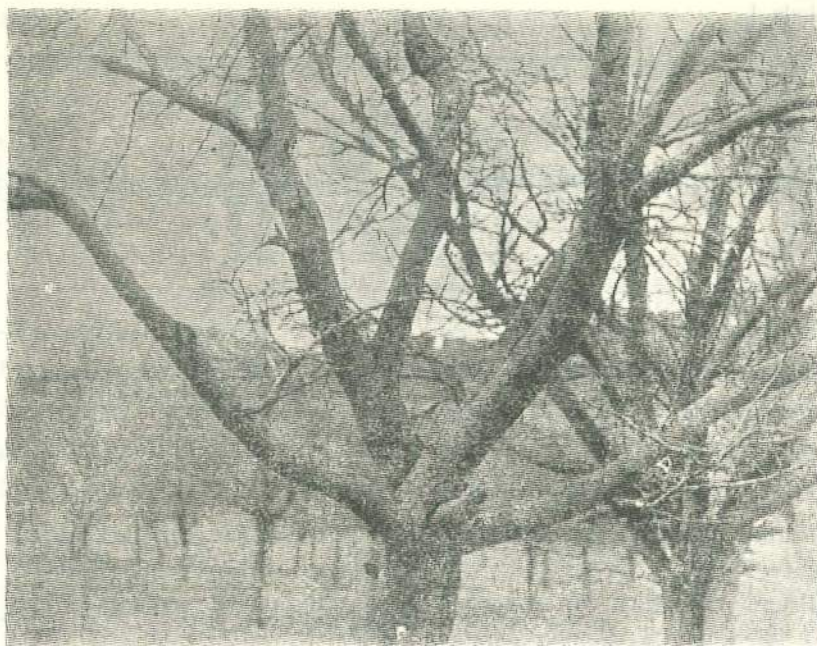
Na površini debla kao i starijih grana u većine dendroflornih clemenata od pokoričnih tkiva nalazi se mrtva kora. Ukoliko se ona ne odbacuje, na njoj se površini nalaze neravnine u obliku udubljenja i ispupčenja. Do ovoga dolazi usled toga što na deblima najstariji periferijski slojevi mrtve kore ne mogu izdržati istežanje u tangencijalnom pravcu a i usled priraštaja sekundarnog drveta i sekunderne kore, što uslovljava pucanje mrtve kore. Udubljenja su plitka, nisu mnogo široka, a ispupčenja mala.

Ukoliko su debla prava, lišaj ih svuda ravnomerno obrasta, tako da se ne vide velike razlike u pogledu pokrovnosti lišajskim naseljima između severne i drugih strana. Veća je razlika u pokrovnosti lišaja na zakošenim deblima, kod kojih je gornja strana debla naseljenija nego ostale.

*Xanthoria parietina* na deblima izvesnog drveća obrazuje guste rozete i pokrovnost lišaja na njima dostiže visok stepen. Grane takvog drveća obrasle su lišajem. Nema skoro nijedne grane na kojoj nema lišaja. Ta pokrovnost grana od strane lišaja puno puta prelazi u mestimično kontinuirane slojeve (sl. 1) i nije retkost da čitava grupa grana u nižim delovima krošnje biva u potpunosti obrasla lišajem. Lišaj je osobito čest na horizontalnim granama gde rozete delimično pokrivaju jedna drugu. Pored vegetativnih stadija lišaja nalazi se mestimično veliki broj njegovih plodonosnih tela koji daju izmenjen oblik podlozi.

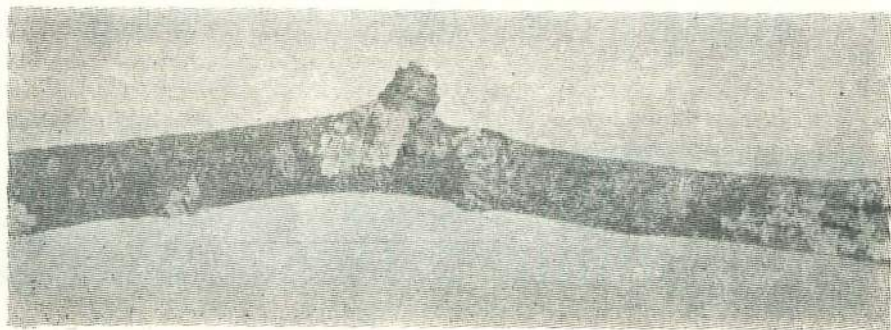
Ali, s druge strane, ima drveća na kome su rozete proređene, udaljene jedna od druge i u tom slučaju lišaj je neznatne pokrovnosti. U odnosu na prisutnost i pokrovnost lišaja između zdravog i uginulog drveća javlja se znatna





Slika 1. *Prunus domestica* ssp. *oeconomica* sa lišajem *Xanthoria parietina*.

razlika. Zdravo drvo (Sl. 2) je bez lišajskih naselja ili ako se nalaze, rozete su proređene i male pokrovnosti. Ovo je jedna od izrazitih odlika zdravog drveća. Relativno mala prisutnost i pokrovnost lišaja *Xanthoria parietina* na zdravom drveću stoji u izvesnom odnosu sa pH vrednošću podloge lišaja, odnosno sa pH vrednošću kore drveća.

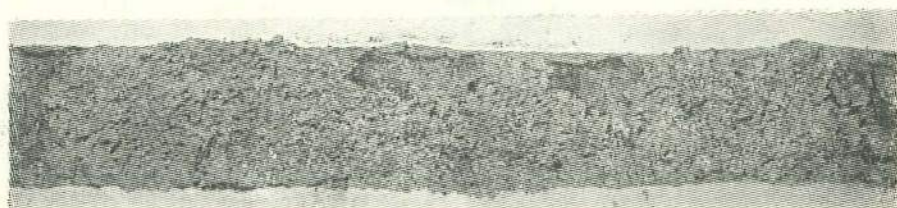


Slika 2. Rozete lišaja *Xanthoria parietina* na živoj grani vrste *Prunus domestica* ssp. *oeconomica* kod koje je vrednost  $pH=5,50$ .

Tabela 1.

| Vrsta drveća naseljena lišajem                              | pH vrednost<br>kore zdravog<br>drveća nase-<br>ljene lišajem | Površina debla<br>obrasla lišajem<br>u % | Lokalitet | Broj prouče-<br>nog drveća |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------|----------------------------|
| <i>Populus alba</i>                                         | 5,50                                                         | 30—45                                    | 4         | 5                          |
| <i>Juglans regia</i>                                        | 5,42                                                         | 20—30                                    | 12        | 8                          |
| <i>Morus alba</i>                                           | 5,50                                                         | 20—30                                    | 14        | 5                          |
| <i>Pirus malus</i>                                          | 5,52                                                         | 25—40                                    | 14        | 6                          |
| <i>Prunus avium</i>                                         | 5,48                                                         | 25—30                                    | 14        | 3                          |
| <i>Prunus domestica</i> ssp <i>oecono-</i><br><i>nomica</i> | 5,50                                                         | 20—30                                    | 14        | 8                          |
| <i>Prunus domestica</i> var <i>myroba-</i><br><i>lana</i>   | 5,09                                                         | 25—30                                    | 14        | 6                          |
| <i>Prunus domestica</i> var <i>oecono-</i><br><i>nomica</i> | 5,48                                                         | 20—30                                    | 14        | 6                          |

U odnosu na prisutnost i pokrovnost lišaja *Xanthoria parietina* uginulo drveće (sl. 3) pruža drukčiju sliku nego zdravo. Rozete su prisutne na svakom uginulom drvetu. One se vrlo često nalaze u velikom broju i velike su pokrovnosti. Na deblima i granama koje lišaj *Xanthoria parietina* naseljava u masi imaju uglavnom uginula tkiva. Podloge lišaja predstavljene korom u širem smislu reči odlikuju se određenom koncentracijom vodonikovih jona i bile su slabo kisele reakcije.



Slika 3. Rozete *Xanthoria parietina* na uginuloj grani vrste *Prunus domestica* ssp *oeconomica*, kod koje je vrednost pH=6,08.



Tabela 2.

| Vrsta drveća naseljena lišajem                | pH vrednost<br>kore zdravog<br>drveća nase-<br>ljene lišajem | Površina debela<br>obrasla lišajem<br>u % | Lokalitet | Broj prouče-<br>nog drveća |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------|----------------------------|
| <i>Populus alba</i>                           | 6,45                                                         | 90—100                                    | 1;15      | 8                          |
| <i>Juglans regia</i>                          | 6,75                                                         | 80—90                                     | 10;16     | 10                         |
| <i>Morus alba</i>                             | 6,30                                                         | 90—95                                     | 7;12      | 12                         |
| <i>Pirus malus</i>                            | 6,25                                                         | 90—95                                     | 6;10      | 8                          |
| <i>Prunus avium</i>                           | 6,35                                                         | 90—95                                     | 6;12      | 4                          |
| <i>Prunus domestica</i> ssp <i>oeconomica</i> | 6,08                                                         | 90—95                                     | 5;12      | 12                         |
| <i>Prunus domestica</i> var <i>myrobalana</i> | 5,99                                                         | 80—90                                     | 6;9       | 8                          |
| <i>Prunus domestica</i> var <i>oeconomica</i> | 6,12                                                         | 80—90                                     | 9;12      | 10                         |

Analizom podataka iz tabela 1 i 2 uočava se da je pokrovnost lišaja *Xanthoria parietina* na kori drveća u izvesnom odnosu sa pH vrednošću podloge, predstavljene korom drveća. Isto tako, uočava se i veća pokrovnost sa smanjenjem kiselosti poldoge na kojoj se razvija lišaj *Xanthoria parietina*.

Najmnogobrojnije rozete nalaze se na kori drveća koje je bez lišća, sa trulim i lako lomljivim granama. Kora takvog drveća, koje iako je po svojoj taksonomskoj pripadnosti različito, uvek je slabo kisele reakcije.

#### ZAKLJUČAK

Ispitivana je pH vrednost kore u *Populus alba*, *Juglans regia*, *Morus alba*, *Pirus malus*, *Prunus avium*, *Prunus domestica* ssp *oeconomica*, *Prunus domestica* var *myrobalana* i *Prunus domestica* var *oeconomica* i naselja lišaja na istim vrstama i varijetetima. Istraživanja su vršena na zdravim i uginulim biljkama.

Kora zdravog i uginulog drveća kisele je reakcije, ali je veće kiselosti u zdravog drveća.

Rozete *Xanthoria parietina* prisutne su na svakom uginulom drvetu, nalaze se u velikom broju i velike su pokrovnosti. Zdravo drveće je bez rozeta *Xanthoria parietina*, ili ako se nalaze, proređene su i male pokrovnosti.



Lišaj *Xanthoria parietina* je slabo acidofilan oblik i najbolje je razvijen na kori koja pokazuje slabo kiselu reakciju. Na kori takve reakcije javlja se u masi, gradi na njoj kontinuirane, zlatno žute, prostrane i relativno debele slojeve koji, kad pokrivaju veliku površinu debila i grana, daju karakterističan izgled dendroflornim elementima.

#### LITERATURA

- Bunuševac — Antić: Uticaj kultura nekih vrsta šumskog drveća na edafske uslove Deliblatske peščare, Glasnik Šumarskog fakulteta br. 3, Beograd.
- Komarnicki — Tomin — Krasilnikov: Lišainikii, bakterii i aktinomiceti, Moskva 1960.
- Košanin. N.: Deliblatski živi pesak. — Opis puta III kongresa geografa i etnografa u Jugoslaviji, Beograd. 1930.
- Kurasanov — Djačkov: Lišainikii i ih praktičeskoe ispolzovanie, Moskva, 1945.
- Kušan, F.: Flora i vegetacija lišaja severozapadnih crnogorskih planina, Zagreb 1933.
- Kušan, F.: Prodomus flore lišaja Jugoslavije, Zagreb, 1953.
- Mattick, F.: Alte und neue Probleme der Lichenologie. — Ber. deutsch. bot. Gesellsch. Bd. 64, 1951.
- Migula, W.: Kryptogamen — Flora von Deutschland, Osterreich und der Schweiz Bd. Iv Teil 1 und 2 Berlin, 1929—1931.
- Mattick, F.: Lichenes. Angler's Syllabus der Pflanzenfamilien Bd. 1. Nerlin, 1954.
- Milojević, B.: Banatska peščara, Beograd, 1949.
- Milosavljević, M.: Klimatologija, Beograd, 1951.
- Milosavljević, M.: Meteorologija, Beograd, 1965.
- Pančić, J.: Živi pjesak u Srbiji i bilje što na njemu raste, Beograd, 1863.
- Stjepanović — Veseličić, L.: Vegetacija Deliblatska peščare, Srpska akademija nauka, Beograd, 1953.
- Tešić, Ž.: Mikrobiologija šumskog zemljišta, Beograd, 1966.
- Tobler, F.: Biologie der Flechten, Berlin 1925.
- Zahlbruckner, A.: Catalogus lichenum universalis Bd. 7, 8 und 10, Berlin. 1922—1940.

#### РЕЗЮМЕ

#### О рН ВЕЛИЧИНЕ КОРЫ ДЕРЕВЬЕВ И МЕСТОНАХОЖДЕНИЯХ ЛИШАЙНИКА *XANTHORIA PARIETINA* (L.) TH. FR. НА КОРЕ ДЕРЕВЬЕВ

Исследованна рН величина коры деревьев *Populus alba*, *Juglans regia*, *Morus alba*, *Pirus malus*, *prunus avium*, *Prunus domestica* ssp *oeconomica*, *Prunus domestica* var *myrobalana* и *Prunus domestica* var *oeconomica* и местонахождения лишайника *Xanthoria parietina* на коре этих деревьев. Исследования проводились на здоровых и погибших деревьях.

В связи с поставленной задачей с марта 1967 года до февраля 1969 года неоднократно в течение года проводились исследования в Делиблатской Пещаре и в некоторых местностях Косово и южной Сербии. В южной Сербии проводились исследования большей частью вблизи вод.

Лишайник *Xanthoria parietina* на местностях, на которых проводился исследование находится на стволах и ветвях, образуя на них розетки более или менее разграниченные одни от других. Розетки бывают различной формы и величины. Лишайник собирали с 24 местонахождения. Местонахождения от 1 до 7 находятся в Делиблатской Пещаре, а на Косово от 8 до 14, с 15 по 24 в южной Сербии.

Площадь покрыта лишайником определялась только на ствалах, при чем стволы обкладывались паус-папиром на котором вчерхчением были разграничены поверхности покрытые лишайником от лишайником непокрытых. В некоторых случаях лишайником покрытую площадь определяли и субъективно. Эту площадь покрытую лишайником давали в процентах в отношении к целой поверхности ствола.

Кора здоровых и погибших деревьев является кислой реакции только эта окисляемость в большой мере содержится в здоровых деревьях. На каждом погибшем дереве находятся розетки *Xanthoria parietina* в большом количестве и занимают большую поверхность. Здоровые деревья или без розеток *Xanthoria parietina* или если они появляются, то они разбросаны и занимают маленькую площадь.

Лишайник *Xanthoria parietina* слабо кислый и лучше всего развивается на коре слабо кислой реакции. На коре такой реакции появляется в большом количестве, создавая на ней беспрерывные золотистые, большие и толстые слои, которые когда покрывают стволы и ветки, дают особый вид дендрофлорных элементам.





FERIZ D. KRASNIĆI, RADIVOJE Ž. MARINOVIĆ

## O RASPROSTRANJENJU TETRASPORA ULVACEA KÜTZ. U VODAMA BELOGA DRIMA NA KOSOVU

### UVOD

Za poznavanje florističkog sastava alga naših kopnenih voda, sem dela „Alga Slovenije” od J. Lazara, drugih nema. U delu „Alge Slovenije” nalaze se podaci o florističkom sastavu alga u vodama Slovenije. Ali alge konstatovane u vodama Slovenije naseljavaju i vode drugih predela naše zemlje. Od alga roda *Tetraspora* u vodama Slovenije nađene su četiri vrste i to: *Tetraspora lacustris*, *Tetraspora limnetica*, *Tetraspora lubrica* i *Tetraspora gelatinosa*. *Tetraspora ulvacea* međutim uopšte nije konstatovana. Prema svojim morfološkim karakteristikama *Tetraspora ulvacea* najsličnija je vrsti *Tetraspora gelatinosa*.

U vodama Srbije ispitivali smo alge u jednom delu istočne Srbije (okolina Negotina), severne Srbije (okolina Beograda), zapadne Srbije (okolina Valjeva) kao i na Kosovu (okolina Drenice). U navedenim predelima vršena su ispitivanja većeg broja stajaćih, sporotekućih i tekućih voda. Izvesne tekuće vode fikološki su ispitivane od izvorišta pa do samog njihovog ušća u kakvu veću reku. Međutim u navedenim predelima, kao i uopšte u vodama Srbije, prema dosadašnjim istraživanjima, alga *Tetraspora ulvacea* takođe nije konstatovana.

U ovom radu iznose se rezultati ispitivanja o algi *Tetraspora ulvacea* konstatovane u vodama Beloga Drima na Kosovu u blizini naselja Vrbnica. Ispitivanja su vršena u letnjem periodu 1968. godine.

Proučavan je svež materijal na mestu prikupljanja. Posle toga radi detaljnije obrade, fiksiran je vođeni rastvor formalina. Detaljna obrada prikupljenog materijala izvršena je pri Biološkoj katedri Filozofskog fakulteta u Prištini i pri Botaničkoj katedri Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Fiksirani materijal čuva se pri Biološkoj katedri u Prištini i Botaničkoj katedri u Beogradu.

### MESTO (LOKALITET) GDE JE ALGA KONSTATOVANA I KARAKTERISTIKE TIH VODA

Alga *Tetraspora ulvacea* Kütz. konstatovana je u vodama Beloga Drima, na Kosovu kod naselja Vrbnica na udaljenosti 3—4 km. od Albanske granice. Naseljava lokalitete u vodama Belog Drima koji nisu pod direktnim

ударом glavnog toka reke. Naročito je u masi na plitkim sporotekućim delovima reke, kao i na onim gde je njen tok brz, dubine oko 10—15 cm, gde tanki slojevi vode pokrivaju skeletnu podlogu za koju je alga pričvršćena. Ovakvi razliveni slojevi rečne vode više se zagrevaju u toku letnjeg perioda u odnosu na ostali deo vodene mase. Ti slojevi bistri su, providni do dna i stalnog su pravca kretanja. U njima golim okom nisu konstatovane veće partikule — ni neorganske ni organske prirode. Kroz njih u velikoj meri prodire nesmetano sunčeva svetlost. Uopšte, vode tog dela Belog Drima koje su naseljene (algom) *Tetraspora ulvacea* nisu mnogo hladne, pošto taj predeo najviše podleže mediteranskim uticajima koji dolaze od Jadranskog mora. To pokazuje i kopnena vegetacija ovih predela koja je sastavljena uglavnom od termofilnih među kojima ima i eumediteranskih. Takvi floristički elementi predstavljeni višim biljkama jasno karakterišu ove predele. Više biljke van svake sumnje od značaja su za naseljavanje i razviće alga svoje neposredne okoline, ali isto tako i na jedne i na druge faktori spoljašne sredine mogu na isti način da utiču. Između viših biljaka i alga u tom pogledu može uopšte da se ne javi nikakva razlika. Sa druge strane svaki faktor spoljašne sredine na biljke (vrste) može uticati neposredno ili posredno od kojih je drugo u svakom slučaju složenije.

U vodama ovog dela Belog Drima konstatovane su samo sesilne stadije alge utvrđene za stenovite podloge koje su uglavnom silikatne prirode. Alga je utvrđena za veće i teže pomerljive stenovite podloge. Sitne i lake stenovite podloge nestabilne su pa ih vodena masa reke lako pomera sa jednog na drugo mesto. Na navedenom lokalitetu pričvršćen je veliki broj meškolikih galernih tela alge i jedno od drugog nisu mnogo udaljena. Nenaseljeni delovi vodenog dna između galernih meškolikih tela neznatnih su površina.

Pod dejstvom kretanja vode meškolika galerna tela upravljena su svojim slobodnim delovima u pravcu kretanja vode pa su svojim velikim brojem mestimično davali obeležje tim lokalitetima Beloga Drima. Na slobodnim delovima galernih meškolikih tela, u vezi sa pojačanom fotosintezom, nalazi se veliki broj gasnih loptastih mehurića. Upadljiva je slika koju pružaju mnogobrojni mehurići za vreme sunčanih dana. Otkinuta galerna meškolika tela nisu konstatovana jer se verovatno vodenim strujama brzo odnose. Dužina meškolikih galernih tela nejednaka je iznosi 8—12 santimetara i međusobno, po drugim morfološkim karakteristikama, nerazlikuju se.

Morfološki karakteri na prikupljenom materijalu bili su takvi da je prema njima bilo moguće relativno lako određivanje vrste. Zato je služio svež kao i vodenim rastvorom formalina konzervisan materijal i između njega, za upotrebu u te svrhe nije bilo razlike. Javljala se samo izvesna razlika u obliku ćelija između tipske vrste opisane u Pašerovom delu (Pascher, s *Susswasser-Flora* H. 5) na strani 41 i one što je prikupljena iz voda Drima. Na materijalu prikupljenog iz Drima, pored ćelija loptastog oblika u galernoj masi, iako u manjem broju, nalaze se i ćelije elipsoidnog oblika. Sve ćelije u jednoj grupaciji od četiri ćelije — tetradi — su elipsoidne. Broj tako građenih grupacija prema onim grupacijama sagrađenim od loptastih ćelija znatno je manji. *Tetraspora ulvacea* poznata je kao alga stajaćih voda. To što ona naseljava tekuće vode Beloga Drima čini izvesno ostupanje.

Konstatovanjem ove biljne vrste u vodama pomenute reke upotpunjuju se podaci o nalazištima vrsta *Tetraspora* uopšte u našoj zemlji.







Razjašnjenje ovog pitanja zahteva dalja izučavanja. Ali iako su izučavanja u osnovi imala karakter preliminarne upoznavanja ovog pitanja, ipak su bila dovoljna da se izvedu izvesni zaključci u vezi sa naseljavanjem alge *Tetraspora ulvacea* Kütz. u vodama Belog Drima na Kosovu.

#### L I T E R A T U R A

- Baraškov K. G.: Hemija vodorosli, Moskva, 1963.  
Gessner F.: Hydrobotanik I. Berlin, 1955.  
Kloter H.: Grünalgen, Stuttgart, 1957.  
Komarek — Ettl: Algologische Studien, Prag, 1958.  
Krasnići F.: Šumska vegetacija brdskog regiona Kosova i Metohije (teza).  
Lazar J.: Alge Slovenije, Ljubljana, 1962.  
Pascher's Süsswasser — Flora von Deutschlands, Österreich und d. Schweiz, Heft 5.  
Migula W.: Kryptogamen — Flora von Deutschland, Österreich und d. Schweiz, Band II, Algen, Teil I.  
Ruttner F.: Grundriss d. Limnologie, Berlin, 1940.

#### S u m m a r y

#### ON THE PROPAGATION OF *TETRASPORA ULVACEA* KÜTZ. IN THE WATERS OF BELI DRIM

*Tetraspora ulvacea* Kütz. is established only in the waters of Beli Drim in Kosovo near the Albanian frontier. The investigations of the waters populated with this alga are made during the summer of 1968.

The waters populated with *Tetraspora ulvacea* alga are relatively warm, clear, transparent to the bottom; they flow slowly and follow a constant direction. No larger particles, either organic or inorganic, could have been established on them with naked eyes.

The land regions, in the vicinity of the waters populated with *Tetraspora ulvacea* alga, are populated by certain number of higher thermophile plants.

Such floristic elements represented by higher plants give an obvious characterization of climatic conditions of these regions.

Does the settlement of this alga depend on the thermal conditions of its surroundings or on other conditions remains still an open question. The elucidation of this question needs further investigations.

## NJI GJENERALIZIM I INTEGRALIT (AP).

(Ymer MEROVCI, Prishtinë)

Në skemën klasike të teorisë së integraleve konstatoher se një ndër kushtet esenciale në problemin e gjeneralizimit të kuptimit të integralit qëndron në fuqinë e tij gjat shqyrtimit të funksionit primitiv. Ai është thjeshti problem i mbrendshëm i teorisë së funksioneve reale.

Në lidhje me të kam definue një integral të ri dhe shenue me  $(\mathcal{AP})$ , i cili përgjithëson atë të DENJOY-PERRON-it [1], [2], si edhe të BURKILL-it [3], për të cillët përdoren shenjat  $(D)$  ose  $(P)$  dhe  $(AP)$ .

Ky i fundit mandej ka përkufizue integralin  $(CP)$ , [3] i cili më vonë ka qenë i hulumtuem në punimet e G. SUNOUCHI-M. UTAGAWA [4], Y. KUBOTA [5], e t.j.

Gjeneralizimi i një lloj integracioni mund të qëndrojë në aspekte të tjera. Konkretisht, hapsina e të gjitha funksioneve  $(R)$ —integabile në segmentin  $[a, b]$  me metrikë

$$d(f, g) = (R) \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad (*)$$

nuk është complete, prandaj formulohet pyetja: *çfarë lloj operacioni të integrimit duhet definue n'anën e djathtë të relacionit (\*) ashtu që hapsina në fjalë t'i përmbajë të gjitha elementat kufitarë, d. m. th. të jetë e kompletueme.*

Dihet se zgjidhja e problemit mund të bahet vetëm me përgjithësimin e integralit të Riemann-it n'atë të Lebesgue-ut. Shikimet e tilla do të jenë jashtë këtij punimi.

Për definimin e integralit  $(\mathcal{AP})$  m'asht dashtë edhe mëtej të gjeneralizoj kuptimin e funksioneve të vijueshme ose të derivueshme, në mënyrë të zakonshme si edhe atyne në mënyrë aproksimative (asimptotike) dhe klasën në fjalë e kam shënue respektivisht me  $(\mathcal{AC})$  dhe  $(\mathcal{AD})$ . Funksionet e klasës  $(\mathcal{AC})$  dhe  $(\mathcal{AD})$  nuk janë tepër të përgjithsueme, sepse gjindën brënda klasës së funksioneve me vijueshmëni *preponderante* si edhe atyne me derivacion *preponderant* [1], kurse për këto të fundit asht vërtetue [1] se janë inkluzive në klasën e parë të Baire-ut, njenën anë dhe në anë tjetër nuk e lëshojnë asnjë vleftë në mes të dy çfardo vleftash nga fusha e vleftave të funksionit të konsideruem. Vetija e përmendum ma parë asht prezente te funksionet me vijuesh-

mëni të zakonshme, derivacionet e zakonshme (Darboux, 1875) si edhe në ato me kuptim preponderant [1].

#### DENDËSITË E BASHKËSISË LINEARE

Le të jetë  $h > 0$  dhe

$$R(E, x, h) = \frac{m[E \cap (x, x+h)]}{h}$$

*Dendësitë ekstreme të djathta*  $\Delta_d E_x$  dhe  $\delta_d E_x$  të bashkësisë  $E$  në pikën  $x$  definoen me

$$\begin{aligned} \Delta_d E_x &= \overline{\lim} R(E, x, h) \\ \delta_d E_x &= \underline{\lim} R(E, x, h) \end{aligned} \quad (h \rightarrow 0)$$

Në mënyrë simetrike përkufizohen *dendësitë ekstreme të majta*  $\Delta_g E_x$  dhe  $\delta_g E_x$ . E thanun në mënyrë ma precize, dendësitë  $\Delta_d$ ,  $\delta_d$ ,  $\Delta_g$  dhe  $\delta_g$  përfaqësojnë të katër numrat e Dini-ut të funksionit të masës së bashkësisë  $E$  e shprehun me  $\mu(x) = [E \cap (a, x)]$  në pikën  $x$ .

Në qoftë se i përdorim shenjat

$$\overline{D}_x E = \max \{ \Delta_d E_x, \Delta_g E_x \}$$

$$\underline{D}_x E = \min \{ \delta_d E_x, \delta_g E_x \}$$

atëherë mund të konstatohet se vlen

$$\underline{D}_x E + \overline{D}_x CE = \underline{D}_x CE + \overline{D}_x E = 1,$$

ku  $CE$  shënon komplementin e bashkësisë  $E$  në segmentin e konsideruëm.  $\underline{D}_x E$  dhe  $\overline{D}_x E$  quhen *dendësi minimale* dhe *maksimale* të bashkësisë  $E$  në pikën  $x$ .

Pika  $x$  quhet *pikë dendesije* ose e *dispersionit* (rrallimit) varësisht a vlen  $\underline{D} E = \overline{D} E = 1$  apo  $\underline{D} E = \overline{D} E = 0$ .

#### PËRKUFIZIMI I KLASAVE $(AC)$ DHE $(AD)$ .

Mund të konstruktohet funksioni në mënyrë qi të mos egzistoi vlefëta kufitare e tij jo vetëm kur argumenti shkon kah pika e konsiderueme  $\xi$  në mënyrë të vijueshme, por edhe në rast kur tentimi kryhet në mënyrë aproksimative d. m. th. nepër bashkësi, e cila në  $\xi$  e ka dendësinë 1.

N'anë tjetër mund të ekzistojë bashkësia  $E$  me dendësi minimale në pikën  $\xi$  ma të madhe se  $\frac{1}{2}$  në mënyrë që të ekzistojë kufini



$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = A, \quad (x \in E) \quad (*)$$

ku  $A$  asht numër real. Pra mund të formulohet.

**Def. 1.** — Në se vlen relacioni (\*) së bashku me vrejttjet e sipërme atëherë limesin te (\*) do t'a quejmë  $\mathcal{A}$ -limes.

$\mathcal{A}$ -limesi asht me randësi fundamentale për teorinë e integralit ( $\mathcal{AP}$ ), sepse me te drejt për së drejti dhe në mënyrë natyrore përgjithsohen nën-dhe mbi-funksionet, të cilat i kanë konsiderue Perron-i, Burkill-i e të tjerët.

Prej def. 1 nuk asht fështirë të nxirret

$$\begin{aligned} \underline{\lim} f(x) &\leq \underline{\lim} ap f(x) \leq \mathcal{A} - \underline{\lim} f(x) \leq \\ &\leq \mathcal{A} - \overline{\lim} f(x) \leq \overline{\lim} ap f(x) \leq \overline{\lim} f(x). \end{aligned}$$

**Dëf. 2** — Për funksionin  $f(x)$  do të themi se asht  $\mathcal{A}$ -i vijueshëm në pikën  $x_0$ , në se për çdo numër  $\varepsilon > 0$ , i dhanun qysh përpara, bashkësija

$$E(x_0, \varepsilon) = \{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

e ka dendësinë miniamle në pikën  $x$  ma të madhe se  $\frac{1}{2}$ , d. m. th.

$$\frac{1}{2} < \lim_{o \leftarrow h \rightarrow o} \frac{m[E(x_0, \varepsilon) \cap (x_0 - h, x_0 + h)]}{2h} < 1$$

Në këte rast mund të vërtetohet ekzistenca e një bashkësije  $E$  me  $\underline{D}_x E > \frac{1}{2}$  ashtu që funksioni  $f(x)$  asht i vijushëm ( $\mathcal{A}$ -i vijushëm) relativisht me  $E$  në pikën  $x$ .

$$\text{Do të përdorim shenjin } VR(f, x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Dëf. 3.** — Le të jetë funksioni  $f(x)$  i definuem në segmentin  $[a, b]$ . Në se ekziston bashkësija  $E \subset [a, b]$  në mënyrë që

$$\lim_{x \rightarrow x_0} VR(f, x_0, x) = \underline{AD} f(x_0) \quad (x \in E, x \neq x_0)$$

ku  $\underline{D}_x E > \frac{1}{2}$ , atëherë numrin  $\underline{AD} f(x_0)$  do te quejmë  $\mathcal{A}$ -derivacion i poshtëm i funksionit  $f(x)$  në pikën  $x$ .

$\mathcal{A}$ -derivacioni i sipërm definohet në mënyrë simetrike.

Në qoftë se  $\overline{AD} f(x_0) = \overline{AD} f(x_0)$  atëherë do të themi se funksioni  $f(x)$  është  $\mathcal{A}$ -i derivueshëm në pikën  $x$  relativisht me bashkësinë  $E$ , e cila e ka dendësinë minimale në  $x$  më të madhe se  $\frac{1}{2}$ .

Teorema që vijon është themelore, me anë të cilës m'është mundësue perkufizimi i integralit ( $\mathcal{AP}$ ) i bazuem esencialisht në idenë e  $\mathcal{A}$ -limesit.

**Teorema 1.** — Në qoftë se funksioni  $f(x)$  është i definuem,  $\mathcal{A}$ -i vijueshem në segmentin  $[a, b]$  dhe në çdo pikë të tij vlen  $\overline{AD} f(x) \geq 0$ , atëherë ai është jo i zvoglueshëm dhe vlen  $f(a) \leq f(b)$ .

**Vërtetim.** — Prej supozimit  $\overline{AD} f(x) \geq 0$  rrjedh se për çdo  $\varepsilon > 0$  të gjithë numrat e Dini-ut të masës së bashkësisë

$$E = \{x : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq -\varepsilon, a < x\}$$

janë më të mëdhej se  $\frac{1}{2}$ . Pra ekziston pika  $x_1$  (ku është  $a < x_1$ ) ashtu që relacioni

$$f(x) - f(a) \geq -\varepsilon(x - a)$$

vlen për të gjitha pikat  $x \in E \cap (a, x_1)$  me kusht

$$\frac{m[E \cap (a, x_1)]}{x_1 - a} \geq \lambda,$$

ku  $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  është numër i fiksuem, kurse ana e majtë e relacionit të fundit paraqet dendësinë mesatare të bashkësisë  $E$  në intervalin  $(a, x_1)$ .

Specialisht vlen

$$f(x_1) - f(a) \geq -\varepsilon(x_1 - a)$$

Nëse pika  $x_1$  gjindet në  $b$  teorema është e vërtetueshme, në të kundërtën me  $x_1$  do të veprojme sikur më parë me  $a$ . Në qoftë se mbas një numri të kufizuem operacionesh nuk mbërrijmë në pikën  $b$  atëherë do të kemi një varg pikash  $x_1, x_2, \dots$ , ashtu që dendësia mesatare e bashkësisë  $E$  në interval  $(x_i, x_{i+1})$  nuk është më e vogël se  $\lambda$  dhe njëkohësisht është

$$f(x_n) - f(a) \geq -\varepsilon(x_n - a)$$

Vlen  $\sup \{x_1, x_2, \dots\} = \xi = b$ , sepse për  $\xi < b$  do të gjindesh pika  $\xi' \in (\xi, b)$  ashtu që

$$\frac{m[E \cap (\xi, \xi')]}{\xi' - \xi} \geq \lambda$$

prej kah  $\xi \neq \sup \{x_1, x_2, \dots\}$ . Pra,  $\xi = b$ .

Mbasi funksioni asht  $\mathcal{A}$ -i vijushëm vlen

$$f(b) - f(a) \geq -\varepsilon(b - a)$$

për çdo  $\varepsilon$  dhe kur  $\varepsilon \rightarrow 0$  do të kemi  $f(a) \leq f(b)$ , që edhe asht kërkuar të vërtetohet.

**Def. 4.** — Le të jetë  $f(x)$  funksion i matshëm dhe gati gjithkund i fundshëm. Si *majorantë-mbifunksion* dhe *minorantë-nënfunksion* të funksionit të dhanun  $f(x)$  nënkuptojmë respektivisht funksionet  $U(x)$  dhe  $V(x)$  të cilët janë  $\mathcal{A}$ -të vijueshëm dhe për çdo  $x \in [a, b]$  plotësohen kushtet

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $U(a) = 0$                    | 1'. $V(a) = 0$ .                  |
| 2. $\overline{ADU}(x) \geq f(x)$ | 2'. $\overline{ADV}(x) \leq f(x)$ |
| 3. $\overline{ADU}(x) > -\infty$ | 3'. $\overline{ADV}(x) < +\infty$ |

**Teorema 2.** — Ndryshimi  $W(x) = U(x) - V(x)$  asht funksion jo i zvoglueshëm në segmentin  $[a, b]$ .

**Vërtetim.** — Së pari do të vërtetojmë relacionin  $\overline{ADW}(x) \geq 0$ .

Le të jetë  $x$  një pikë arbitrare e segmentit  $[a, b]$ , kurse  $E$  bashkësi me dendësinë minimale në pikën  $x$  më të madhe se  $\frac{1}{2}$ . Vlen

$$VR(W, x, x_n) = VR(U, x, x_n) - VR(V, x, x_n)$$

Na mundemi me zgjedhë një seri vargu  $x_n \in E$  ashtu që  $VR(W, x, x_n)$  shkon kah  $\overline{AD}f(x)$ , kur  $n$  shkon kah  $\infty$ . Vargjet  $\{VR(U, x, x_n)\}$  dhe  $\{VR(V, x, x_n)\}$  nuk janë doemos konvergjente. Në vargun  $\{x_n\}$  ekziston një tjetër parcial  $\{x_{n_k}\}$  dhe në këtë të fundit një seri  $\{x_{n_{k_v}}\}$  ashtu që shprehjet  $\{VR(U, x, x_{n_{k_v}})\}$  dhe  $\{VR(V, x, x_{n_{k_v}})\}$  konvergjojnë kur  $k$  dhe  $v$  shkojnë kah  $\infty$ . Pra, do të kemi

$$\lim_v VR(W, x, x_{n_{k_v}}) = \overline{AD}W(x) = \lim_v VR(U, x, x_{n_{k_v}}) - \lim_v VR(V, x, x_{n_{k_v}})$$

Në se merren parasysh relacionet



$$\underline{AD} U(x) \leq \lim_{\nu} VR(U, x, x_{n_{k_{\nu}}})$$

$$\overline{AD} V(x) \geq \lim_{\nu} VR(V, x, x_{n_{k_{\nu}}})$$

si edhe  $\underline{AD}(-V) = -\overline{AD}V$ , do të kemi

$$\underline{AD}(U - V) \geq \underline{AD} U - \overline{AD} V \quad (*)$$

Prej kushteve 3 dhe 3' të def. 4 konkludojmë se  $\underline{AD}U$  dhe  $\overline{AD}V$  nuk mundën me marrë vlefte pabarim të mëdha të të njëjtës shenj për asnjë  $x$ , ashtu që ndryshimi n'anën e djathtë të (\*) ka kuptim për çdo  $x$ .

Prej kushteve 2 dhe 2' të def. 4 rrjedh se ndryshimi në fjalë është jonegativ d. m. th.  $\underline{AD}(U - V) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

Gjindemi pra në kushtet e zbatimit të Teoremes 1, prej kah konkludojmë se  $U(x) - V(x)$  është funksion jo i zvogluar, shpesh.

**Rrjedhim.** — Do të kemi

$$[U(b) - V(b)] - [U(a) - V(a)] \geq 0$$

ose

$$V(b) \leq U(b) \quad (**)$$

Relacioni (\*\*) flet mbi një veti me randësi të bashkësisë të së gjitha mbi- dhe nën-funksioneve të një funksioni të dhanun:

*Vlefte e një çfarëdo mbi-funksioni  $U$  në pikën  $b$  nuk është më e vogël se vlefte po ashtu e çdo nën-funksioni  $V$  në pikën  $b$ .*

#### PËRKUFIZIMI I INTEGRALIT ( $\mathcal{AP}$ )

Le të jetë i definuem në segmentin  $[a, b]$  funksioni  $f(x)$ , për të cilin ekziston së paku një majorantë  $U$  dhe një minorantë  $V$  si edhe

$$\sup \{V(b)\} = \inf \{U(b)\} = J$$

Në qoftë se është  $J \neq \pm \infty$ , do të themi se funksioni  $f(x)$  është ( $\mathcal{AP}$ ) — integrabil në segmentin  $[a, b]$  dhe si vleftë të integralit ( $\mathcal{AP}$ ) do të marrim numrin  $J$ , kurse si shenj ( $\mathcal{AP}$ )  $\int_a^b f(x) dx$ .

Në bazë të përkufizimit të integralit ( $\mathcal{AP}$ ) si edhe jobarazisë (\*\*) e arsyeshme është që numrat  $U(b)$  dhe  $V(b)$  të quhen respektivisht *integral i sipërm* dhe *i poshtëm* i funksionit të konsideruem.

Mandej, po ashtu prej definicionit të integralit ( $\mathcal{AP}$ ) rrjedh një kriterium i dobishëm për ( $\mathcal{AP}$ ) — integritetin e funksionit të konsideruem:

*Funksioni  $f(x)$  asht (AP) — integrabil në segmentin  $[a, b]$ , në të cilin asht i dhanun, atëheer dhe vetëm atëherë, në qoftë se për çdo  $\varepsilon > 0$  mund të konstruktohet së paku një mbi-funksion  $U$  dhe një nën-funksion  $V$  ashtu që të vlejë jobarazia  $U(b) - V(b) < \varepsilon$ .*

Po ashtu vlen

$$V(b) \leq (AP) \int_a^b f(x) dx \leq U(b).$$

(vazhdon)

## LITERATURA

1. Denjoy, A.: I) Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, J. de Math., (7) 1 (1915) 105—240, II) Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue C. R. Ac Sc. Paris 154 (1912) 859—862. III) Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables, Ann. d Ec. Norm. Sup., 33 (1916) 127—222 et 34 (1917).
2. Perron, O.: Über den integralbegriff, Sitzber. Heidelberg. Akad. wiss., 16 (1914) 1—16.
3. Burkill, J. C.: A) The approximately continuous Perron integral Math. Zeit., 34 (1931), 270—278,  
b) The Cesàro-Perron integral, Proc. Lond. Math. Soc., 34 (1932), 314—322.
4. Sunouchi, G. — Utagawa, M.: The generalized Perron integrals, Tohoku Math. Jour., 1 (1949) 95—99.
5. Kubota, Y.: On the Definition of Cesàro-Perron Integrals Tôhoku Math. J., 11 (1959), 267—270.

## RESUME

Dans ce travail je définis un procede nouveau d'intégration qui généralise celle de Denjoy—Perron et Burkill et je la nomme intégrale (AP).

Ma définition est basée essentiellement sur la méthode de Perron. A savoir, je généralise la notion de limes en conesiderent des ensembles d'épaisseur minimale plus grande que  $\frac{1}{2}$

J'expliquerai l'application et les propriétés de l'intégrale dans un autre travail qui suit,





EJUP HAMITI

## DISA KUPTIME DHE TEOREMA TE GJEOMETRIS METRIKE

Në këtë punim do të bëhet fjalë për disa kuptime themelore dhe do të vërtetohen disa teorema te gjeometris metrike.

Bashkësija e elementeve te çfardoshem, në mënyrë që përçdo dy element të kësaj bashkësie është përkufizuar largësija (distanca) ne mes tyre është lëndë me të cilën merret gjeometria metrike. Bashkësija e till quhet hapësirë metrike kurse elementet e sajë quhen pikat e hapsires. Prandaj hapësirë metrike quhet bashkësija e pikave në të cilën per çdo dy pika  $X$  dhe  $Y$  është përkufizuar funksioni

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X) \geq 0 \quad \text{dhe} \quad \rho(X, X) = 0.$$

Zakonisht shqyretohen vetëm ato hapësira në të cilat për funksionin  $\rho$  vlen aksioma e trekanshit:

$$\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z).$$

Funksioni  $\rho$  quhet funksioni i hapsires: vlefata e tijë quhet largësija në mes të pikave përkatese.

Në hapsiren metrike  $R$  në mënyrë përkatëse merren kuptimet themelore topologjike: rrethina e pikes, konvergjenca e vargut, bashkësit e mbyllura e të qelura, vlefata kufitare, rfigurimi i vijueshëm, funksioni i vijueshëm etj. Kështu psh. rrethinë e pikës  $a$  quhet çdo bashkësi  $M \subset R$ , e cila e permban piken  $a$  së bashku me të gjitha pikat ne largesin  $\rho$  nga pika  $a$ . Per vargun  $x$  themi se konvergjon (anon) kah  $x$  në qofte se  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$  kur  $n \rightarrow \infty$ .

Perkufizimi 1. Lakorjja  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq i$ , quhet rfigurimi i vijueshëm segmentit të mbyllur  $[0,1]$  në hapsiren  $R$ .

Gjatësija e lakores.

Le të jet dhën rfigurimi i vijueshem  $X(t)$  i segmentit te mbyllur  $0 \leq t \leq 1$  në hapsirën  $R$ , dmth. le të jet dhën lakorka  $X(t)$  e cila bashkon pikat  $X(0)$  dhe  $X(1)$ . Pikat  $X(0)$  dhe  $X(1)$  quhen skejet e lakores. Për lakoren e till thuhet se është dhën në mënyrë parametrike. Vleftave të ndryshme te parametrin  $t$  mund të ju përgjigjen te njëjtat pika  $X(t)$ . Intervali  $0 \leq t \leq 1$

zbërthehet në komponente  $k_i$  sejciles prej të cilave ju pergjigjet e njejta pikë  $X(t)$ . Këto komponente janë pika ose segmente të mbyllur nga intervali  $[0,1]$ .

Per dy paramterizime  $X(t)$  dhe  $Y(s)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ) do të themi se janë ekuivalente simbas përkufizimit, në qoftë se në mes të komponenteve  $k_i$  dhe  $k_s$  mund të vëhet maredhnye reciproke uniforme në mënyre që

$$X(k_i) = Y(\varphi(k_s)).$$

Le të jet  $L$  lakore në  $R$  dhe  $X(t)$  le të jet parametrizimi i sajë ( $0 \leq t \leq 1$ ) Po e ndajme intervali  $[0,1]$  me anen e pikave  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n = b$  në  $n$ -intervale. Po e formojme shumen

$$\sum_{i=1}^n (X_{i-1}, X_i) \quad (1)$$

e vargut të largësive në mes të pikave të njimbasnjishme  $X_i = X(t_i)$ .

Përkufizimi 2. Gjatesija e lakores quhet kufirii sipërm i shumës (1) për të gjitha ndarjet e intervalit  $[0,1]$

$$s(L) = \sup_i \sum_{i=1}^n (X_{i-1}, X_i) \quad (2)$$

Nga përkufizimi drejtë për së drejti rrjedh se gjatësija e lakores nuk mvaret nga parametrizimi. Pra mund të thuhet se gjatësija e karakterizon lakoren.

Ne qofte se  $s(L) < \infty$  lakoren equajmë rektificibile.

Do të paraqesim tani disa veti themelore te lakoreve rektificibile.

**Teorema 1.** Në qoftë se lakorja rektificibile është ndar në një numër të fundëm lakoresh, atëherë sejcila prej këtyre lakoreve është lakore rektificibile dhe gjatësija e lakores është e barabartë me shumen e gjatësive të këtyre lakoreve.

**Vërtetimi.** — Lakorka  $L$  le të jet nda me piken  $C$  në dy lakore  $L_1$  dhe  $L_2$ . Gjatësija e lakores është kufiri i sipërm i shumës (1) për të gjitha ndarjet e lakores  $L$  me pikat  $X_i$ . Në mnyrë analoge përkufizohen gjatësit e lakoreve  $L_1$  dhe  $L_2$  të cilat piken  $C$  e kanë të përbashket. Duke aktuar gjatësin e lakores  $L$ , pika  $C$  mundet por nuk është e domosdoshme me qenë pikë e ndarjes, ndërsa në rastin e caktimit të gjatësis së lakoreve  $L_1$  dhe  $L_2$  pika  $C$  është me doemos pikë e ndarjes. Prej ketu rrjedh se mundësija për caktimin e pikave të ndarjes në rastin e parë është më e madhe se sa në rastin e dytë. Prandaj, kufiri i sipërm i shumave (1) në rastin e parë nuk mund të jet më i vogël se sa në rastin e dytë, pra

$$s(L) \geq s(L_1) + s(L_2) \quad (3)$$

Le të jet  $\varepsilon > 0$ , dhe  $X_i$  le të jen aso pika të ndarjes të lakores  $L$  për të cilat është

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_{i-1}, X_i) > s(L) - \varepsilon. \quad (4)$$

Pika  $C$  le të jet ne mes të pikave  $X_{k-1}$  dhe  $X_k$ . Ne bazë të aksiomes së trekanshit do të kemi

$$\rho(X_{k-1}, X_k) \leq \rho(X_{k-1}, C) + \rho(C, X_k) \quad (5)$$

prandaj do të jet edhe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho(X_{i-1}, X_i) &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \rho(X_{i-1}, X_i) + \rho(X_{k-1}, C) + \rho(C, X_k) + \\ &+ \sum_{i=k+1}^n \rho(X_{i-1}, X_i). \end{aligned}$$

Nga përkufizimi i gjatësisë rrjedh

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_{i-1}, X_i) \leq s(L_1) + s(L_2) \quad (6)$$

Nga (4) dhe (5) kemi

$$s(L) - \varepsilon \leq s(L_1) + s(L_2) \quad (7)$$

dhe për shkak se  $\varepsilon$  mund të merret i vogël në mënyrë të çfardoshme

$$s(L) \leq s(L_1) + s(L_2) \quad (8)$$

Ne fund nga (3) dhe (8) rrjedh

$$s(L) = s(L_1) + s(L_2).$$

Ne mënyre analoge vërtetohet se teorema vlen për një numër të fundëm lakorësh

**Teorema 2.** Gjatësija  $s(t)$  e harkut të lakores në mes të  $X(o)$  dhe  $X(t)$  është funksion monoton (jozbrites) i parametrin  $t$ ,



**Vërtetimi.** Nga teorema 1. rrjedh se gjatësia e harkut  $s(t)$  prej pikes  $X(o)$  deri në piken  $X(t)$  është funksion monoton i parametrut  $t$ . Prandaj që të vërtetojmë vijueshmërin e funksionit  $s(t)$  mjafton të vërtetohet se për çdo  $t$  dhe  $\varepsilon > 0$  egziston  $\delta > 0$  në mënyrë që

$$s(t + \Delta t) - s(t) < \varepsilon \quad (9)$$

ne atë moment që  $0 \leq \Delta t \leq \delta$ .

Te supozojmë se për ndonjë  $t = T$ , vetija e permendur nuk vlen. Në atë rast egziston  $\varepsilon > 0$ , ashtu që për  $\Delta t > 0$  të çfaridoshem do të kemi

$$s(T + \Delta t) - s(T) \geq \varepsilon. \quad (10)$$

Meqenëse funksion  $s(t)$  është monoton, relacioni (9) vlen për çdo  $\Delta t > 0$ . Për pika të ndarjes po i marrim ato pika  $X_i$  të tilla që gjatësia e lakores  $s(L) = s(1)$  dhe të vlej

$$s(1) < \sum_{i=1}^n \rho(X_{i-1}, X_i) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

Simbas aksiomes së trekanshit duke i shtuar pika të reja shumë (11) ajo vetem që rritet, prandaj duke shtuar pika të reja të ndarjes mund të marrim për pika të njëmbasnjishme pikat  $X_k = X(t)$  dhe  $X_{k+1} = X(T + \Delta t)$  me që rast  $\Delta t$  e zgjedhim ashtu që

$$\rho(X_k, X_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

Në këtë mënyrë lakorja është ndare në tre harqe të cilët ju përgjigjen intervaleve.  $[0, T]$ ,  $[T, T + \Delta t]$ ,  $[T + \Delta t, 1]$ . Gjatësit e këtyre harqeve simbas teoremes 1 janë respektivisht  $s(T)$ ,  $s(T + \Delta t) - s(T)$ ,  $s(1) - s(T + \Delta t)$ . Shuma e këtyre gjatësive është e barabarët me gjatësin e lakores  $s(1)$ . Me këtë rast simbas përku-fizimit të gjatësis së harkut do të jet

$$s(T) \geq \sum_{i=1}^k \rho(X_{i-1}, X_i) \text{ dhe}$$

$$s(1) - s(T + \Delta t) \geq \sum_{k=i+1}^n \rho(X_{i-1}, X_i)$$

prandaj nga (10) rrjedh

$$s(1) < s(T) + \rho(X_k, X_{k+1}) + [s(1) - s(T) - s(T + \Delta t)] + \frac{\varepsilon}{2}$$

Prej këtu

$$s(T + \Delta t) - s(T) < \rho(X_k, X_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nga relacioni i fundit dhe relacioni (11) rrjedh se

$$s(T + \Delta t) > s(T)$$

që është në kundërshtim me relacionin (10).

**Perkufizimi 3.** — për vargun e lakoreve thuhet se konvergjon kah lakorja  $L$ , në qoftëse për lakoret  $L_n$  dhe  $L$  mund të zgjedhet parametri  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), ashtu që për çdo  $\varepsilon > 0$  mund të caktohet  $N(\varepsilon)$  në mënyrë që  $\rho[X_n(t), X(t)] < \varepsilon$  për çdo  $t$  dhe  $n > N(\varepsilon)$ .  $X_n(t)$  dhe  $X(t)$  janë pika të lakoreve  $L_n$  dhe  $L$ .

**Teorema 3.** — Siparametër të lakoreve mund të marrim gjatësin e harkut te sajë fillijmi i të cilit është pika  $X(o)$ .

**Vërtetimi.** — Meqenëse gjatësia  $s(t)$  e harkut të lakores është funksion i vijueshëm i argumentit  $t$ , atehere ajo i merr të gjitha vlefat në intervalin  $[o, s]$  ku  $s$  është gjatësia e lakores. Seciles vlefte të gjatësis  $s$  i përgjigjet një pikë. Prandaj secilit numër  $s$  nga intervali  $[o, s]$  i përgjigjet një pikë  $Y(s)$  në lakore. perkufizimi i gjatësis së lakores rrjedh se

$$\rho[Y(s + \Delta s), Y(s)] < \Delta s.$$

Pra për  $\Delta s$  të vogël në mënyrë të çfardoshme largësia në mes të pikave  $Y(s + \Delta s)$  dhe  $Y(s)$  është e vogël po ashtu në mënyrë të çfardoshme. Dmth. se pika  $Y(s)$  gjithnë varet nga  $s$ .

### Metrika e mbrenshme

Le të jet  $M$  një bashkësi në hapësirën metrike  $R$ . Bashkësin  $M$  dotë quajmë metrikisht të lidhur nëqoftëse çdo dy pika në  $M$  mund të bashkohen] me lakore rektificibile  $\widehat{XY}$ , gjatësia e së cilës është  $s(\widehat{XY})$ . Për sejsilin çift elemntash  $X, Y$  të bashkësis se till mund të perkufizohet funksioni

$$\rho_M(X, Y) = \inf_{XY \in M} s(XY).$$

Funksioni  $\rho_M$  quhet metrika e mbrenshme e bashkësis  $M \subset R$ . Metrika e till mundëson matjen e gjatësive  $s_{\rho_M}(L)$  të lakoreve  $L$  të cilat ndodhen në  $M$ . Në përgjithësi metrikë e mbrenshme quhet çdo metrikë për të cilën largësia në mes të çdo dy pikave është e barabartë me kufirin e poshtëm të gjatësive të lakoreve të cilat i bashkojnë këto pika

$$\rho(X, Y) = \inf_{\widehat{XY} \in M} s(\widehat{XY}).$$

**Perkufizimi 4.** — Lakore geodezike do të quajmë lakoren  $\widehat{XY}$  e cila i bashkon pikat  $X$  dhe  $Y$  dhe e cila e ka gjatësin më të vogël prej të gjitha lakoreve rektificibile të cilat bashkojnë këto dy pika.

Nga ky përkufizim rrjedh se një lakore për të qenë lakore geodezike në një hapsirë me metrikë të mbrenshme është e domosdoshme dhe mjafton që gjatësia e sajë të jetë e barabartë me largësinë në mes të pikave të sajë të shtesha.

Vlen të përmendet se ekzistojnë hapsira në të cilat dy pika të ndryshme mund të bashkohen me më shumë se dy lakore geodezike.

Në lidhje me lakoret geodezike po i vërtetojmë së pari disa teorema të cilat janë ngusht të lidhura me përkufizimin e tyre.

**Teorema 4.** — Çdo pjesë e lakores geodezike është lakore geodezike.

**Vërtetimi.** — Me të vërtetë, në qoftë se supozojmë se një pjesë e një lakoreje geodezike nuk është edhe vet lakore geodezike, atëherë këtë pjesë të lakores do të zëvendësojmë me një lakore më të shkurtër. Por me këtë rast lakorja në tërësi do të shkurtrohet që është e pamundur.

**Teorema 5.** — Dy lakore  $XY$  dhe  $YZ$  për të formuar së bashku një lakore geodezike është e nevojshme dhe mjafton që  $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) = \rho(X, Z)$ .

**Vërtetimi.** — Gjatsit e lakoreve geodezike  $XY$  dhe  $YZ$  janë të barabarta me  $\rho(X, Y)$  dhe  $\rho(Y, Z)$ , ndërsa akorja  $XY + YZ$  do të jetë lakore geodezike atëherë dhe vetëm atëherë nëqoftëse gjatësia e sajë është e barabartë me  $\rho(X, Z)$ .

**Teorema 6.** — Lakorja geodezike është homoomorfe me segmentin drejtëvizor.

**Vërtetimi.** — Në realitet, nëqoftëse  $s$  është gjatësia e lakores geodezike, atëherë në bazë të teoremes 3, lakorja mund të shprehet në formën  $X(s)$ , dmth. pikat e sajë vazhdimisht varen nga  $s$ , kur  $s$  të merr të gjitha vlerat prej 0 deri në  $s$ , ku  $s$  është gjatësia e lakores geodezike. Prej kësaj rrjedh se kemi një rrethim të vijuar të intervalit segmentit  $[0, s]$  lakoren geodezike.

**Teorema 7.** — Nëqoftëse vargu i lakoreve geodezike konvergjon, atëherë kufiri i tij është lakore geodezike.

**Vërtetimi.** — Po supozojmë se vargu i lakoreve geodezike  $X_n Y_n$  konvergjon kah lakorja  $L$  pikat e fundme të së cilës janë  $X$  dhe  $Y$ . Prandaj në këtë rast do të jetë

$$\rho(X, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n, Y_n).$$

Nga ana tjetër, nëqoftëse  $s(L)$  është gjatësia e lakores  $L$ , atëherë



$$s(L) \geq \rho(X, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, Y_n). \quad (11)$$

Në të njejtën kohë gjatësia e lakoreve gjeodezike  $X_n Y_n$  është e barabartë me largësin  $\rho(X_n, Y_n)$ .

Ne anen tjetër vlen edhe relacioni

$$s(L) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n, Y_n). \quad (12)$$

Nga relacionet (11) dhe (12) në fund rrjedh

$$s(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, Y_n) = \rho(X, Y);$$

që dmth. se  $L$  është lakore gjeodezike shka edhe donim te vërtetonim.

#### METRIKA E JASHTME

Le të jet  $M$  një bashkësi në hapsirën metrike  $R$ . Në  $M$  po e marrim një sistem të çfardoshëm koordinativ të Dekartit.  $X$  e  $Y$  le të jen po ashtu dy pika të çfardoshme në  $M$ ; kurse  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  le të jen koordinatat e tyre në këtë sistem. Po e përkufizojmë funksionin

$$d(X, Y) = |X - Y| = \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

Vleftën e funksionit  $d$  e quajmë largësi të jashtme ndërsa funksionin  $d$  e quajmë metrikë të jashtme të bashkësis  $M$ .

Në bazë të përkufizimit të metrikes së mbrenshme dhe në bazë të teoremes 6, rrjedh se metrika e mbrenshme dhe metrika e jashtme dmth.  $\rho(X, Y)$  dhe  $d(X, Y)$  janë në mes veti topologjiksht ekuivalente.

Tani do të formulojmë dhe do të vërtetojmë teoremën e Buzeman — Felerit në Hipersyprinat konvekse të cilat përbejnë një klasë të rëndësishme të hapsirave metrike. Më parë po e vërtetojmë:

**Teorema 8.** — Le të jet  $F$  një hipersyprinë e çfardoshme e mbyllur dhe  $A$  pikë e cila nuk ndodhet në trupin konveks të cilin e përkufizon hipersyprina  $F$ . Atëherë në hipersyprinën  $F$  egziston një dhe vetëm një pikë  $A'$  e till që

$$d(A, A') = \min d(A, X)$$

**Vërtetimi.** — Sipas sypozimit  $F$  është bashkësi e mbyllur. Prej këtu rrjedh se  $F$  është poashtu bashkësi e kufizuar. Prandaj për çdo  $X$  nga  $F$  largësia  $d(A, X)$  është numër i kufizuar dhe se egziston

$$\min_{X \in F} d(A, X) = d(A, A').$$

Me këtë konstatuam se egziston pika  $A'$ . Per të njëjtat shkaqe rrjedh se pika  $A$  është e vetme. Pika  $A'$  quhet projektioni i pikës  $A$  në hipersyprinën konvekse  $F$ . Vlen të përmendet se kejo teoreme është rast specijal i teoremes më të përgjithshme e cila vlen edhe në rastin kur në vend të pikës  $A$  merret një bashkësi e çfardoshme  $G$ .

**Perkufizimi 5.** — Lakorja  $L$  ndodhet jashta hipersyprines  $F$  nëqoftëse ajo nuk ka pika në bashkësin konvekse të perkufizuar me hipersyprinën  $F$ .

**Perkufizimi 6.** — Projektioni i lakores  $L$ , e cila ndodhet jashta hipersyprines konvekse  $F$ , në hipersyprinën  $F$  është bashkësia e projeksioneve të të gjitha pikave të lakores  $L$ .

**Teorema 9.** — Nëqoftëse lakorja  $L$  e cila ndodhet jashta hipersyprines mbyllur konvekse  $F$  është rektificibile, atëherë projektioni i lakores  $L$  në hipersyprinën  $F$  është lakorja  $L$  gjatsija e së ciles nuk është më e madhe se gjatësija e lakores  $L$ .

**Vërtetimi.** —  $A$  dhe  $B$  le të jen pikat e fundme të lakores  $L$  kurse  $A'$  dhe  $B'$  projektionet e ketyre pikave në  $F$ .  $\alpha$  dhe  $\beta$  le të jen hiperplanet mbështetës (1) të hipersyprines  $F$  në pikat  $A'$  e  $B'$ .

Po supozojmë se  $\alpha$   $u$   $\beta$  nuk i takojnë një plani. Me  $\gamma$  po e shenojmë planin ( $n-2$ ) — dimenzional i cili në realitet paraqet pikat e përbashkëta të hiperplaneve  $\alpha$  dhe  $\beta$ ; dmth.  $\gamma = \alpha \cap \beta$ .  $\alpha_1$  dhe  $\beta_1$  le të jen gjysëm—hiperplanet të cilët e kanë  $\gamma$  të përbashkët dhe të cilët përmbajnë hipersyprinën konvekse  $F$ . Atehere, pikat  $A$  dhe  $B$  ndodhen në atë pjesë të hapsirës  $R$  të kufizuar me  $\alpha_1$   $\beta_1$  në të cilën nuk ndodhet hipersyprina mbyllur konvekse  $F$ . Së pari do të vërtetojmë se

$$d(A', B') \leq d(A, B).$$

Prej këtui, para se gjithash, rrjedh se projektioni i lakores  $L$  në hipersyprinën  $F$  është lakore e vijshme.

Po supozojmë se  $A' \in \alpha_1 - \gamma$  dhe  $B' \in \beta_1 - \gamma$  (përndryshe kemi rast trivial).  $\gamma'$  le të jet hiperplan ( $n-2$ ) — dimenzional i cili përmban projektionin  $A'$  dhe është paralel me  $\gamma$ . Po e vendosim planin 2—dimenzional  $\sigma$  i cili përmban pikën  $B$  dhe i cili është normal në  $\gamma$ . Meqenëse  $\gamma$  është paralel me  $\gamma'$  atehere  $\sigma$  është normal edhe në  $\gamma'$ . Plani  $\sigma$  përmban projektionin  $B'$  të pikës  $B$ , nderpren  $\gamma'$  në një pikë  $C'$  dhe përmban normalen në  $\alpha_1$  në pikën  $C'$ . Le në jet  $C$  pikë e kësaj normalje në atë anë të gjysëm—hiperplanit  $\alpha_1$  në të cilën është edhe pika  $A$  në të cilën është edhe pika  $A$  në mënyrë që

$$d(A, C) = d(A', C').$$

(1) Plan mbështetës quhet plani i cili me syprinën konvekse ka së paku një pikë të përbashkët, kurse të gjitha pikat tjera të syprines ndodhen në të njëjtën anë të këtij plani,

Atëherë do te kemi

$$d^2(A, B) = d^2(A, C) + d^2(C, B) \quad (14)$$

gjegjesisht

$$d^2(A, B) = d^2(A', C') + d^2(C, B) \quad (15)$$

Drejteza nepër  $B$  paralele me drjetezen  $B'C'$  ndërpren drejtezen  $CC'$  në një pikë  $D$  apo, drejtëza neper  $C$  paralele me drejtezen  $B'C'$  ndërpren drejtëzen  $BB'$  në një pikë  $E$ . Po sypozojmë se drejtëza nepër  $B$  paralele me drejtezen  $B'C'$  ndërpren drejtëzen  $CC'$  në pikën  $D$ .

Atëherë do të jet

$$d^2(C, B) \geq d^2(D, B) \geq d^2(C, B). \quad (16)$$

Nga (15) dhe (16) rrjedh

$$d^2(A, B) \geq d^2(A', C') + d^2(C', B') = d^2(A', B')$$

gjegjësish

$$d(A, B) \geq d(A', B') \quad (17)$$

Po e vrtetojmë tani se gjatësija  $s(L)$  e lakores  $L$  është më e madhe se gjatësija  $s(L')$  e projekSIONIT te saje  $L'$

Në sejcilen pikë të lakores  $L$  egziston hiperplani mbështetës i cili është normal në drejtezen e cila bashkon kët pike me piken përkatëse në lakoren  $L$  (duke sypozuar se pikat e lakores  $L$  nuk i takojnë hipersyprines  $F$ ). Po e zbërthejmë lakoren  $L$  në mënyre të çfarëdoshme në lakore  $L_i$ .  $X'_{i-1}$  dhe  $X'_i$  le të jen dy pika të njëmbasnjishme të një zbërthimi;  $\tau_{i-1}$  dhe  $\tau_i$  hiperplanet përkates mbështetës të hipersyprines  $F$ . Hiperplanet  $\tau_{i-1}$  dhe  $\tau_i$  ndërprehen sipas një plani  $(n-2)$ —dimenzional  $\pi_i$ . Po i vështrojmë gjysëm—hiperplanet  $\tau'_{i-1}$  dhe  $\tau'_i$  të cilët përmbajnë hipersyprinën  $F$ . Në kët rast pikat  $X_{i-1}$  dhe  $X_i$  ndodhen në hapsiren  $R$  në atë anë të gjysëm—hiperplaneve në të cilën nuk është hipersyprina  $F$ .

Në bazë të relacionit (17) do të kemi

$$d(X_{i-1}, X_i) \geq d(X'_{i-1}, X'_i),$$

prandaj do të jet edhe

$$\sum_i d(X_{i-1}, X_i) \geq \sum_i d(X'_{i-1}, X'_i). \quad (18)$$

Në bazë të ekuivalences topologjike në mes të funksioneve  $\rho$  dhe  $d$ , dhe në bazë të relacionit (18) rrjedh



$$\sum_i \rho(X_{i-1}, X_i) \geq \sum_i \rho(X'_{i-1}, X'_i). \quad (19)$$

Nga relacioni i fundit dhe në baze të përkufizimit të gjatësisë së lakores kemi

$$s(L) \geq s(L'),$$

shka është dashtë të vërtetohet.

#### LAKORET NË HAPSIRAT KONVERGJENTE

**Perkufizimi 7.** — Për hapsiren metrike  $R^n$  do të themi se konvergjon në mënyre uniforme kah hapsira metrike  $R$ , nëqoftëse egziston një rifigurim homeomorf  $\Psi_n$  i hapsires  $R^n$  në hapsiren  $R$  në mënyrë që për çdo  $\varepsilon \geq 0$  dhe  $n \geq N(\varepsilon)$  dhe për çdo  $X, Y \in R$

$$|\rho(X, Y) - \rho_n[\Psi_n^{-1}(X), \Psi_n^{-1}(Y)]| < \varepsilon \quad (20)$$

ku me  $\rho_n$  e  $\rho$  kemi shënuar metriken në hapsirat  $R^n$  dhe  $R$ .

**Perkufizimi 8.** — Për një varg lakoresh  $L_n$  i cili i takon hapsires metrike  $R^n$  do të themi se konvergjon kah lakorja  $L$  në hapsiren metrike  $R$ , nëqoftëse për  $n \geq N$ , lakoret  $L_n$  i tako në domenit në të cilin është definuar një rifigurim  $\Psi_n$ , ashtu që rifigurimi i type  $L'_n = \Psi_n(L_n)$  konvergjon në  $R$  në pajtim me përkufizimin 3.

**Teorema 10.** — Nëqoftëse hapsira metrike  $R^n$  konvergjon në mënyrë uniforme kah hapsira metrike  $R$ , dhe nëqoftëse vargu i lakoreve rektificibile  $L_n \subset R^n$  konvergjon kah lakorja  $L \subset R$ , në pajtim me perkufizimin 3, atëherë gjatësija e lakores  $L$  nuk është më e madhe se gjatësija e lakoreve  $L_n$ . (Lakoret  $L$  e  $L_n$  janë mat në hapsirat  $R$  dhe  $R^n$ ).

**Vërtetimi.** — Le të jetë  $s(L)$  gjatësija e lakores  $L$  kurse  $s(L_n)$  gjatësija e lakores  $L_n$ . Me  $\rho_n$  dhe  $\rho$  po i shënojmë metrikat në hapsirat  $R_n$  dhe  $R$ .

Domenet  $G_n$  të hapsires  $R^n$  të cilët përmbajnë lakoret  $L_n$  po i rifigurojmë me anë të  $\Psi_n$  në domene  $G$  në të cilët ndodhet lakorja  $L$  në hapsiren  $R$ . Nga natyra e rifigurimit  $\Psi_n$  rrjedh se në domenet  $G$  në të cilët ndodhet lakorja  $L$  (në  $R_n$ ) ka vend konvergjencia uniforme e metrikes  $\rho_n$  kah metrika  $\rho$ . Pra,

$$\rho_n \Rightarrow \rho$$

si edhe konvergjencia

$$L'_n = \Psi_n(L_n) \Rightarrow L.$$

Le të jetë  $t$  një parametër; me  $X_n, Y_n$  dhe  $X$  po i shënojmë pikat në lakoret  $L_n, L'_n$  dhe  $L$  të cilat i përgjigjen parametrin  $t$  në këtë konvergjencë. Në lakoren  $L$  po e marrim një varg të çfardoshëm pikash  $X^i$  ( $i=0, 1, \dots, m$ ). Sipas aksiomes se treskanshit kemi

$$\sum_{i=1}^m \rho(X^{i-1}, X^i) \leq \sum_{i=1}^m [\rho(X^{i-1}, Y_n^{i-1}) + \rho(Y_n^{i-1}, Y_n^i) + \rho(Y_n^i, X^i)].$$

Meqenëse

$\rho_n \rightarrow \rho$ , atëhere për  $n \geq N_1(\varepsilon)$  këjo shume do te jet më e vogel se

$$\sum_{i=1}^m \rho(Y_n^{i-1}, Y_n^i) + 2\varepsilon.$$

Për të njejtin shkak, për  $n \geq N_2(\varepsilon)$  edhe

$$\sum_{i=1}^m \rho(Y_n^{i-1}, Y_n^i) \leq \sum_{i=1}^n \rho_n(X_n^{i-1}, X_n^i) + 3\varepsilon.$$

Prej këtu, simbas përkufizimit të gjatesis së lakores rrjedh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \rho_n(X_n^{i-1}, X_n^i) + 3\varepsilon \leq s(L_n) + 3\varepsilon.$$

Sistemi i pikave  $X^i$  është i çfardoshëm në lakoren  $L$ , prandaj për  $m \geq N_{1,2}(\varepsilon)$  do të kemi

$$\sum_{i=1}^m \rho(X^{i-1}, X^i) \leq \sum_{i=1}^m \rho_n(X_n^{i-1}, X_n^i) + 3\varepsilon.$$

Numti  $\varepsilon$  të zgjidhet i vogël në mënyrë të çfardoshme, prandaj duke kaluar në vlefat kufitare do të fitohet

$$s(L) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s(L_n).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров: Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей; Москва, 1948.
2. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер: Двумерные многообразия ограниченной кривизны (ТМИ — LXIII — Москва, 1962).
3. А. Д. Александров: Квазигеодезические, ДАН СССР, т. 69, 1949.
4. А. Д. Александров: Кривые в многообразиях ограниченной кривизны ДАН СССР, т. 63, 1948.

5. Двумерни е многообразия ограниченной кривизны ч. II (ТМИ LXXVI, Москва 1965. Радовп, 1, 3, 7, 8, и 12).
6. Г. Буземан: Выпуклые поверхности, Москва 1964.
7. Погорелов: Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности, математ. сб., 25, 1949.
8. Frederick A. Valentine: Convex sets, New York, 1964.

E. HAMITI

# DISA RUPTIME THE TEOREMA TE GJEOMETRIS METRIKE

## RESUME

Dans ce travail on donne quelques notions principales et aussi on y démontrent quelques théorèmes fondamentaux de la géométrie métrique.

Dans ce genre d'idées les résultats fondamentaux ont obtenu le mathématicien soviétique A. D. Alexandroff et son école.

Après de la définition de métrique intérieur et extérieur dans  $R$  on y démontret qu'ils existe une équivalence topologique entre eux. Puis on donne la définition de la convergence des courbes dans les espaces métriques et aussi la définition d'espaces convergente. A la fin on y démontret le théorème suivant:

Si les espaces métrique  $R_n$  convergent vers l'espace métrique  $R$ , et si la suite des courbes rectifiables  $L_n \subset R_n$  convergent uniformément vers  $L$ , ( $L \subset R$ ), alors la longueur  $s(L)$  de courbe  $L$  est au plus égale à celles des longueurs  $s(L_n)$  des courbes de la suite  $L_n$ .