

УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ
UNIVERSITETI I PRISHTINËS

ЗБОРНИК

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ

VII

СВЕСКА Б

BULETIN

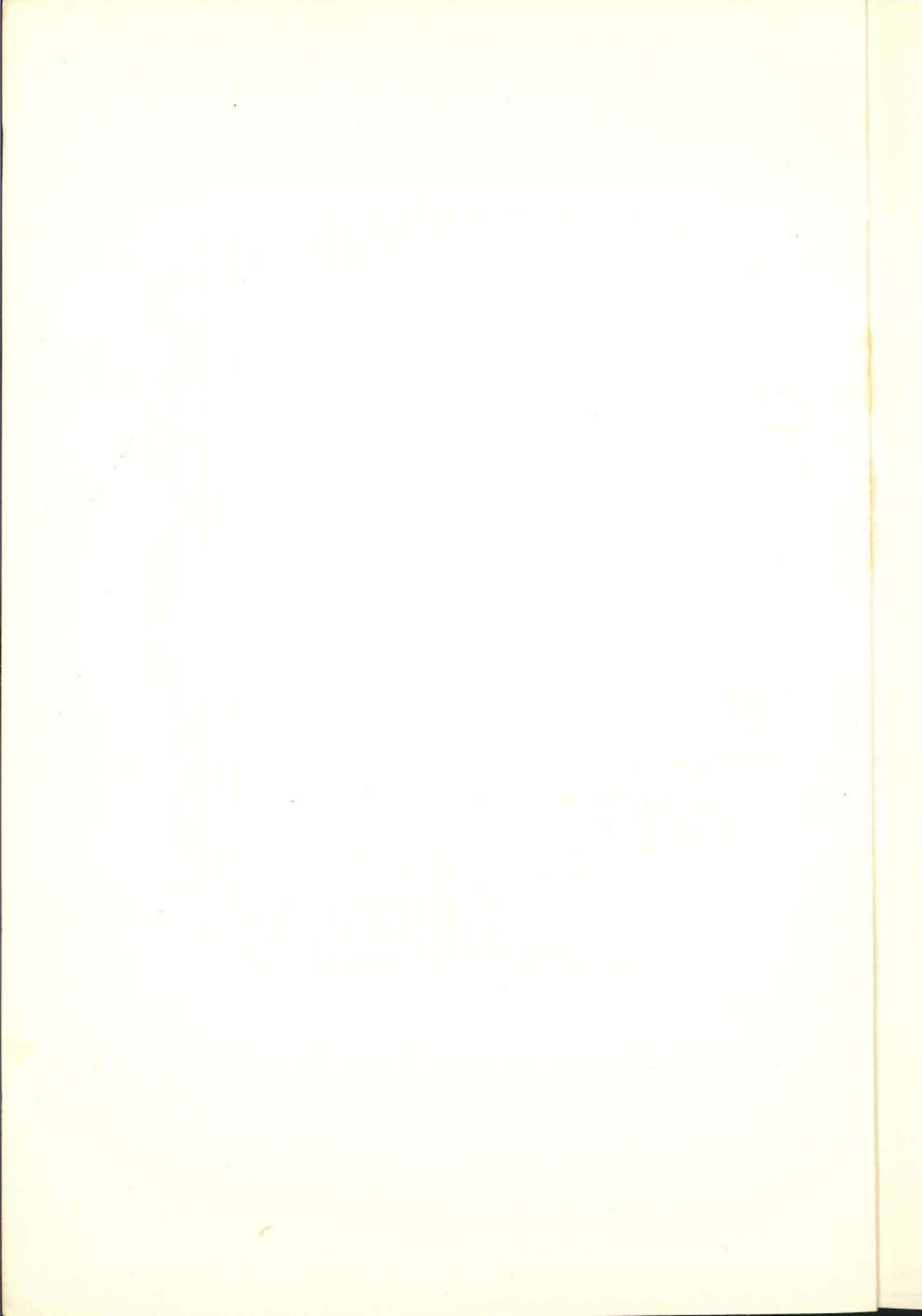
I PUNIMEVE SHKENCORE
TË FAKULTETIT FILOZOFIK TË PRISHTINËS

VII

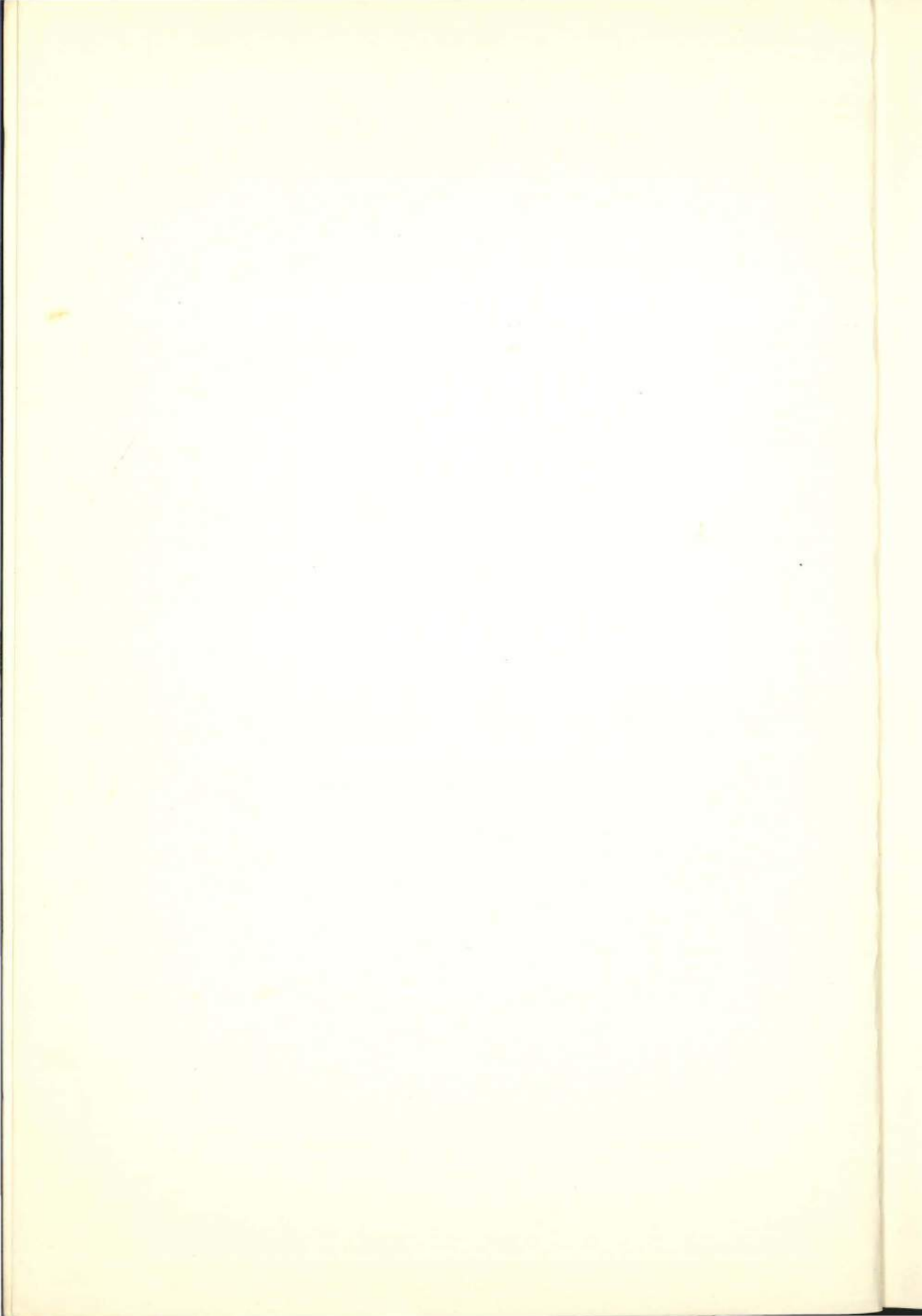
B L E N I B

ПРИШТИНА — PRISHTINË

1970







ЗБОРНИК
ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ
КЊ. VII. СВ. Б

UNIVERSITÉ DE PRISTINA

RECUEIL DES TRAVAUX

DE LA FACULTÉ DES LETTRES ET SCIENCES
À PRIŠTINA

VII

PRIŠTINA

1970

УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ
UNIVERSITETI I PRISHTINËS

ЗБОРНИК

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА У ПРИШТИНИ

VII

СВЕСКА Б

BULETIN

I PUNIMEVE SHKENCORE
TË FAKULTETIT FILOZOFIK TË PRISHTINËS

VII

БЛЕНИ В

ПРИШТИНА — PRISHTINË

1970

Редакциони одбор — Këshilli Redaktues
Comité de Rédaction

Др ДАНИЛО БАЃАКТАРЕВИЋ
Др БОГУМИЛ ХРАБАК
Др ДЕРВИШ РОЖАЈА
Др ЖЕЉКО КУЋЕР
ИМЕР МЕРОВЦИ

Главни и одговорни уредник
Др ДАНИЛО БАЃАКТАРЕВИЋ
ред. проф. универзитета

Напомена: У овој књизи сваки аутор вршио је коректуру свог рада.

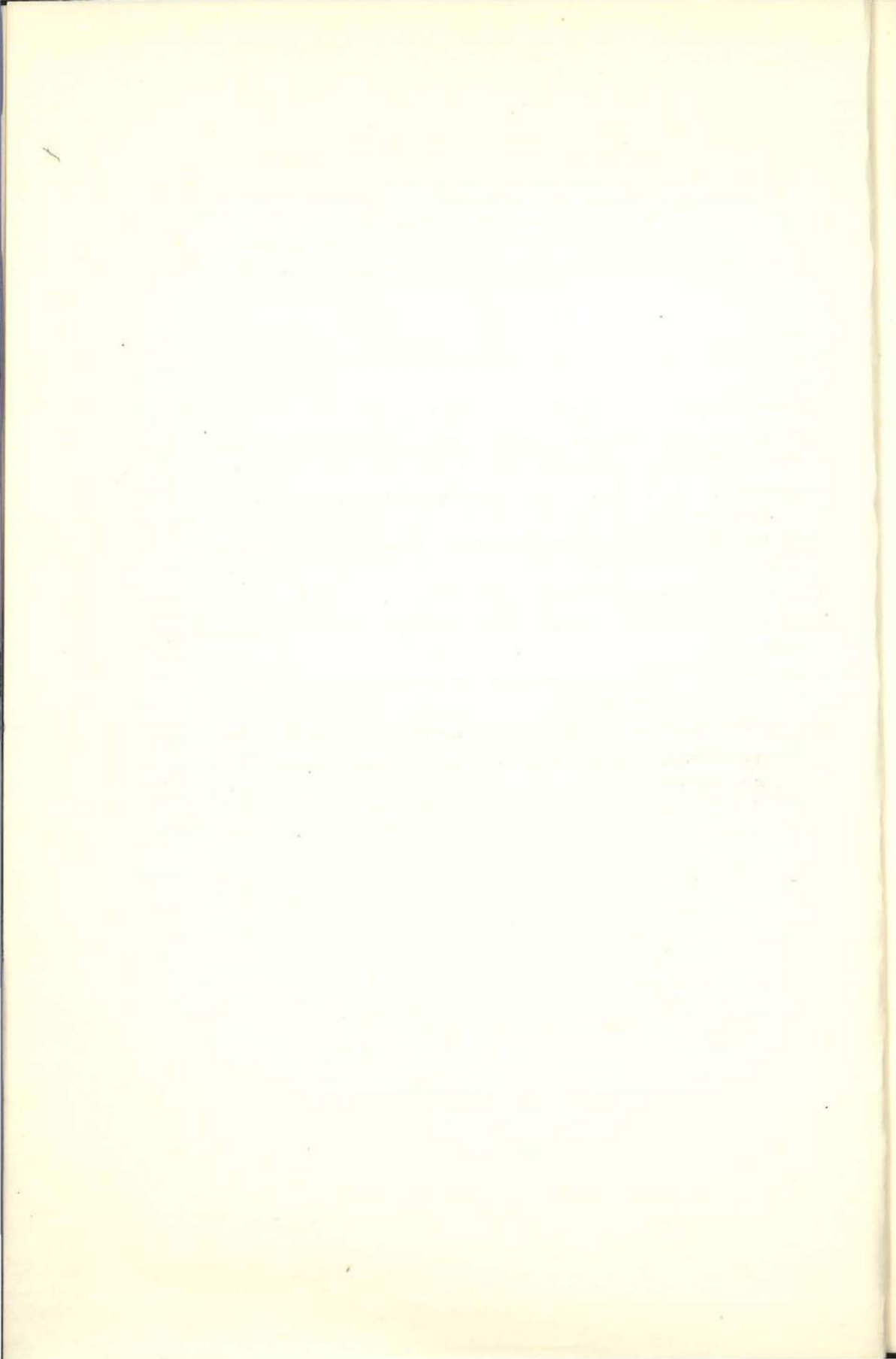
Издаје Филозофски факултет у Приштини

Универзитетска печатница — Скопје. Тираж 700 примерака

1970

С А Д Р Ж А Ј

1. Koviljka Stanković — Tomić, Flora Lovćena I	1
2. Стеван Бајовић, О граничним задацима обичних диференцијалних једначина — Метода функције Грина	41
3. Дамњановић Богдан, О једном услову конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки	63
4. Miodrag Jablanović, Analiza ednogenih supstanci u pupoljcima graška (pisum sativom) posle odsecanja stabla	85
5. Imer Merovci, Ortogonalni sistemi u primerima	95
6. Nedžad Daci, Ispitivanje hemijske konstrukcije kerogena aleksinačkog bituminoznog škrljca	103
7. Šaib Rizvanoli, Uvod u izučavanje specifičnog dinamičnog dejstva hrane kod barske kornjače Emzorbicularisl	121
8. Ćazim Leši, Klasifikacija i tipologija SAP Kosova — kvantitativna obeležja	129
9. Koviljka Stanković — Tomić, Prilog poznavanju livadske vegetacije Mokre planine II (Kosovo).....	151



KOVIJKA STANKOVIĆ-TOMIĆ

FLORA LOVČENA I

I. U V O D

Floristička istraživanja Lovčena vršila sam uporedo sa ispitivanjem vegetacije u vremenu od 1960. do 1964. godine. Rezultati vegetacijskih istraživanja ove planine objavljeni su u posebnoj studiji. Obilno sakupljeni floristički materijal obradila sam u Institutu za botaniku Sveučilišta u Zagrebu, gdje mi je ukazana puna pomoć i pažnja na čemu se zahvaljujem svim saradnicima Instituta.

Floristička ispitivanja Lovčena tijesno su povezana sa istraživanjima flore čitave Crne Gore, koju je posjećivao i ispitivao veliki broj domaćih i stranih botaničara. Za područje Lovčena najznačajniji su radovi botaničara Antonia Baldaccia (1886) i Josefa Rohlena (1901), koji su više puta dolazili u Crnu Goru odnosno na Lovćen i dali značajne priloge za floru ove planine.

Ispitivanjem flore obuhvatila sam kako planinu tako i njenu bližu podgorinu jer su međusobno tijesno povezane geomorfološki, klimatski i biljnogeografski. Cesta, koja povezuje mjesta: Kotor—Budvu—Cetinje—Njeguše i Kotor, većim dijelom prolazi užom podgorinom Lovčena i uzeta je, radi jasnoće, za granicu ispitivanog područja.

Floristički je najpotpunije ispitana sjeverna i sjeveroistočna podgorina Lovčena kao i njegovi najviši vrhovi, Štirovnik i Jezerski vrh. Botaničare je put u staru Crnu Goru odnosno na Lovćen vodio većinom od Kotora preko pomenute podgorine. Skoro svaki od njih peo se na Lovćen ne samo radi ispitivanja biljnog pokrova planine, nego i zbog lijepog pogleda koji se posjetiocu pruža sa lovcenskih vrhova. Južne i jugozapadne padine i podgorina planine nijesu bile usputne i botaničari su je rjeđe posjećivali. Zato sam na ovom dijelu planine i podgorine našla niz taksona koje raniji istraživači nijesu zabilježili za područje Lovčena.

2. POPIS FLORE LOVČENA

Popisom su obuhvaćene sve vrste vaskularnih biljaka (paprati, golo-sjemenice i cvjetnice) koje su do sada zabilježene na području Lovčena i njegove podgorine.

Nadeno je 1158 biljnih vrsta koje su uključene u 476 rodova i 95 familija, od kojih su 122 taksona nova za ovo područje, a neki od njih su novi i za floru Crne Gore. Broj navedenih vrsta je veliki što se moglo i očekivati s obzirom na biljnogeografski položaj i klimatske prilike planine.

Kod ovog istraživanja nije nađen veliki broj taksona koje su raniji istraživači za Lovćen zabilježili. To su većinom taksoni niže sistematske kategorije koji se pojavljuju povremeno ili su vezana za ekstremna staništa i ograničena na mali broj lokaliteta. Neke vrste biljaka su u flori Lovćena međuvremeno iščezle kao što su: *Trollius europaeus*, *Anemone pulsatilla*, *Arctostaphylos uva ursi* i dr. Od 20 endemičnih vrsta Crne Gore četiri su zabilježene u flori Lovćena, a to su: *Centaurea nicolai*, *Berteroa gintli*, *Lamium lovčenicum* i *Dianthus nicolai*.

Taksoni koji nijesu nađeni na ispitivanom području, a raniji istraživači ih navode, u popisu flore označeni su jednom zvjezdicom*, a oni koji su zabilježeni prvi put označeni su sa dvije zvjezdice**.

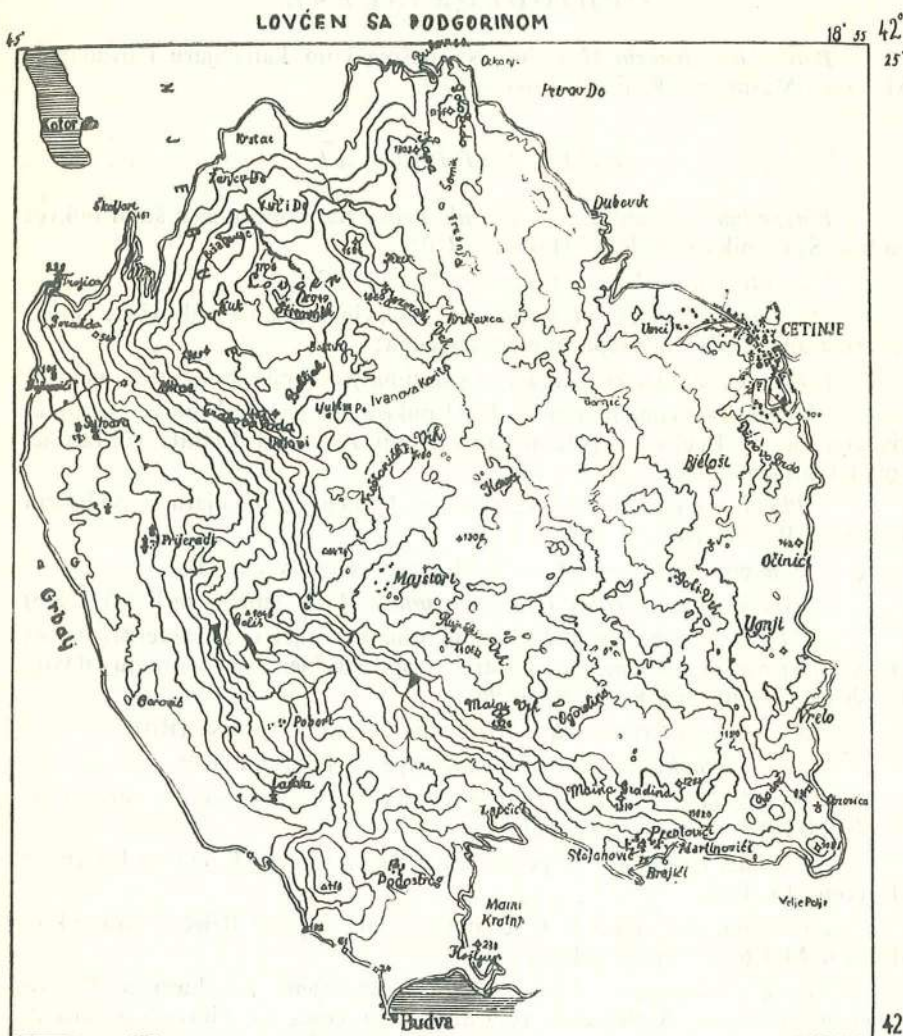
U priloženom popisu flore Lovćena vrste su raspoređene po Wettsteinovom sistemu. Za svaki takson navedeno je stanište i nalazište, a u zagradi su navedeni neophodni sinonimi. Tamo gdje je bilo potrebno navedena je i biljna zajednica u kojoj se vrsta najčešće nalazi. Određene su subspecijesi, varieteti i forme za svaku vrstu gdje je to bilo moguće. U zagradi se nalaze inicijali istraživača koji su vrstu sakupili ili je zabilježili kao i nalazišta na kojima su je našli. Ako je vrsta tako česta da ju je svaki istraživač zapisao, onda ovi posljednji podaci nijesu navedeni.

Tumač kratica

Ad—Adamović L.	Ki — Kint E.
Ba — Baldacci A.	Kn — Kneucker A.
B — Beck M. G.	Kš — Kašpar A.
Bo — Bormüller J.	La — Laatzel
De — Deyl M.	Ld — Lindberger sin.
Do — Dostel J.	Mr — Matsuschek
Ce — Celakovsky sin.	Pč — Pančić J.
Eb — Etel Wilh.	Pcj — Pejović Kr.
Gi — Ginzberger A.	Ro — Rohlena J.
Ho — Horak B.	Si — Sillinger P.
Hö — Höhnelt	Sz — Szyszlowicz ing.
Ja — Janchen Erv.	To — Tommasini M.
Vh — Vierhapper Frieder	

SELAGINELLACEAE

** *Selaginella denticulata* (L.) Lk. Na stijenama u gustim sastojinama gariga i makije: Topliš kod Budve, Gornji i Donji Grbalj.



MJERILO 1:50 000
EKVIDISTANCIJA 100M

EQUISETACEAE

Equisetum arvense L. Uz vlažne međe, kanale i bare: Brajička dolina.

OPHIOGLOSSACEAE

Botrychium lunaria (L.) Sw. Na pašnjačkom kamenjaru i livadama: Majstori, Majin vrh, Rujišta; (Lovćen Ro).

POLYPODIACEAE

Polypodium vulgare L. var. *boreale* Beck. Na panjevima u šumi bukve: padine Štirovnika i Padeža; (Lovćen Ro):

* *f. rotundatum* Milde., tipična za Njeguše (Ro).

Pteridium aquilinum (L.) Kuhn. U krčevinama i na rubovima šuma: rasprostranjena na području čitavog Lovćena;

f. lanuginosum (Bory.) Luers., u garizima primorske podgorine planine.

** *Adiantum capillus veneris* L. U pukotinama vlažnih pećina karakteristična za as. Eucladio—Adiantetum: Donji kraj kod Cetinja i Bratešići iznad Gornjeg Grblja.

* *Phyllitis scolopendrium* (L.) Newn. U sjenci kamenjara u podnožju Lovćena (Pč, Ba, Ro);

* *f. angustum* (Rossi) Hay., Mali Šavnik na Lovćenu (Ro).

* *Asplenium viride* Huds. *f. incisocrenatum* Milde. Tipična za Lovćen (Ro)

Asplenium trichomanes L. U pukotinama stijena, karakteristična za vegetacijski razred Apslenietea rupestris: rasprostranjena na području čitavog Lovćena; (Njeguši Sz, Ro; Cetinje Pč);

var. *pseudadulterinum* Rohl., između Kotora i Njevuša (Ro);

* var. *microphyllum* Milde., Valač rupe na Lovćenu (Ro).

** *Asplenium onopteris* L. U garizima as. Cisto-Ericetum arboreae: Topliš kod Budve i Gornji Grbalj.

Asplenium fissum Kit. U pukotinama stijena: pored Jezera na Lovćenu; (Lovćen Ho, Ro).

Asplenium ruta muraria L. U pukotinama stijena: Riječke strane kod Brajića, Majstori i Tisove ploče.

Ceterach officinarum DC. U pukotinama stijena, karakteristična je za vegetacijski razred Asplenietea rupestris: vrlo česta na čitavom području planine i podgorine; (Cetinje, Njeguši, Pč, Pt, Ho, Ro);

* *f. platylobum* Geysenh., tipična za Lovćem (Ro).

Athyrium filix femina (L.) Roth. var. *fissidens* Milde. U šumi bukve: Kapa, Trešnja i Štirovnik; (Lovćen Ro).

* *Nephrodium dryopteris* (L.) Michx. U šumama i kamenjarima subalpske i alpske regije: Lovćen (Ro).

Nephrodium robertianum (Hoffm.) Prantl. Na točilima: Jezerski vrh, Štirovnik i Zveronjak. Karakteristična za vegetacijski razred

Thlaspeetea rotundifolii; (Lovćen Ro).

Nephrodium filix mas (L.) Rich. U bukovim šumama: Padež, Majstori, Trešnja i Tisove ploče; (Cetinje Ba, Lovćen Ro, Pej);

* *f. deorsolobatum* Milde., Dubovički krši i Trešnja na Lovćenu (Pej, Ro);

* *f. crenatum* Milde., Trešnja iznad Njeguša (Ro, Pej).

Nephrodium villarsii (Bell.) Beck. subsp. *rigidum* (Hoffm.) Hay. U škripovima, bukovim šumama i na točilima: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola i Tisove ploče blizu Ivanovih korita: (Jezerski vrh, Mali Šavnik i Štirovnik na Lovćenu Ro, Ho);

* *f. nivale* Beck., Lovćen (Ro);

* subsp. *pallidum* (Bory). Hay., na kamenjarima; Cetinje (Kn, Ld); Njeguši (Ro, Ld); padine Lovćena (Ro, Ki, Gi).

Nephrodium spinulosum (Müll.) Strempel. U bukovim šumama: Podjezerske strane i padine Padeža; (Njeguši Sz).

Polystichum lonchitis (L.) Roth. Elemenat bukove šume: padine Štirovnika, Jezerskog vrha, Treštenika i Tisove ploče; (Lovćen, Pt, Pč, Ba, Sz, Ja, Ro, De, Si).

Polystichum lobatum (Huds.) Presl. U bukovim šumama: rasprostranjen na čitavom području planine: (Lovćen Ro).

Cystopteris fragilis (L.) Bernh. Na točilima zajednice *Drypetum linnaeanae* i na rubovima subalpske bukove šume: padine Štirovnika i Jezerskog vrha; (Lovćen Pč, Ro; Njeguši Ro);

* *f. anthriscifolia* (Hoffm.) Koch., Njeguši (Ro);

* *f. cynapiifolia* (Hoffm.) Koch., Valac rupe na Lovćenu (Ro).

* *Cystopteris regia* (L.) Desv. *f. subfragilis* (Milde) Hay.: Lovćen (Ro).

CONIFERAE

Taxus baccata L. U šumama bukve: na Lovćenu vrlo rijetka jer je sječom uništena tako da je nađena samo u Tisovim pločama blizu Ivanovih korita; (Lovćen Ro);

* var. *ericoides* Carr., padine Lovćena (Pej, Ro).

Juniperus communis L. subsp. *communis*. Na kamenjaru i u šikari crnoga graba: Orlov krš kod Cetinja; (Njeguši Ro); subsp. *nana* (Willd.) Hay. na rudinama Štirovnika, u škripovima i dubokim uvalama: Štirovnik, Tisove ploče, Jezerski vrh; (Lovćen Ro).

Juniperus oxycedrus L. Rasprostranjena na kamenjarima po čitavoj podgorini planine a na mjestima s južnom ili jugoistočnom ekspozicijom penje se i do najviših vrhova. Naročito je čest elemenat gariga gdje je karakteristična za vegetacijski red *Cisto-Ericetalia* i svezu *Cisto-Ericion*: lovćenska podgorina naročito u Gornjem Grblju; (padine Lovćena Pč, Pej, Ro; oko Njeguša Ro).

** *Juniperus macrocarpa* S. S. Elemenat gariga u as. Cisto-Ericetum arboreae. Topliš blizu Budve.

Juniperus phoenicea L. U gariima primorske podgorine. Trojica blizu Kotora.

Pinus heldreichii Christ. (*P. leucodermis* Ant.). Na strmim stijenama, a ponegdje na gornjoj granici bukove šume. Na nekim mjestima razvile su se male sastojine ovog bora, a inače je ranije bio mnogo jače rasprostranjen ali je sjećom uništen: Štirovnik i Jezerski vrh; (Lovćen Ad, Pej, Ro).

** *Pinus halepensis* Mill. Rijedak elemenat gariga inače je mnogo češće sađen; brdo Sv. Spas kod Budve, Gornji Grbalj.

Pinus nigra Arnold. subsp. *nigra*. Sađena u svrhu pošumljavanja ali se ponegdje nađu i samonikle mladice: Ivanova korita, Treštenik, Jezerski vrh, Bukovca.

EPHEDRACEAE

** *Ephedra campylopoda* C. A. Mey. (*E. fragilis*). Nađena je U gariima zajednice Paliuretum adriaticum inače je vrlo rijetka: Prijerade iznad Gornjeg Grblja.

BETULACEAE

Carpinus betulus L. U šikarama i šumama crnoga graba, a ponegdje se može naći i u sastojinama bijeloga graba: Gornji Grbalj, Brajići, Padež kod Obzovice, Umci i Zabrde kod Cetinja; (padine Lovćena Pč, Ro).

Carpinus orientalis Mill. Glavni elemenat zajednice Carpinetum orientalis croaticum, mada se može naći i u drugim zajednicama. Rasprostranjena po padinama i podgorini Lovćena; (Cetinje, Pč, Ba).

Ostrya carpinifolia Scop. Karakteristična vrsta as. Seslerio-Ostryetum: česta je na padinama i podgorini planine; (Njeguši Ro, Gi).

Corylus colurna L. U šikarama crnoga graba: Ugnji, Vrela i Zabrde kod Cetinja; (Dubovik Ro).

Corylus avellana L. U vlažnijim sastojinama zajednice crnoga graba, inače je karakteristična za vegetacijski razred Quercu-Fagetea: Obzovica, Vrela, Zabrde i Orlov krš kod Cetinja; (Njeguši Ro; Cetinje Pč).

FAGACEAE

Fagus silvatica L. Glavni elemenat as. Fagetum montenegrinum: na planini gradi širok visinski pojas.

Quercus cerris L. Karakteristična vrsta vegetacijskog reda Quercetalia pubescentis, na pojedinim mjestima gradi čiste sastojine: Stanjevići, Brajići, Gornji i Bjeloške paprati: (Njeguši Ro, Gi);

f. austriaca (Willd). Loud. Stanjevići kod Pobora; (Njeguši Ba.).

** *Quercus ilex* L. Glavni elemenat makije inače se u Gornjem Grblju može naći i u sastojinama zajednice Cisto-Ericetum arboreae.

Quercus pubescens Willd. (*Qu. lanuginosa* (Lam.) Thuill.). Karakteristična vrsta vegetacijskog reda *Quercetalia pubescentis*: na padinama i podgorini Lovćena.

* *Quercus petraea* (Mattuschka) Liebl. Baldači je pominje za Krstac kod Njeguša.

** *Quercus farnetto* Ten. Kod Gornjih Pobora blizu Budve, nalaze se sastojine ovoga hrasta kojega, mještani, za razliku od ostalih hrastova, nazivaju divodubovina.

SALICACEAE

Populus nigra L. U šikarama crnoga graba: Obzovica i Vrela; (Cetinje Ba).

** *Salix alba* L. Pored izvora i uz kanale: izvor Komadre iznad Stanjevića, Brajići i Gornji Grbalj.

Salix grandifolia Ser. (*S. appendiculata* Vill.). Na vododerinama u šumi bukve; padine Stirovnika iznad Vučjeg dola; (padine Lovćena iznad Njeguša Pč, Ba).

Salix caprea L. Na kamenjaru u bukovoj šumi: Tisove ploče, Vrela i Majstori; (padine Lovćena iznad Njeguša Ro).

Salix elegans Scop. Na vododerinama u šikari crnoga graba; Vrela, Ugnji i Riječke strane kod Brajića; (padine Lovćena Pej, Ro).

MORACEAE

Morus alba L. U kulturama, a ponegdje se može naći samonikla: Gornji Grbalj, Cetinje i Njeguši; (Njeguši, Cetinje Ro).

Ficus carica L. Gaji se u kulturama ali se može naći često i samonikla, naročito u primorskoj podgorini Lovćena.

ULMACEAE

Ulmus foliacea Gilib. U šikarama bijelog i crnoga graba: primorske padine Lovćena i kontinentalna podgorina; (padine Lovćena Pč).

** *Ulmus scabra* Mill. (*U. montana* With.). U nasadima a ponegdje i samonikla: Vučji do iznad Njeguša i okolina Cetinja.

Celtis australis L. U grabovim šumama i šikarama gdje je karakteristična za vegetacijsku svezu *Ostryo-Carpinion orientalis*; Bratešići, Prijeradi i Gornji Grbalj; (Cetinje Ba).

URTICACEAE

Urtica dioica L. Karakteristična za ruderalnu as. *Urtico-Sambucetum* ebuli, koja je na području Lovćena vrlo rasprostranjena.

Urtica urens L. Rasprostranjena svuda oko naselja i uz puteve; (Njeguši Ro).

Parietaria officinalis L. Uz naselja i na rubu bukove šume: Vrela, Ugnji i Njeguši; (oko Cetinja Pč, Ro; Njeguši Ro).

Parietaria vulgaris Hill. (*P. ramiflora* Mch. Meth.). Elemenat as. Urtico-Sambucetu ebuli: Brajići, Mirac, Njeguši, (Njeguši Eb, Ro, Ho).

SANTALACEAE

** *Osyris alba* L. Elemenat gariga karakterističan za vegetacijski red Cisto-Ericetalia i svezu Cisto-Ericion, rasprostranjena na području Gornjeg Grblja.

Thesium divaricatum Jan. Na kamenjarima i uz put: Bukovica iznad Njeguša i Umci kod Cetinja; (Njeguši Ro).

Thesium parnassi A. DC. U sadjenoj šumi crnog bora: Bukovica iznad Njeguša; (Lovćen Ro; Mali Bostur na Lovćenu Kš).

POLYGONACEAE

Rumex crispus L. Na vlažnim livadama: Njeguši, Cetinje; (Njeguši Ro);

* x *R. crispus* x *obtusifolius* (= *R. pratensis* M. K.), u podnožju Lovćena (Ba) Šavnik (Ro).

Rumex conglomeratus Murr. Na vlažnim staništima: blizu Jezera ispod Jezerskog vrha; (Jezerski vrh Ho).

Rumex pulcher L. Ruderalni elemenat, može se naći u svakom naselju na području podgorine; (Cetinje Pč, Njeguši Sz; Ivanova korita i Blatište na Lovćenu (Bierbach).

Rumex obtusifolius L. subsp. *silvester* (Lam.) Rech. Na livadama i u šikarama crnoga graba: Obzovica; Zabrde i okolina Cetinja.

Rumex acetosella L. Vrlo česta po livadama i pašnjacima; Obzovica, Majstori, Ivanova korita, Dolovi, Njeguši, Cetinjsko polje; (padine Lovćena Ro)

* var. *angiocarpus* (Murb.) Čel., padine Lovćena (Ro),.

Rumex scutatus L. Na točilima gdje je karakteristična za vegetacijski razred Thlaspietea rotundifolii: točilo iznad Jezera i ispod Štirovnika prema Vučjem dolu, Zveronjak; (Lovćen Ro).

Polygonum aviculare L. Ruderalni i korovni elemenat rasprostranjen na čitavom Lovćenu i njegovoj podgorini.

Polygonum persicaria L. f. *angustifolium* Beckh. (var. *longeciliata* Opiz). Na okopavinama i ledinama: Donji kraj kod Cetinja; (Kunji do kod Njeguša Pej, Ro).

Polygonum lapathifolium L. subsp. *verum* Schust. f. *nodosum* (Pers.) Guenth. Na vlažnim livadama i barama: Jezero; (Jezero na Lovćenu Pej);

* subsp. *tomentosum* (Schrk.) Hay. (*P. incanum* Sshm.); Gornje polje kod Njeguša (Ro).

Fagopyrum convolvulus (L.) H. Gross. Na okopavinama, oko kuća i uz puteve: Obzovica, Ugnji i Njeguši; (Njeguši Ro).

* *Fagopyrum dumetorum* (L.) Schreb. U trnjacima i živicama: oko Njeguša (Ro);

* var. *falax* Rohl., Trešnja i Dubovik kod Njeguša (Pej, Ro).

EUPHORBIACEAE

Mercurialis perennis L. U šumama i šikarama bukve gdje je karakteristična za vegetacijski red Fagetalia i svezu Fagion illyricum: Rujišta, Tisove ploče i Podjezerske strane; (između Cetinja i Njeguša Ro);

* f. *saxicola* Beck., uz puteve od Njeguša do Cetinja (Pej, Ro).

Euphorbia spinosa L. Na kamenjarima inače je karakteristična za vegetacijsku svezu Chrysopogoni-Satureion: okolina Brajića, Padež iznad Obzovice, okolina Cetinja, južne i istočne padine Štirovnika i kod Njeguša; (Njeguši, Cetinje Ro).

Euphorbia helioscopia L. Nalazi se u ruderalnoj as. Urtico-Sambucetum ebuli gdje je karakteristična za vegetacijski razred Chenopodietea: Brajići, Poda, Mirac i Cetinja;

* var. *perramosa* Borb., tipična za Njeguše (Ro).

Euphorbia veneta Willd. (*E. Wulfenii* Hoppe). Na kamenjaru i u prorijedenoj šikari bjelograba: strane iznad Kotora i Grblja.

Euphorbia amygdaloides L. Čest elemenat grabovih i bukovih šuma: Treštenik, Stanjevići, Padež iznad Obzovice.

Euphorbia imperatifolia Vis. (*E. filicina* Boiss). Kamenjar u šumi bukve: strane iznad Trešnje, i Bukovica iznad Njeguša; (Trešnja i Presjeka u podnožju Lovćena Pej, Ro).

Euphorbia virgata W. K. Uz međe i na livadama: Vučji do blizu Njeguša; (Lovćen prema Njegušima Pej, Ro).

Euphorbia cyparissias L. Uz put kroz bukovu šumu i na rubu livada: Ivanova korita i put od Ivanovih korita do Majstora; (Cetinje Pč.; oko Njeguša Ro);

f. *aurea* Beck., Kamenjar u šumi bukve i strane ispod Vjetrenog mlina kod Dolova; (Njeguši Ro);

* x *E. cyparissias* L. var. *aurea* Beck. x *E. esula* L., Njeguši (Pej, Ro).

Euphorbia esula L. U ruderalnoj vegetaciji: Majstori, Ivanova korita, Njeguši; (Kstac kod Njeguša Pej, Ro);

* f. *colorata* Rohl., Krstačko polje i Kračeva glavica blizu Njeguša (Pej, Ro).

Euphorbia barrelieri Savi. var. *hercegovina* (Beck) Hay. Na kamenjaru: Njeguši (Ad).

* *Euphorbia graeca* Boiss. et Spr. Ruderalna biljka: oko Njeguša (Ro).

** *Euphorbia peplus* L. Ruderalni elemenat: Gornji Grbalj, Čavori, Mirac.

Euphorbia falcata L. Na kamenjarima i uz puteve: Gornji Grbalj i Prijeradi: (Njeguši Ro).

Euphorbia lathyris L. Na pašnjačkom kamenjaru i uz cestu: strane oko Mirac i iznad Kotora; (Krstac blizu Njeguša Gi).

Euphorbia myrsinites L. Na kamenjaru uz cestu: Krstačko polje kod Njeguša: (oko Njeguša i padine Lovćena Pej, To. Ro).

CHENOPODIACEAE

Polycnemum majus A. Br. Na oranicama i uz međe: Brajići, Obzovica, Mirac, Njeguši; (oko Cetinja Kn; Njeguši Ba).

Chenopodium hybridum L. Ruderalni i korovni elemenat: Brajići, Obzovica, Njeguši; (Njeguši Ro).

Chenopodium album L. Ruderalni elemenat karakterističan za vegetacijski razred Chenopodietea: Brajići, Ugnji, Mirac, Njeguši.

Chenopodium bonus henricus L. Ruderalni elemenat oko koliba i torova: Majstori i Dolovi kod Ivanovih korita.

Atriplex patula L. Česti ruderalni elementa: Brajići, Obzovica, Poda, Čavori; (Cetinje Pč; Njeguši Ro).

Salsola kali L. U šikarama crnoga graba, na sjenovitim mjestima i na kamenjaru: Vrela i oko Cetinja; (Cetinje Pč).

AMARANTACEAE

Amarantus retroflexus L. Čest elemenat ruderalne vegetacije: Obzovica, Veliki Bostur na Lovćenu i Njeguši; (oko Cetinja i Njeguši Pč, Ba, Ro).

PORTULACACEAE

Portulaca oleracea L. subsp. *silvestris* (Mont.) Thell. Na okopavinama i uz puteve: Brajići i Cetinje; (Cetinje Pč).

CARYOPHYLLACEAE

Herniaria incana Lam. Na ledinama, uz puteve i druga gažena mjesta: Poda i Mirac; (u podnožju Lovćena Ro).

Herniaria glabra L. Oko kuća i uz puteve: Brajići, Ugnji i Cetinje; (Cetinje Pt, Pč);

* f. *ciliata* Wirtg., Cetinje (Kn).

* f. *subciliata* Bab., Trešnja u podnožju Lovćena (Ro);

* var. *scabrescens* R. Roem., padine Lovćena (Kš).

Paronychia kapela (Hacq.) Kern. U pukotinama stijena, na rudinama i kamenjaru izloženom jakoj buri: Majstori, Dolovi, Veliki Bostur, padine Štirovnika i Jezerskog vrha; (Lovćen Pč, Ba, Kš, Vh, Ho; oko Njeguša Ba, Pej, Ro);

* f. *rotundifolia* Beck., intermedijarna f. Lovćen (Ro).

Scleranthus annuus L. subsp. *annuus*. Vrlo česta po livadama, oranicama i ledinama: rasprostranjena na području čitave planine;

* f. *imbricatus* Beck., Njeguši (Ro, Pej).

* *Minuartia setacea* (Thuill.) Hay. Na kamenjaru: Štirovnik (Ba).

* *Minuartia mediterranea* (Led.) K. Maly. Na kamenjaru: Cetinje (Pč).

Minuartia verna (L.) Hiern. subsp. *montana* (Fenzl.) Hay. Na pašnjacima i kamenjarima: Majstori i Ivanova korita.

Minuartia graminifolia (Ard.) Jav. subsp. *clandestina* (Port.) Mattf. Na kamenjarima, u pukotinama stijena i na rudinama: padine Štirovnika.

Minuartia capillacea (All.) Gr. Na kamenjarima i u pukotinama stijena: Jezerski vrh i Treštenik; (Jezerski vrh Ho).

Arenaria serpyllifolia L. Oko kuća, uz puteve i na drugim zapuštenim mjestima: Gornji Grbalj, Šišići i Njeguši.

Arenaria leptoclados Guss. Na suvim livadama i kamenjaru: Brajići i Njeguši; (između Krsca i Njeguša Ro);

f. *viscidula* (Rouy et Fouc.) Hay. Na kamenjarima zajednice *Stiposalvietum officinalis*: Gornji Grbalj i Šišići; (Cetinje Ro).

Moehringia trinervia (L.) Ciav. U šumama i šikarama bukve gdje je karakteristična za vegetacijski red *Fagetalia* i svezu *Fagion illyricum*: Padež i Tisove ploče; (Lovćen Ro).

Moehringia muscosa L. U pukotinama stijena gdje je karakteristična za vegetacijski razred *Asplenietea rupestris*: Tisove ploče.

Sagina procumbens L. Na vlažnim livadama, uz kanale i potoke: Brajići, Obzovica, Vrela, Cetinje i Njeguši; (između Cetinja i Njeguša Ki; Lovćen Pej, Ro).

Holosteum umbellatum L. Na pašnjacima i livadama: Brajići, Ugnji, Cetinje i Njeguši; (Njeguši, Cetinje Pč).

Moenchia mantica (Torn.) Bartl. Na livadama: Cetinjsko polje, Njeguško polje i Ivanova korita; (Cetinje Pč).

Cerastium grandiflorum W. K. subf. *lasioctemon* Corr. Na točilima, u pukotinama stijena i na kamenjaru: Brajići, Treštenik, Babljak i Štirovnik; (Lovćen Pč, Ba, Ho, Ro, Ja).

* *Cerastium lanigerum* Clem. var. *durmitoreum* Rohl. Lovćen, f. varira (Ro).

* *Cerastium lanatum* Lam. f. *glutinosum* (Koch.) Hay. Baldacci je bilježi za Lovćen mada kasnije od istraživača niko nije nalaz potvrdio:

Cerastium caespitosum Gilib. Na kamenjaru u šikarama bijelog graba i crnoga graba: Šišići, Čavori, Brajići i Cetinje; (Cetinje Pč. Ba; Krstac kod Njeguša Ro);

* var. *canescens* Guerke., Njeguši i Lovćen (Pej, Ro).

Cerastium brachypetalum Desp. var. *glandulosum* Koch. Na oranicama, ledinama i u šikarama bijelog graba: Brajići, Cetinje i Njeguši; (između Cetinja i Belvedera Ld, Ki);

- * var. *eglandulosum* Fzl., Njeguši (Ro);
- * subsp. *luridum* (Guss.) Boiss. var. *Roeseri* (Boiss. Heldr.) Boiss., Jezerski vrh (Ho).

Cerastium semidecandrum L. Na kamenjaru i uz puteve: Brajići i Njeguši; (Njeguši Ro; Golo brdo između Cetinja i Njeguša Gi).

* *Cerastium viscosum* L. Na travnjacima i uz puteve: Cetinje i Njeguše (PČ, Ro).

Cerastium campanulatum Viv. Na suvim pašnjacima i kamenjaru: Majin vrh, Majstori i Ivanova korita; (Krstac kod Njeguša Ld, Ki, Pej; Lovćen To, Ro, Pej).

Stellaria media (L.) Vill. Na Lovćenu vrlo česta vrsta; (Njeguši PČ, Ro).

Stellaria graminea L. Na livadama i ledinama: Obzovica, Njeguši i Ivanova korita; (Cetinje PČ; padine Lovćena Ba, Kš. Ro);

* f. *glaucescens* Gaud., Bukovica blizu Njeguša (Ro).

Saponaria officinalis L. U vrtovima i voćnjacima: Cetinje i Njeguše;

* f. *hirsuta* Wierzb., Njeguši (Ro).

* *Vaccaria pyramidata* Med. subsp. *parviflora* (Mch.) Hay. Kod Njeguša (PČ);

* subsp. *grandiflora* (Fisch.) Hay., između Njeguša i Cetinja na Bukovici (Ro).

Tunica saxifraga (L.) Scop. Na pašnjačkim kamenjarima gdje je karakteristična za vegetacijski razred *Brachypodio-Chrysopogoneteca*: rasprostranjena po Lovćenu i njegovoj podgorini.

Dianthus armeria L. Na ledinama, pašnjacima i nekošenim livadama: Njeguši; (Njeguši PČ, Ho, Ro).

Dianthus armeriastrum Wolfn. Na kamenjaru u šumi bukve: padine Štirovnika iznda Vučjeg dola; (Gornje polje blizu Njeguša Ro).

Dianthus croaticus Borb. Na suvim livadama a ponegdje i na pašnjačkom kamenjaru; rasprostranjena na čitavom području planine; (Lovćen Bierbach).

* *Dianthus haynaldianus* Borb. Lovćen (Ba).

Dianthus sanguineus Vis. Elemenat pašnjačkih kamenjara: Riječke strane kod Brajića i Padež iznad Obzovice; (Bukovica blizu Cetinja Ro; Veliki bostur na Lovćenu Kš; Krstac kod Njeguša Gi, Ro).

* *Dianthus cruentus* Gris. Na subalpskim livadama: Njeguši (Ho).

* *Dianthus lateritius* Hal. Lovćen (Pt, PČ, Ba).

Dianthus ciliatus Guss. subsp. *dalmaticus* Čelak. Na kamenjaru, u grabovim šikarama i bukovim šumama: Brajići, Obzovica, Mirac i Njeguši; (Njeguši Ro);

* x *D. Sanguineus* x *silvestris* (*D. Caroli-Malý* Rohl.) Kunji do kod Njeguša (Pej, Ro).

Dianthus silvestris Wulf. subsp. *tergestinus* (Rchb.) Hay. U kamenjarskim zajednicama vegetacijskog reda Scorzonero-Chrysopogonetalia: rasprostranjena po podgorini i padinama Lovćena; (Krstac kod Njeguša Pej, Ro);

* subsp. *silvestris* subf. *micropetalus* Rchb., Njeguši (Ro);

* f. *elator* (Bartl.) Hay. subf. *papillosus* (Vis. et Panč.) Beck., Lovćen (Pč); Krstačko polje kod Njeguša (Ho);

* subsp. *bertisceus* Rech., Štirovnik (Sz).

* *Dianthus nicolai* Beck. Na subalpskom kamenjaru: padine Lovćena (Pej, Ro).

Drypis spinosa L. subsp. *linnaeana* Murb. Na točilima gdje je karakteristična za as. Drypetum linnacanae: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola, točilo iznad Jezera i Zveronjak: (Lovćen Pt, Ba, Ho, Ro, De, Si, Ja).

Silene vulgaris (Mch.) Garcke. subsp. *angustifolia* (Guss.) Hay. Na suvim livadama i ledinama: Padež iznad Vrela i Orlov krš kod Cetinja; (Cetinje Pč);

subsp. *vulgaris* (Gaud.) Hay., raste na istim staništima i nalazištima sa prethodnim subsp.

Silene quadridentata (Murr). Pers. subsp. *tommasinii* (Vis). Neum. Na točilima, kamenjaru i u pukotinama stijana: Štirovnik, Babljak, Jezerski vrh i Kapa; (oko Njeguša, Cetinja i na Lovćenu Pč, Ho, Ro, Ba).

* *Silene waldsteinii* Griss. (= *S. clavata* Rohrb.) Na kamenjaru Lovćena (Pč).

Silene multicaulis Guss. (*S. dalmatica* Scheele). Na točilima i u pukotinama stijana: Štirovnik i Babljak; (Štirovnik Vh).

Silene saxifraga L. subsp. *saxifraga*. Na kamenjaru i rudinama Štirovnika i Rujišta; (na Lovćenu česta je var. *macrocarpa* Beck.).

Silene noctiflora L. Na livadama i pašnjacima: Obzovica, Gornič blizu Cetinja i Njeguše; (oko Njeguša i Cetinja Pč).

Silene otites (L.) Sm. subsp. *otites*. Na kamenjaru u šumi bukve: Štirovnik i Podjezerske strane; (Njeguši Ro).

Silene reichenbachii Vis. Na pašnjacima, suvim livadama, kamenjaru i uz puteve: Duge njive iznad Bjeloša, Ivanova korita, Kapa, Bukovica i Njeguše; (padina Lovćena Pč; iznad Njeguša Ro, Kn).

Silene nutans L. Na rubu šuma i šikara crnog graba: po padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Lovćen Pč);

* subf. *livida* (Willd.) Otth., Krstac kod Njeguša (Ro).

Silene italica (L.) Pers. Na rubu grabovih šuma i šikara: Zabrdje kod Cetinja i Kapa iznad Njeguša; (padine Lovćena i Njeguši Ho, Ro).

Melandrium album (Mill.) Garcke subsp. *album*. U parkovima, uz mede i puteve: Obzovica, Cetinje, Ivanova korita i Njeguši.

** *Lychnis flos cuculi* L. Na vlažnim livadama i uz mede karakterističan za vegetacijski razred Molinio-Arrhenatheretea: Njeguši.

Agrostemma githago L. Korovni elemenat: rasprostranjena na području čitave planine i njene podgorine.

L A U R A C E A E

** *Laurus nobilis* L. Rijedko se nalazi po stranama iznad Kotora i Topliša kod Budve.

A R I S T O L O C H I A C E A E

Asarum europaeum L. U šumama i šikarama bukve gdje je karakteristična za vegetacijski red Fagitalia i svezu Fagion illyticum: padine Lovćena

* var. *intermedium* G. A. Mey., nalazi se zajedno s navedenom vrstom; (Njeguše Ro, Kn).

Aristolochia pallida Willd. U šumama i šikarama bijelog graba, a naročito je obilno rasprostranjena u šumi crnog graba i u šumi cera gdje je karakteristična za as. Seslerio-Ostryetum: po padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Cetinje Pč; Krstac kod Njeguša Ld, Ro; padine Lovćena Ro).

Astistolochia rotunda L. Uz puteve, međe i između grmova: okolina Cetinja i Njeguša; (Cetinje Ba).

B E R B E R I D A C E A E

Berberis vulgaris L. Na točilima i kamenjaru: točilo iznad Jezera i Jezerski vrh iznad Velikog Bostura; (Njeguši Pt, Pč, Ro, padine Lovćenca Ro);

* f. *subrotunda* C. K. Schneider. f. *heterophylla* Wierzb. et f. *horrida* Beck., iznad Njeguša (Ro);

* f. *macrophylla* Rohl., Lovćen (Ro).

R A N U N C U L A C E A E

* *Helleborus odoratus* W. K. subsp. *odoratus* f. *angustifolius* Beck. Kod Njeguša (Pej, Ro);

* *Trollius europaeus* L. Na alpskim i subalpskim travnjacima: Lovćen (Ba).

Nigella arvensis L. U usjevima i na travnjacima: Njeguši; (Cetinje Pč).

Nigella damascena L. Uz puteve, međe i usjeve: Markovići iznad Budvanskog polja i Cetinje; (Cetinje, Krstac kod Njeguša Ro).

Delphinium peregrinum L. U usjevima, oko kuća i uz puteve: Budvansko polje, Mirac i Obzovica; (Cetinje Pč, Ba).

* *Delphinium fissum* W. K. Na subalpskim travnjacima: Šavnik iznad Njeguša (Ro);

subf. *variegatum* (Sag.) Hay., Njeguši (Sa).

Consolida aiacis (L.) Schur. (*Delphinium a. L.*). Po vrtovima i međama: Mirac i Njeguši; (između Kotora i Njeguša Pej).

Consolida regalis S. F. Gray. subsp. *arvensis* (Opiz.) Soó. U usjevima i oko kuća: Obzovica, Vrela i Njeguši.

Actaea spicata L. U bukovim sastojinama i u škripovima: Tisove ploče i Ivanova korita; (Njeguši i padine Lovćena Ro).

Anemone apennina L. subsp. *apennina*. Vrlo česta u grabovijm šikarama: u masi raste u kontinentalnoj podgorini planine ali se može naći i u sastojinama bukove šume po padinama Stirovnika; (oko Cetinja i Njeguša Pč, Ba, Ce, Gi, Ro; padine Lovćena Pej, Heider).

Anemone nemorosa L. U šumama bukve, karakteristična je za vegetacijski red Fagetalia: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola i Tisove ploče; (Lovćen Pč).

* *Pulsatilla vulgaris* Miller subsp. *grandis* (Wend.) Zamel. (*Anemone pulsatilla* L.) Padine Lovćena (Pč).

Clematis vitalba L. U zajednicama vegetacijskog razreda Querc-Fagetea za koji je karakteristična: Zabrde kod Cetinja, okolina Njeguša i Gornji Grbalj;

f. *syriaca* Boiss. (=var. *taurica* Besser), međe i šikare; okolina Cetinja, Mirac i Vrela; (između Bukovice i Cetinja Kš).

Clematis flammula L. U garizima: Topliš kod Budve i Gornji Grbalj; (Cetinje Pč., Kn).

Clematis viticella L. Uz međe, u šikarama crnoga i bijeloga grada: primorske padine planine Zabrde i Orlov krš kod Cetinja; (Cetinje Pč, Kn; Njeguši Ro).

Thalictrum aquilegifolium L. U šumama i šikarama lovćenskih padina;

** f. *australe* Bornm., na rubu bukove šume; Padež iznad Obzovice.

Thalictrum elatum Jacq. U škripovima: Tisove ploče; (Lovćen Ro);

* var. *collinum* (Wallr.) Hay., padine Lovćena (Ro);

* f. *vestitum* Rohl. sub. *T. flexuoso*; Dugi do kod Njeguša (Ro);

* var. *glandulosum* (Velen.) Hay., Lovćen (Ro).

Thalictrum simplex L. f. *glanduligerum* Rohl. U parkovima i šikarama bjelograba: park „Njegoš” na Cetinju, Zabrde kod Cetinja; (Lovćen Kš; na Lovćenu su poznate i intermedijarne f. Ro).

Ficaria verna Huds. subsp. *caithifolia* (Rechb.) Velen. Na vlažnim livadama oko Cetinja i na Njegušima; (između Cetinja i Njeguša Ki; Njeguši Pej, Ro; Lovćen Bo).

Ranunculus millefoliatus Vahl. Na suvim livadama: Cetinjsko i Njeguško polje, Majstori, Dolovi i Ivanova korita; (Cetinje Pč, Ba; Čekanje između Cetinja i Njeguša Ki; Njeguše Ro; Lovćen To);

* var. *hirsutior* Rohl., Krstačko polje kod Njeguša (Ro).

Ranunculus illyricus L. Na rubu šikara crnoga graba i na rudinama. Ugnji blizu Cetinja, Štirovnika i Njeguši; (oko Njeguša i na Lovćenu Ld, Kš, Pej, Ro).

Ranunculus oreophyllus M. B. Subsp. *croaticus* (Schott.) Hay. Na točima i u bukovim šikarama; padine Štirovnika iznad Vučjeg dola, Međuvrša, i strane iznad Jezera; (Lovćen Pej Ro);

subsp. *oreophyllus* var. *velatus* Hal., na kamenjaru u šumi bukve iznad Vučjeg dola u pravcu Štirovnika; (Mirkovi dolovi na Lovćenu Ro);

* subsp. *concinatus* (Schott) Hay., na alpskim travnjacima; Lovćen (Ma, Pichler, Pej Ro).

Ranunculus polyanthemus L. subsp. *polyanthemus*. Na rubu bukovih šuma i šikara: Duge njive iznad Bjeloša, Ivanova korita i Kapa; (padine Lovćena Ro).

Ranunculus bulbosus L. Na suvim livadama i u grabovim šikarama: okolina Cetinja, Ivanova korita i Njeguši; Cetinje Kš);

f. *hirsutus* Saut. Cetinjsko i Njeguško polja; (Njeguško polje Ro).

** *Ranunculus neapolitanus* Ten. Na vlažnim livadama; okolina Cetinja i Njeguša.

Ranunculus marginatus Urv. var. *leiodiscus* (Boiss). Hay. Na vlažnim livadama: Cetinje kod ljetnje pozornice i Njeguši; (Cetinje Ba, Kš; Njeguši Ba, Ro).

Ranunculus muricatus L. Na suvim livadama: Brajići, Ugnji i Zabrde kod Cetinja; (Cetinje Če).

Ranunculus arvensis L. U usjevima: rasprostranjena na padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Cetinje Pt; iznad Njeguša Ho, Ro).

Ranunculus paucistamineus Tsch. Jezero na Lovćenu; (Lovćen Ro).

Ranunculus sardous Cr. Pašnjak uz cestu: Njeguši; (Cetinje Pč).

PAPAVERACEAE

Chelidonium maius L. Ruderalni elemenat u as. Urtico-Sambucetum ebuli: Gornji Grbalj, Brajići, Bjeloši i Cetinje; (Cetinje Pč, Kn; Njeguši Ro; Lovćen To);

* f. *micropetalum* Murr. „Goli rti” na Lovćenu (Pej, Ro);

* f. *hypotrichum* Azn., Kućišta kod Njeguša, Ljeskova rupa i Donja dolina u podnožju Lovćena (Pej, Ro).

Papaver rhoeas L. Korovni elemenat: Bjeloši, Bajice kod Cetinja i Njeguši; (Njeguši i Cetinje Pt).

Papaver dubium L. var. *collinum* (Bogenh.) Fedde. Oko kuća i u voćnjacima: Bjeloši i Cetinje; (Njeguši Pč).

* *Papaver argemone* L. Uz puteve i u kulturama; Cetinje (Ba); Lovćen (To).

* *Papaver somniferum* L. U voćnjacima i oko kuća raste samoniklo: Cetinje.

Corydalis solida (L.) Sw. subsp. *densiflora* (Presl.) Hay. U raznim šikarama i na kamenjaru: Padež iznad Vrela, Bjeloške paprati i Cetinje; (u podnožju Lovćena Ro).

* *Corydalis ochroleuca* Koch. subsp. *leiosperma* (Conr.) Hay. U podnožju Lovćena (Ro).

** *Corydalis cava* (L.) Hay. subsp. *blanda* (Schott.) Hay. (*C. pseudo-cava* Pant.). Na vlažnoj oranici i uz rub bukove šume: Ivanova korita blizu planinarskog doma.

** *Corydalis pumila* (Host.) Rechb. U šikarama crnoga graba: Donji kraj kod Cetinja.

Fumaria rostellata Knaf. Ruderalni i korovni elemenat: Mirac, Čavori i Brajići; (Žuta greda u podnožju Lovćena Pej, Ro).

Fumaria officinalis L. Korov karakteristična za vegetacijski red Chenopodietalia: rasprostranjena po padinama i podgorini Lovćena; (Cetinje Pč. Njeguši Ro).

Fumaria capreolata L. U šikari crnoga graba: Zabrdre kod Cetinja; (između Kotora i Njeguša Pej, Ro).

CRUCIFERAE

Sisymbrium orientale Torn. U vrtovima i u parku „Njgoš” na Cetinju; (oko Cetinja Pč).

Chamaeplium officinale (L.) Wallr. (*Sisymbrium o. Scop.*). Oko kuća i uz puteve: Obzovica i Bjeloši.

Erysimum silvestre (Cr.) Scop. subsp. *linearifolium* (Tsch.) Hay. Na rudinama i rubovima bukovin šuma i šikara: Gornič, Dolovi i Štirovnik; (Njeguši Ho, Ki, Ro; Bukovica Ro).

Barbarea vulgaris R. Br. subsp. *vulgaris*. Uz međe, oko kuća i uz puteve: Obzovica, Cetinje i Njeguši; (Njeguši Ro).

Barbarea bracteosa Guss. Na vododerinama u šumi bukve i oko kuća: Ugnji, Gornič i Štirovnik.

* *Roripa austriaca* (Cr.) Bess. f. *scabrida* Rohl. Njeguši (Ro).

Roripa silvestris (L.) Bess. Na livadama, uz puteve i na ledinama: Ugnji, Bjeloši, Cetinje i Trešnja; (Cetinje Pč, Ba; Njeguši, Lovćen Ro);

var. *arcuata* Bagn., uz puteve i na rubu kaldrmisanih ulica; Cetinje i Njeguši; (Kstačko polje kod Njeguša Pej, Ro).

Roripa pyrenaica (L.) Rechb. subsp. *lippizensis* (Wulf.) Hay. Na livadama, oranicama i ledinama: rasprostranjena na čitavom području planine i njene podgorine.

** *Nasturtium officinale* R. Br. Uz potoke koji teku kroz garig Cisto Ericetum arboreae: Topliš kod Budve.

Cardamine glauca Spreng. Na pašnjačkim kamenjarima i u pukotinama stijena: Riječke strane kod Brajića, padine Lovćena prema moru, okolina Cetinja, Njeguša i Ivanova korita;

* f. *longirostris* Rohl., padine Lovćena (Ro); Cetinje (Če).

Cardamine carnosa W. K. Na točilima i uz rub bukove šume: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola i na Babljaku; (na Lovćenu sabrao, prema navodima Rohlena, Fr. Maly).

Cardamine graeca L. Oko kuća i uz zidine: uz put od Brajića do Cetinja; (Cetinje Biasoletti).

Cardamine impatiens L. Na kamenjaru i u prorijeđenoj šumi i šikari bukve: Padež iznad Vrela i Trešletenik; (Lovćen Kš, Pej).

Cardamine hirsuta L. Na kamenjarima i u šikarama crnoga graba: Zabrdje kod Cetinja i Bukovica iznad Njeguša; (Njeguši Pt).

Cardamine bulbifera (L.) Cr. U šumama i šikarama bukve gdje je karakteristična za as. Fagetum silvaticum: svuda po padinama Lovćena: (Lovćen, Pč, Ro, To);

* subf. *grandiflora* O. E. Schulz., Lovćen (Ro);

* f. *ptarmicifolia* O. E. Schulz., Lovćen, prelazna forma (Ro).

Arabisidopsis thaliana (L.) Schur. (*Arabis th.*, L.). U usjevima i uz međe: Brajići, Mirac i Njeguši; (Njeguši Pč).

Turritis glabra L. Na kamenjaru i u šikarama crnoga graba: Padež iznad Vrela i Obzovice; (padine Lovćena Pč, Ro).

Arabis alpina L. subsp. *alpina*. Na točilima i kamenjaru: točilo iznad Jezera; (Lovćen Ro).

Arabis turrita L. Čest elemenat bukovih šuma: Rujišta, Konjsko, Duge njive iznad Bjeloša i Bjeloške paprati; (Cetinje, Njeguši Ro; padine Lovćena Kš).

* f. *lasiocarpa* Nechtz., Bostur na Lovćenu (Kš).

Arabis verna (L.) R. Br. Na zapuštenim mjestima i uz puteve: uz put od Brajića do Vrela; (između Kotora i Njeguša Ro).

Arabis hirsuta (L.) Scop. subsp. *hirsuta*. Na kamenjaru i u šumama bukve: Majstori i sjeveroistočne padine Štirovnika, Babljak i Golo brdo iznad Njeguša; (Njeguši Ro, Gi; Cetinje Eb, Ro);

var. *sagittata* (Bert.) Rechb., u šumi bukve; Majstori; (Cetinje Ro).

Arabis muralis Bert. Na kamenjarima u šumi bukve: Padež, Šavnik i Kapa; (Lovćen Ho) između Cetinja i Njeguša Ld, Gi, Ki, Ro).

Alliaria officinalis Andrz. Čest elemenat ruderalne vegetacije: Obzovica, Cetinje i Njeguši; (Lovćen To, Kš).

Bunias erucago L. Na livadama, ledinama i oranicama: Obzovica, Njeguši, Cetinje i Mirac; (Cetinje Pt, Pč. Ro; Njeguši Pč, Ro);

subf. *integrifolia* Koch., park „Njeguši” na Cetinju; (Cetinje Kš).

* *Isatis tinctoria* L. var. *vulgaris* Koch. Na kamenjaru kod Njeguša (Ro).

* *Hesperis silvestris* Cr. var. *siliquo glandulosa* Rohl. U šumama na padinama Lovćena naspram Njeguša (Ro).

** *Hesperis matronalis* L. subsp. *matronalis*. U šumi crnoga graba: Zabrdje kod Cetinja;

* subsp. *cladotricha* (Borb.) Hay. f. *psilocalyx* Beck., Mirkov do kod Njeguša (Ro);

* var. *lapsanifolia* Borb., Zalazi kod Njeguša (Pej, Ro).

* *Hesperis glutinosa* Vis. var. *Visianii* (Fourn.) Hay. između Kotora i Njeguša (Pej, Ro).

Malcolmia maritima (Jusl.) R. Br. var. *serbica* (Panč.) Beck. Na kamenjaru i uz ceste: Bukovica i Jezerski vrh; (padine Lovćena iznad Njeguša Pč, Ho; Krstac kod Njeguša Pej, Ro, Ki, Ja).

Berteroa gintlilii Rohl. Uz zidine i na rubu šikara crnoga graba: Brajići i Njeguši; (Njeguši Ro).

* *Berteroa obliqua* (S. S.) Hal. Na suvim mjestima kod Njeguša (Ba).

Berteroa mutabilis (Vent.) DC. Oko kuća, uz puteve i zidine: rasprostranjena svuda na području lovćenske kontinentalne podgorine; (Njeguši Pt, Pč, Ro; Cetinje Ba, Pč, Kn); var. *cyclocarpa* (Beck.) Hay., Njeguši; (Njeguši Ro);

* var. *viridis* (Tsch.) Hay., Njeguši (Ro).

Alyssum campestre L. U šikari crnoga graba i na kamenjaru: Čavori, Poda i Bajice kod Cetinja; (Njeguši Ro).

Alyssum alyssoides L. Uz puteve, zidine i na kamenjaru: Brajići, Mirac i Cetinje; (Cetinje Pč, Ba; Njeguši Ro).

Alyssoides utriculatum (L.) Med. var. *graecum* (Reut.) Hay. Na kamenjaru: Krstac kod Njeguša (Gi).

Draba elongata Host. DC. (*lasiocarpa* var. *elongata* Hay.). Na rudinama i kamenjaru: Štirovnik, Babljak i Jezerski vrh; (na Lovćenu je f. koja prelazi ka var. *bosniacum* Beck; Ro, Bo);

* f. *semiglabra* Beck., Lovćen (Ro);

* subsp. *balcanica* O. E. Schultz., Lovćen (Bo, Vh, Pichler).

Draba muralis L. Uz zidine i na drugim zapuštenim mjestima: Krstačko polje kod Njeguša, Mirac; (Njeguši Pt, Ro; između Njeguša i Cetinja Ld, Če, Bo).

Draba verna L. Na livadama, pašnjacima i pašnjačkim kamenjarima: Cetinjsko polje, Njeguši i Dolovi;

subsp. *spathulata* (Lang.) Rohl., zajedno s vrstom;

* subsp. *obconica* (De Bary) Hay., Krstac kod Njeguša (Ro).

Diploaxis tenuifolia (Jusl.) DC. Uz puteve i oko kuća: Brajići, Ugnji, Bukovica i Šavnik; (Bukovica blizu Cetinja Ro).

Brassica nigra (L.) Koch. var. *laevigata* (Burm.) Alff. U voćnjacima i u parku „Njegoš” na Cetinju; (Njeguši Pej, Ro).

* *Brassica campestris* L. Uz put između Njeguša i Kotora, Bukovica blizu Cetinja (Pej, Ro).

Sinapis arvensis L. Oko kuća i na okopavinama: Bajice kod Cetinja i Njeguše; (Cetinje Pč, Njeguši Ro);

f. *schkuhriana* (Rechb.) Hagenb., Cetinje; (Dubovik Pej, Ro).

* *Eruca sativa* L. var. *longirostris* (Uechtr.) Rouy. U kulturama: Krstačko polje kod Njeguša (Pej, Ro).

Raphanus sativus L. Na livadama i oko kuća: Brajička dolina, Cetinjsko i Njeguško polje.

Lepidium graminifolium L. Na livadama i u usjevima: Mirac i Njeguši; (Njeguši, Cetinje Pč).

Lepidium ruderales L. Uz međe, puteve i oko kuća: Poda, Brajići, Cetinje i Obzovica; (Cetinje Pč).

Lepidium campestre (L.) R. Br. Čest ruderalni elemenat: Bjeloši i Umci kod Cetinja; (Njeguši Ro).

** *Coronopus squamatus* (Forsk.) Ascherson. Ruderalni elemenat: Topliš kod Budve, Gornji Grbalj i Cetinje ispred manastira.

Cardaria draba (L.) Desv. (*Lepidium d. L.*) ruderalni elemenat, karakterističan za vegetacijski razred Chenopodietea: Lovćen i njegova kontinentalna podgorina; (Cetinje Pč, Njeguši Ro).

Iberis sempervirens L. Karakteristična vrsta zajednice Carici-Seslerietum robustae: Štirovnik, Treštenik, Jezerski vrh, Majstori.

Aethionema saxatile (L.) R. Br. subsp. *saxatile*. Na kamenjarima i u pukotinama stijena: rasprostranjena svuda po padinama Lovćena i njegovoj podgorini;

subsp. *graecum* (Boiss. Heldr.) Hay., rasprostranjena zajedno s vrstom; Brajići, Majstori i Bukovica; (Cetinje Če).

Thlaspi praecox Wulf. Na kamenjarima i ledinama: Majstori, Dolovi i Ivanova korita; (Bajice kod Cetinja Gi, Ro; Njeguši Ro);

* subf. *viridisepalum* Podpera., Kućišta kod Njeguša (Pej, Ro).

Thlaspi perfoliatum L. Na oranicama, uz međe i puteve: Obzovica i Njeguši; (Njeguši Ro).

Peltaria alliacea Jacq. Na kamenjaru u šumi bukve, a ponegdje u pukotinama stijena: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola i Rujišta; (Njeguša Ro);

* f. *brevipedicellata* Rohl., Pješiva kod Njeguša (Ro).

Hornungia petraea (L.) Rechb. (*Hutschinsia p. R. Br.*). Na kamenjaru i pašnjacima: Vrela, Cetinje i Bukovica; (Cetinje Ld, Če, Ki; Njeguši Ro).

Capsella bursa pastoris (L.) Munch. Vrlo čest ruderalni elemenat, rasprostranjena na čitavom području planine i njene podgorine.

Capsella rubella Reut. Elemenat ruderalne vegetacije karakterističan za vegetacijski razred Chenopodietea: Brajići, i Gornji Grbalj; (između Cetinja i Belvedera Ld).

RESEDACEAE

Raseta phyteuma L. Na livadama i ledinama: Obzovica, Bajice kod Cetinja i Njeguši; (Cetinje Pč; Njeguši Ro).

Reseda lutea L. U parkovima, voćnjacima i uz puteve, karakteristična za vegetacijski razred Chenopodietea: Vrela, Cetinje, Dolovi i Njeguši; (Cetinje Pt; Krstac, Bukovica blizu Njeguša Ro);

subf. *crispa* J. Muell., Njeguši; (između Bukovice i Cetinja Ro);

* f. ad var. *gracilis* (Ten.) G. G. vergens., Bukovica blizu Cetinja i Njeguši (Ro).

CISTACEAE

** *Cistus salviaefolius* L. Elemenat gariga gdje je karakterističan za as. Cisto-Ericetum arboreae: Topliš kod Budve i Gornji Grbalj.

Helianthemum ovatum (Viv.) Dun. subsp. *hirsutum* (Thuill.) Hay. var. *obscurum* (Pers.) Hay. Na pašnjačkim kamenjarima gdje je karakteristična za vegetacijski red Scorzonero-Chrysopogonetalia: na lovčenskim padinama i podgorini; (Velji vrh blizu Njeguša Ro);

* subf. *angustifolium* (Willk.) Hay., Lovćen (Ro);

f. *stellatum* (Beck.) Hay., na kamenjaru; Kapa iznad Njeguša; (Lovćen Pej, Ro);

* var. *litorale* (Willk.) Janch., Krstac blizu Njeguša (Ja).

Helianthemum canum (L.) Baumg. Na pašnjačkim kamenjarima as. Genisto-Globularietum bellidifoliae: iza Padeža, Majstori, Duge njive i Krst iznad Bjeloša; (Lovćen Ba, Ro);

** var. *balcanicum* Janch., zajedno s tipom dolazi na istim staništima i nalazištima.

Helianthemum italicum (L.) Pers. Na kamenjaru u šumi bukve, kao i predhodna vrsta: Majstori, Duge njive i Gornič; (Lovćen Pej, Ro);

* (između Cetinja i Njeguša f. $\mp$ ad var. *hercegovanicum* Grosser verg. Če; Lovćen Pej, Ro).

Helianthemum alpestre (Jacq.) DC var. *thessalum* (Boiss. et Orph.) Gross. Na pašnjačkim kamenjarima as. Genisto-Globularietum bellidifoliae: Rujišta, Majstori, Dolovi, Krst iznad Bjeloša; (između Njeguša i Cetinja Ld).

Fumana vulgaris Spach. Na kamenjarima zajednice Stipo-Salvietum officinalis: Šišići i Čavori iznad Gornjeg Grblja, Mirac; (Kstac blizu Njeguša Ro).

VIOLACEAE

Viola odorata L. Sjenovita mjesta u kamenjaru, u grabovim šikarama i bukovim šumama: Lovćen i njegove padine; (Cetinje Pč; Njeguši Ro, Ba).

Viola silvestris Lam. U raznim šumama i šikarama planine, karakteristična za vegetacijski razred Querco-Fagetea: svuda se nalazi na području Lovćena; (oko Njeguša Ro; Lovćen Ro).

Viola biflora L. Na kamenjaru i točilima: strane iznad jezera i točila Štirovnika; (Lovćen Ba, Pej, Ro).

* *Viola gracilis* S. S. Na alpskim pašnjacima i kamenjaru: za Lovćen je zabilježio Baldacci, međutim, Rohlena i drugi istraživači nijesu nalaz potvrdili.

Viola saxatilis Schmidt. subsp. *aetiologica* (Boiss. et Heldr.) Hay. Na livadama, u šikarama i uz međe: Zabrdje kod Cetinja, Duge njive iznad Bjeloša i Njeguši; (Dubovik kod Cetinja Gi; Njeguši Pej, Ro).

Viola arvensis Murr. Na livadama, uz međe, puteve i u usjevima: Gornji Grbalj, Obzovica, okolina Cetinja i Njeguša; (Cetinje Pč).

Viola kitaibeliana R. S. Uz puteve i međe: Njeguši i Bukovica; (Njeguši Ro).

TAMARICACEAE

** *Tamarix africana* Peir. Često se sadi oko kultura kao vjetrobran, a ponegdje se nađe i samonikla: Gornji Grbalj, Kotor, Budva.

CUCURBITACEAE

Bryonia dioica Jacqu. Uz ograde, međe i zidine: Gornje polje kod Njeguša; (Njeguši Pč).

GUTTIFERAE

** *Hypericum perforatum* L. subsp. *angustifolium* (DC). Gaud. Nađena u Parku „Njegoš” na Cetinju.

Hypericum hirsutum L. U šumama i šikarama bukve: Rujišta, Konjsko i Tisove ploče; (padine Lovćena, Bogojeva glava blizu Njeguša Ro).

Hypericum alpinum W. K. Na kamenjaru i uz rubove bukove šume: padine Treštenika prema Dolovima i Ivanova korita; (Lovćen Ba).

Hypericum barbatum Jacq. var. *trichanthum* (B. Spr.) Boiss. Na pašnjačkim kamenjarima i suvim livadama: Dolovi, Ivanova korita, Mali i Veliki Bostur; (Lovćen VH, Ro);

* subvar. *epirotum* Hal., Lovćen (Ro);

* *H. barbatum* Jacq., Lovćen (Ro).

MALVACEAE

Hibiscus trionum L. Ruderalni elemenat: Čavori i Mirac; (Velji kraj blizu Njeguša Pej, Ro).

Malva moschata L. Na rubu bukove šume i na livadama: Duge njive iznad Bjeloša i Ljubin potok na Ivanovim koritima; (padine Lovćena, Pč, Ba, Pej, Ro);

f. *laciniata* Vis., na livadi; Ivanova korita; (Mali Šavnik u pdnožju Lovćena Ro).

Malva silvestris L. Ruderalni elemenat; svuda po padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Njeguši Pč, Sz, Ro);

f. *hispidula* Beck., raste zajedno s tipom; (Njeguši Gi, Ro; Šavnik Ro);

* f. *eriocarpa* Boiss., Krstac kod Njeguša (Pej, Ro).

Malva ambigua Guss. Oko kuća, uz puteve i usjeve: Brajići, Obzovica i Cetinje; (Bajice kod Cetinja Kš).

Lavatera thuringiaca L.: Uz puteve i na travnjacima: Cetinje (Ba);

* var. *bulgarica* Velen., između Kotora i Njeguša (Ro).

Lavatera ambigua DC. Oko kuća, uz puteve i ograde: Brajići, Mirac i Njeguši; (Njeguši Kn, Pej).

Althaea hirsuta L. Na pašnjačkom kamenjaru, uz put od Bukovice do Kape; (Njeguši Pč).

Althaea cannabina L. Na livadama, ledinama i u voćnjacima: Brajići i Njeguši; (Velji kraj kod Njeguša Pej, Ro).

TILIACEAE

Tilia tomentosa Mch. U parkovima, rijetko u šikari crnoga graba: Zabrdje kod Cetinja i Njeguši; (Cetinje Pč, Ba; Njeguši Ro).

Tilia cordata Mill. U nasadima, uz kuće: Njeguši; (Njeguši Ro).

LINACEAE

** *Linum nodiflorum* L. Na kamenjaru u garizima: Topliš kod Budve i Gornji Grbalj.

Linum tenuifolium L. Na pašnjačkim kamenjarima, karakteristična za vegetacijski red Scorzonero-Chrysopogonetalia: Šišići, Brajići, Umci, Bjeloši, Orlov krš kod Cetinja i Njeguši; (Cetinje Kš, Kn; Njeguši Ro);

f. *pubescens* Wohlf., na kamenjaru raste zajedno s vrstom (Njeguši Ro).

Linum angustifolium Huds. Na kamenjaru i rubovima grabovih šikara: Vrela i Gornji Grbalj ispod Kupe.

Linum montanum Schl. f. *illyricum* Beck. Na rudinama, rjeđe na pašnjačkim kamenjarima: Kapa, Padine Jezerskog vrha i Štirovnika; (iznad Cetinja Pč; Lovćen Ho, Ro).

Linum catharticum L. subsp. *suecicum* Hay. Na livadama, rudinama i pašnjačkim kamenjarima: Štirovnik, Majstori, Cetinjsko i Njeguško polje; (Cetinje Kn; Njeguši Ro; Lovćen Ho).

OXALIDACEAE

Oxalis acetosella L. U šumama bukve: Tisove ploče, Treštenik, padine Štirovnika i Trešnja; (Lovćen Kš, Pej).

Oxalis corniculata L. Oko kuća i uz puteve: Brajići i Njeguši; (Njeguši Ro)

GERANIACEAE

Geranium phaeum L. Uz međe i u šikarama bukve: uz put od Dolova do Majstora; (Lovćen To).

* *Geranium reflexum* L. U šumama i livadama subalpske i alpske regije: na Lovćenu je rijetka (Pej, Ro).

Geranium villosum Ten. Na suvim livadama i uz zidine: Obzovica i okolina Cetinja: (Belveder kod Cetinja Ld, Bo, Če; Njeguši Ro).

Geranium molle L. Na livadama, uz puteve, između grmova i oko kuća: rasprostranjena po padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Cetinje Pč).

Geranium pyrenaicum Burm. Vrlo rasprostranjena tako da se može skoro svuda naći na livadama, između grmova, uz zidine i oko kuća; (Cetinje Pč; Njeguši Ro; Bostur na Lovćenu Kš).

Geranium pusillum L. Na kamenjarima i u ruderalnoj vegetaciji: Brajići, Obzovica, Vrela i Cetinje; (Cetinje Pč).

Geranium sanguineum L. U šikarama crnoga graba gdje je kataristična za vegetacijski red *Quercetalia pubescentis*: Umci kod Cetinja, Padež iznad Vrela poda i Njeguši; var. *latipartitum* Petunikov., vododerina u šikari; Erakovići kod Njeguša; (Lopatin do kod Njeguša Ro);

var. *villosum* Murr., u šikari bjelograba; Umci kod Cetinja; (Kračeva glavica kod Njeguša Pej Ro).

Geranium columbinum L. Na pašnjačkim kamenjarima i u šikarama crnoga graba: svuda po padinama i podgorini Lovćena.

* *Geranium macrorrhizum* L. subsp. *macrorrhizum* f. *perrugosum* Rohl. Na kamenjaru i u šikarama subalpske regije: padine Lovćena, Vršanj i Presjeka kod Njeguša (Pej, Ro).

Geranium lucidum L. Na zidinama, u pukotinama stijena, uz međe i oko kuća: Brajići, Cetinje, Ivanova korita, Trešnja, Šavnik i Njeguši; (oko Njeguša Sz, Ro; Lovćen Ho, Ro).

Geranium purpureum Vill. Na kamenjaru i u raznim šikarama: Čavori, Mirac, Vrela i Zabrde kod Cetinja; (Cetinje Kn).

Geranium robertianum L. Čest elemenat as. *Fagetum montenegrinum*: Majstori, Tisove ploče, padine Štirovnika i Treštenika; (Cetinje Pč, Njeguši, Ba, Pej).

Erodium cicutarium (L.) L' Hér. Na zidinama i ledinama: Cetinje, Majstori, Padež, Cetinje, Njeguši.

RUTACEAE

Ruta graveolens L. var. *divaricata* (Ten.) Willk. Na kamenjaru: Nađena je na jugoistočnim padinama Treštenika na visini 1400 m, i uz obalu mora na stranama brda Sv. Spasa kod Budve; (oko Njeguša i padine Lovćena Kš, Pej, Ro).

Dictamnus albus L. U garizima i šikarama bijelog graba: Topliš i brdo Sv. Spas kod Budve i padine Lovćena ispod Mirca i oko Čavora; (u podnožju Lovćena Pč).

POLYGALACEAE

** *Polygala nicaeensis* Rissó subsp. *mediterranea* Chod. U garizima, šikarama bjelograba i na kamenjaru: Gornji Grbalj i Kapa iznad Njeguša;

* f. *flaviflora* Rohl., padine Lovćena naspram Njeguša (Ro).

Polygala comosa Schk. Na livadama i pašnjacima: Majstori, Dolovi i Cetinjsko polje; (Cetinje Pč).

Polygala vulgaris L. subsp. *vulgaris*. Na pašnjačkim kamenjarama i u raznim šikarama; vrlo česta na čitavom području Lovćena; (Njeguši, Cetinje Ld).

Polygala alpestris Rechb. subsp. *croatica* (Chod.) Hay. Na kamenjaru u šumi bukve i u prorijeđenoj bukvoj šikari: uz put od Ivanovih korita do Majstora i Kapa; (Lovćen Ho).

ANACARDIACEAE

** *Pistacia terebinthus* L. u as. gariga Paliuretum adriaticum za koju je karakteristična, a ponegdje se nađe i u šikarama bjelograba: Gornji Grbalj, Donji Pobori, Šišići, Obzovica i Ugnji.

** *Pistacia lentiscus* L. U garizima gdje je karakteristična za vegetacijski razred Quercetea ilicis: Topliš kod Budve i Gornji Grbalj.

Cotinus coggygria Scop. U grabovim šumama i šikarama gdje je karakteristična za vegetacijski red Quercetalia pubescentis: Orlov krš, Đinovo brdo kod Cetinja, Obzovica, Rujišta i Trešnja iznad Njeguša; (Cetinje Pč; Njeguši Ro).

ACERACEAE

Acer pseudoplatanus L. U šumama i šikarama bukve gdje je karakterističan za vegetacijsku svezu Fagion illyricum: Tisove ploče; Veliki Bostur, Padež i Gornič; (padine Lovćena Pej, Ro).

Acer obtusatum Kit. U šikari crnoga graba i u bukovim šikarama: Umci, Zabrđe kod Cetinje i Tisove ploče; (Cetinje Ba).

Acer monspessulanum L. U grabovim šumama i šikarama, karakterističan je za vegetacijsku svezu Ostryo-Carpinion orientalis: Gornji Grbalj, Čavori, Mirac, Vrela, Zabrđe kod Cetinja i Njeguši; (Cetinje Pč; Njeguši Gi, Ld); var. *illyricum* Tsch., Njeguši; (Njeguši Ro).

Acer campestre L. subsp. *campestre*. U šumama i šikarama, karakteristična je za vegetacijski razred Querco-Fagetea: Brajići, Ugnji, Vrela i Gornji Grbalj;

f. *collinum* Wallr., rasprostranjena zajedno s vrstom.

AQUIFOLIACEAE

Ilex aquifolium L. Na području Lovćena odnosno njegovoj podgorini vrlo je rijetka i nađena je jedino uz cestu kod Obzovice: (Velje osoje i Ivanov laz na padinama Lovćena Pej, Ro).

CELASTRACEAE

Evonymus verrucosa Scop. U šumama i šikarama vegetacijskog razreda Querc-Fagetea: Obzovica, Zabrdje, i Njeguši; (Njeguši Kš, Pej; Lovćen Ro).
f. *laevifolia* Beck., Njeguši; (Njeguši Ro sub. var. „latifolia”).

Evonymus vulgaris Mill. (*E. europaeus* Scop.) U šumama i šikarama crnoga graba, i u bukovim sastojinama: Obzovica, Zabrdje kod Cetinja, Njeguši i Tisove ploče; (Njeguši Ro);

* f. *scaberula* Beck., Njeguši (Ro);

* f. *diversifolia* Rohl., Ljuta kod Njeguša (Pej, Ro).

STAPHYLACEAE

Staphylea pinnata L. U šikarama crnoga graba: Čavori, Obzovica Zabrdje kod Cetinja; (Lovćen Pč).

RHAMNACEAE

Paliurus spina — christii Mill. (*P. australis* Gärtn.). U garizima, karakterističan za as. Paliuretum adriaticum: Gornji Grbalj i primorske padine Lovćena; (Cetinja Ba).

Rhamnus catharticus L. U šumama i šikarama graba gdje je karakteristična za vegetacijski red Quercetalia pubescentis: rasprostranjena po padinama i podgorini Lovćena (Cetinja Pč).

* *Rhamnus orbiculatus* Bornm. U šikarama i na kamenjarima: padine Lovćena i oko Njeguša (Kš, Pj, Ro).

Rhamnus saxatilis Jacqu. U degradiranim sastojinama crnoga graba: Brajići, Obzovica i Vrela.

Rhamnus intermedius Steud. et Hochst. Karakteristična vrsta as. Paliuretum adriaticum: Gornji Grbalj i primorske padine Lovćena; (Cetinja Ba).

Rhamnus falax Boiss. Uz zidine, u šumi i šikarama bukve: Tisove ploče, Bjeloši, padine Štirovnika i Kapa.

Rhamnus rupestris Scop. Na kamenjaru i u šikarama crnoga graba: Zabrdje i Đinovo brdo kod Cetinja, Bukovica kod Njeguša i Njeguši; (Cetinja Pč; Lovćen Ad; Lovćen, Njeguši Ro; Čekanje Gi);

f. *maior* (Beck) Hay. Njeguši; (Njeguši Ro).

VITACEAE

Vitis vinifera L. Samonikla uz zidine i bunjišta: Orlov krš kod Cetinja, a u primorskoj podgorini, u kulturama i samonikla.

CRASSULACEAE

* *Sempervivum glaucum* Ten. (*S. schlehani* Rohl.). Na subalpskom kamenjaru: Golica, Bogojeva glava iznad Njeguša i Lovćen (Ro).

Sedum magellense Ten. U pukotinama stijena, krčevinama i na kamenjaru: padine Štirovnika, Babljaka, Treštenika i Jezerskog vrha; (Lovćen Brandis).

Sedum acre L. var. *neglectum* (Ten.) Vis. Na kamenjaru as. *Stiposylvetum officinalis*: Šišići, Čavori, Brajići i Mirac; (Cetinje, Lovćen Kš, Ro);

* subsp. *rohlena* Dom., Njeguši (Ro); Lovćen (Sk).

Sedum boloniense Lois. Na kamenjaru i u raznim šikarama: padine Lovćena; (Lovćen Pč, Kš, Ro, Ad; Njeguši Sz, Ro).

Sedum ochroleucum Chaix. Na kamenjaru, točilima i pašnjacima: padine Jezerskog vrha, Vjetreni mlin kod Dolova, Padež i Zabrdje kod Cetinja; (padine Lovćena Pč, Ad, Kš, Nej, Ro; Cetinje Ro).

Sedum grisebachii Heldr. (*S. racemiferum* Hal.). Na kamenjaru: Majstori: (Lovćen Ad.).

Sedum glaucum W. K. (*S. hispanicum* S. S.). U pukotinama stijena, na kamenjaru i točilima: točilo iznad Jezera, Njeguši i Gornji Grbalj.

Cotyledon pendulinus (DC.) Batt. U pukotinama stijena. na kamenjaru i u šikari crnoga graba: Brajići i Riječke strane kod Brajića, padine Lovćena iznad Poda i Mirac; (Cetinje Kn).

SAXIFRAGACEAE

Saxifraga rotundifolia L. Čest elemenat bukovih šuma, šikara i krčevina u višojem pojasu: Tisove ploče, Treštenik, Babljak, Štirovnik, Golo brdo, Jezerski vrh i Krst iznad Bjeloša;

f. *hirsuta* Sternb., nalazi se zajedno s vrstom.

Saxifraga bulbifera L. Na livadama, pašnjacima i kamenjaru: Gornje polje kod Njeguša i Bjeloši: (Cetinje Pč; Krstac kod Njeguša Ld).

Saxifraga granulata L. Na kamenjaru u šumi bukve: Konjsko, Tisove ploče i uz put od Dolova do Majstora; (Lovćen Pej, Ro).

Saxifraga tridactylites L. Na kamenjaru u šikari crnoga graba: Orlov krš i Đinovo brdo kod Cetinja, Vrela i Padež; (Cetinje Pč, Njeguši Ro).

* *Saxifraga adscendens* L. subsp. *blavii* (Engl.) Hay. Na alpskim travnjacima i kamenjaru: Lovćen (De, Si);

* f. *minor* Beck., Lovćen (Ro).

Saxifraga media Gouan. subsp. *porophylla* (Bertol.) Hay. U pukotinama stijena i na kamenjaru; padine Padeža, Štirovnika, Babljaka i Treštenika; (Hum blizu Cetinja Ma; Lovćen Biasoletti, Pej, Ro Velje osoje iznad Njeguša Pej, Ro).

Saxifraga crustata Vest. U pukotinama stijena, na rudinama i kamenjaru najviših vrhova Lovćena; (Lovćen Ba).

Ribes alpinum L. U pukotinama stijena i škripovima: Tisove ploče, Padež iznad Vrela, padine Štirovnika, Treštenika i Jezerskog vrha; (Ivanov laz na Lovćenu Ro).

* *Ribes petraeum* Wulf. U alpskim i subalpskim šikarama: Cetinje (Ba).

ROSACEAE

Aruncus silvester Kostel. Vododerine u šumi bukve: Podjezerske strane, Trešnja i padine Štirovnika iznad Međuvršja; (Trešnja, Lovćen Ro).

Filipendula hexapetala Gilib. Na livadama i rubovima bukove šume: Majstori, Bjeloši i Njeguši; (Njeguši Ro; Lovćen To).

Rubus idaeus L. Čest elemenat bukovih šuma, šikara i krčevina: svuda po padinama Štirovnika, Treštenika, Ivanova korita, Rujišta i Majstori; (padine Lovćena, Donja Krivača blizu Njeguša Ro).

Rubus ulmifolius Schott. subsp. *dalmatinus* (Tratt). Focke. Mede, ograde i šikare bijelog i crnoga graba: Brajići, Bjeloši, okolina Cetinja i Njeguši; (Njeguši, Cetinje Pč).

Rubus tomentosus Borkh. var. *canescens* Wirtg. Uz mede i između grmova: Mirac i Njeguši; (Njeguši Sz, Ro);

var. *glabratus* Godr., uz put preko Bukovice; (Bukovica Ro);

* f. *cinereus* (Rchb.) Focke., Njeguši (Ro).

* *Rubus divergens* P. J. Muell. f. *supertomentosus* Hruby. Valac rupe u podnožju Lovćena (Pej, Ro).

Fragaria vesca L. U šumama i šikarama graba, bukve i u sjenci kamenjara u bukovoj šumi: Obzovica, Padež iznad Vrela, Stanjevići iznad Pobora, Tisove ploče i Majstori; (Cetinjsko polje Ba).

** *Fragaria elatior* Ehrh. (F. *moschata* Duch.) U šumama i šikarama crnoga graba, a ponegdje i u šumama bukve: Obzovica, Zabrđe kod Cetinja, Poda i Mirac.

Potentilla speciosa Willd. f. *concolor* Th. Wolf. U pukotinama stijena, na kamenjaru i točilima: točilo iznad Jezera, Brajci i Rujišta Štirovnika, Jezerski vrh; (Lovćen Ro;).

* *Potentilla speciosa* Willd., na kamenjaru alpskom i subalpskom; Lovćen (Pč, Ro);

* subvar. *elatior* Th. Wolf., Lovćen (Ro).

** *Potentilla caulescens* L. Na području Lovćena vrlo rijetka: Velja glava iznad Poda.

Potentilla micrantha Ram. Kamenjar u šumi bukve: Trešnja i Krst; (Njeguši Ro, Ld).

Potentilla argentea L. f. *typica* Beck. Na kamenjaru, točilima i rudinama: Štirovnik, Padež, Orlov krš i Đinovo brdo kod Cetinja; (Cetinje Pč, Ba).

Potentilla recta L. var. *pilosa* (Willd.) Led. Park „Njegoš” na Cetinju i na livadama u Obzovici; (Cetinje Pt, Ba);

* var. *balcanica* Th. Wolf., u šikarama i na travnjacima; Lovćen (Sk).

Potentilla hirta L. var. *pedata* (Willd.) Koch. Na livadama i pašnjačkom kamenjaru: Obzovica, Cetinjsko polje, Njeguško polje, Ivanova korita, Dolovi i Majstori; (Lovćen, Njeguši, Cetinje Ro).

Potentilla australis Kraš. f. *dinarica* Beck. Na kamenjaru, rudinama i pašnjacima: padine Štirovnika, Vučji do i Majstori; (Lovćen Bo).

* *Potentilla australis*., na travnjacima Lovćena (Ro);

* f. *pygmaea* Kraš., Lovćen (Ro).

Potentilla reptans L. Na livadama u zajednicama vegetacijskog razreda Molinio-Arrhenatheretea: park „Njegoš” na Cetinju, Cetinjsko polje, Njeguško polje i Ivanova korita;

f. *microphylla* Tratt., Duge njive i Bukovica; (Bukovica Pej.).

Alchimilla alpestris Schm. var. *montana* (Schm.) Schinz. et Kell. Na pašnjacima i suvim livadama: Ivanova korita i sjeverne padine Štirovnika; (Lovćen Ro).

Alchimilla pubescens Lam. var. *glaucescens* (Wallr.) Asch, Gr. subvar. *transiens* Hay. Na livadama: Majstori. (Lovćen gdje prelazi prema var. *plicatum* Ro, De, Si).

Geum urbanum L. U grabovim šumama i šikarama gdje je karakterističan za vegetacijski razred Quercu Fagetea: rasprostranjena po padinama i podgorini planine;

* f. *glandulosum* Murb., Lopotna strana kod Njeguša (Pej, Ro).

Geum molle Vis. Panč. U šikarama crnoga graba: Umci kod Cetinja; (Cetinje Pt).

Agrimonia eupatoria L. f. *longifolia* Wallr. U šumama bukve, uz međe i na kamenjaru: rasprostranjena po padinama Lovćena; (Bukovica iznad Njeguša Ro).

Aremonia agrimonioides (L.) Neck. U šumama, šikarama i krčevinaam bukve gdje je karakteristična za as. Fagetum montenegrinum: vrlo česta po padinama Lovćena; (Njeguši, padine Lovćena To, Ro; Golo brdo iznad Njeguša Ho; Cetinje Kn. Če).

Sanguisorba minor Scop. Na suvim livadama i kamenjaru: Orlov krš i Borovik kod Cetinja, Padež i Brajići; (Cetinje Pč, Ba).

Sanguisorba muricata (Spach.) Focke. Na kamenjaru i karakteristična je za vegetacijski razred Brachypodio-Chrysopogonetea ali je vrlo česta na suvim livadama i ledinama: rasprostranjena po čitavom Lovćenu i njegovoj podgorini (Njeguši Ro).

** *Rosa sempervirens* L. f. *microphylla* DC. U as. Cisto-Ericetum arboreae: okolina Budve i Gornji Grbalj.

Rosa arvensis Huds var. *pilifolia* Borb. U raznim šumama i šikarama, a ponegdje i na kamenjaru: Brajići, Ugnji, Vrela, Cetinje i Njeguši; (Žanjev do u podnožju Lovćena Ro).

** *Rosa canina* L. subsp. *spuria* (Pug.) H. Br. f. *spuria* H. Br. Na kamenjara i šikarama bjelograba: Riječke strane ispod Brajića;

subsp. *lutetiana* (Lem.) Hay., na kamenjaru u okolini Cetinja, Njeguša i Mirca; (Duge blizu Njeguša Ro);

* var. *insubrica* Wierzb., na kamenjaru kod Njeguša (Sz.);

* var. *transitoria* R. Keller., Valac rupe, Šavnik i Pištet u podnožju Lovćena, kod Viljuše (f. *inermis*). Ro;

* subsp. *dumalis* (Bechst.) Hay. var. *glaucina* (Rip.) H. Br., Šavnik u podnožju Lovćena (Pej, Ro); Pištet blizu Njeguša (Pej, Ro).

Rosa dumetorum Thuill. subsp. *dumetorum*. Na kamenjaru i uz zidine: uz put od Bukovice do Šavnika; (Žanjev do blizu Njeguša Ba; Ivanov laz u podnožju Lovćena Ro);

* var. *platyphylla* Christ., Krstačko polje blizu Njeguša (Ro);

* var. *thuillieri* Christ. oko Njeguša (Ro);

* var. *aemoniana* Kmet., Ivanov laz kod Njeguša (Ro).

* *Rosa agrestis* Sav. var. *gizelae* (Borb.) R. Keller. Krstac blizu Njeguša, Trešnja u podnožju Lovćena (Ro).

Rosa micrantha Sm. f. *polyacantha* Borb. Uz zidine i na kamenjaru: Bukovica iznad Njeguša; (Njeguši Sz.).

Rosa glutinosa S. S. Na kamenjaru i u pukotinama stijena: Riječke strane kod Brajića, Ugnji i Kapa;

f. *baldaccii* Hay., Trešnja; (Krstac i Trešnja blizu Njeguš Ba.);

* var. *dalmatica* (A. Kern.) Borb., Krstac i Duge blizu Njeguša (Gi, Ro).

* *Rosa tomentosa* Sm. var. *subglobosa* (Sm.) Carion. Duge blizu Njeguša (Ro).

* *Rosa mollis* Sm. U šikarama: Krstac blizu Njeguša (Sa, Pej, Ro).

* *Rosa pomifera* Herm. var. *typica* Christ. Krstac kod Njeguša (f. se približava var. *typicum* i var. *reconditam* Ro).

Rosa glauca Pourret. (*R. rubrifolia* Vill.). U šikarama crnoga graba i na kamenjaru: Umci i Borovik kod Cetinja; (Cetinje Pč);

* var. *subbiserrata* R. Keller. Donja krivača u podnožju Lovćena (Pej, Ro);

* var. *rohlenae* Klastersky, Lovćen (Ro, Pej); Cetinje (Sag.);

* var. *glaucescens* (Wulf.) R. Kell., Valac rupe kod Njeguša (Ro);

* var. *praerupticola* (H. Braun.) R. Kell. f. *baldacciana* (R. Keller) Hay.; Ivanov laz kod Njeguša, Trešnja Bogojeva glava iznad Njeguša, Jezerski vrh (Ro); Lovćen (Sa).

Rosa pendulina L. var. *pubescens* (Koch.) R. Kell. Na kamenjaru: Bukovica i Kapa iznad Njeguša; (Krivača u podnožju Lovćena Pej, Ro);

* *Rosa pendulina* L., Velje osoje blizu Njeguša (Ro).

Rosa spinosissima L. Na akmenjaru i u pukotinama stijena: Ugnji i Kapa iznad Njeguša; (Lovćen To; Žanjev do kod Njeguša Ro).

Amelanchier ovalis Med. U grabovim šumama i šikarama, karakteristična za vegetacijski red *Quercetalia pubescentis*: Ugnji, Umci i Zabrdje kod Cetinja; (Cetinje Ba; Lovćen Ad, Ro);

f. *grandifolia* Bald., uz put od Njeguša do Vučjeg dola; (iznad Njeguša Ro);

** f. *grossedentata* Rohl., Lovćen (Ro);

* f. *macrophylla* (Vand.) Hay., Ljuta iznad Njeguša (Pej, Ro);

Zanovetni brije i Bogojeva glava iznad Njeguša (Ro).

* *Amelanchier cretica* (Willd.) DC. Na kamenjaru kod Cetinja (Bo).

Sorbus mougeotii Soy. Will. et Godr. subsp. *austriaca* (Beck.) Hay. U šumama i šikarama bukve: Rujišta, Trešnja, Tisove ploče i Krst iznad Bjeloša; (Cetinje Kn).

Sorbus aria (L.) Gr. subsp. *aria*. U sastojinama crnoga graba, karakterističan je za vegetacijski red *Quercetalia pubescentis*: Padež iznad Vrela; (Lovćen Pč, Ro);

* f. *lanigera* Kern., Duge kod Njeguša (Ro);

subsp. *umbellata* (Desf.) Hay. var. *cretica* (Lindl.) C. K. Schneider, u šumi bukve: Šavnik i Trešnja; (Djevojački do blizu Njeguša Ro).

Pirus amygdaliformis Vill. Česta u sastojinama crnoga graba, karakteristična je za vegetacijsku svezu *Ostryo-Carpinion orientalis*: Gornji Grbalj, Topliš, Brajići, i Umci kod Cetinja.

Pirus piraster (L.) Borkh. Čest elemenat šikara crnoga graba, a ponegdje se nađe i u bukovim šumama: Brajići, Padež, Bjeloši, Bjeloške paprati, Kapa, Pod i Mirac; (Cetinje Pč.)

Malus silvestris (L.) S. F. Gray. U sastojinama crnog i bijelog gaba: Gornji Grbalj, primorske padine Lovćena, Brajići, Obzovica, i Zabrdje kod Cetinja.

Cotoneaster tomentosa (Ait.) Lindl. Na Kamenjaru: Kapa i Bukovica iznad Njeguša; (Bogojeva glava iznad Njeguša Pej, Ro; Lovćen Ro, Ad).

Crataegus monogyna Jacq. U zajednicama vegetacijskog razreda *Querco-Fagetea*: vrlo česta po padinama Lovćena i njegovoj podgorini; (Cetinje Pč; Kn; Njeguši Ro).

Prunus spinosa L. Mede, uz ograde i u šikarama: padine Lovćena i njegova podgorina; (Cetinje, Pč; Njeguši Ro).

* *Prunus prostrata* Labill. Kamenjar: Lovćen (Pč, Ad).

Prunus communis (L.) Fritsch. (*Amygdalus c. L.*). U kulturama a ponegdje nađe se samonikla u šikarama bijelog graba i u garizima: strane iznad Kotora i Gornji Grbalj.

Prunus mahaleb L. Čest elemenat grabovih šuma i šikara gdje je karakterističan za vegetacijsku svezu Ostryo-Carpinion orientalis; padine i podgorina Lovćena; (Cetinje, Njeguši Ro, Ba, Gi).

PAPILIONACEAE

Colutea arborescens L. U grabovim šumama i šikarama gdje je karakteristična za vegetacijsku svezu Ostryo-Carpinion orientalis, a ponegdje se nađe i u garizima: Gornji Grbalj, Budvansko polje, padine Lovćena prema moru, Brajići, Obzovica, Zabred i Orlov krš kod Cetinja; (Cetinje Kn; Njeguši Ro).

Astragalus glycyphyllos L. f. *bosniacus* Beck. Čest elemenat grabovih šuma i šikara: Pobori, Šišići i Čavori iznad Gornjeg Grblja, Padež, Vrela, Zabrd kod Cetinja; (Njeguš Ro).

Astragalus depressus L. Na kamenjaru: Majstor i Štirovnik: (Lovćen Pč, Pichler; iznad Njeguša Pej, Ro).

* *Astragalus vesicarius* L. var. *pastellanus* (Poll.) Rchb. Na kamenjaru i travnjacima: Lovćen (Ba, Ro).

Astragalus vegliensis Sadl. Na kamenjaru i šikari crnoga graba; Orlov krš i Đinovo brdo kod Cetinja; (Cetinje Pč).

Astragalus angustifolius Lam. subsp. *angustifolius*. Na kamenjaru i rudinama: padine Štirovnika, Treštenika i Majstora; (Lovćen Pč, Ba; Kš; Vh, Pej; Ro).

** *Psoralea bituminosa* L. U garizima, i šikarama bijelog graba: Topliš kod Budve, Gornji Grbalj, Čavori i Mirac.

Vicia lathyroides L. Na livadama i uz međe: Obzovica i Njeguši; (Njeguši Pč, Ba).

Vicia grandiflora Scop. var. *rotundata* (Ser.) Janch. Na kamenjaru, u parkovima i između raznih grmova: kod Cetinja, Cetinjsko polje, Njeguško polje i Bjeloši; (Cetinje Ho, Ro);

* f. *polychroma* G. Beck., Krstac iznad Kotora (B);

* subvar. *serrata* (Pant.) Rohl., Krstac blizu Njeguša (B);

* var. *kitaibeliana* Koch., Njeguši (Pt).

Vicia sativa L. subsp. *notata* (Gilib.) A. G. Uz zidine i u šikarama crnoga graba: Ugnji i Njeguši; (Njeguši Pč);

* subsp. *cordata* (Wulf.) Asch. Gr., Cetinjsko polje (Kš).

Vicia pannonica Cr. subsp. *pannonica*. Uz zidine, usjeve i na oranicama: Brajići, Ugnji i Njeguši; (Lazarev štit blizu Njeguša Ro, Pej);

* subsp. *striata* M. B. Lazarev štit blizu Njeguša (Ro),

Vicia tenuifolia Roth. subsp. *tenuifolia*. Uz zidine i na kamenjaru, u šikarama crnoga graba: Zabrd i Bajice kod Cetinja, Njeguši i Šavnik (Njeguši Ro).

Vicia cracca L. subsp. *vulgaris* Gaud. Na livadama, kamenjaru, parkovima i na rubu šuma i šikara: Tisove ploče, Ivanova korite i Kapa; (Cetinje Ba; Njeguši Gi, Ro);

* f. *oxyphylla* Beck., Krstac blizu Njeguša (Ro);
subsp. *incana* (Vill.) Rouy., na rubu bukove šume; Kapa; (između Njeguša i Cetinja Ld).

Vicia villosa Rotnh. Uz ograde i na kamenjaru: Ugnji i Njeguši; (Njeguši Pej, Ba).

Vicia dasycarpa Ten. var. *glabrescens* (Koch.) Beck. U usjevima uz međe: Bajice kod Cetinja i Njeguši; (Cetinje Pč);

* *Vicia melanopis* S. S. Na travnjacima kod Njeguša (Pt).

* var. *malisorica* Rohl., Grašina kod Njeguša (Do, Pej, Ro).

Vicia ochroleuca Spr. var. *dinara* (Borb.) K. Malý. Na livadama: Cetinje i Njeguši; (Njeguši Pt, Ba, Gi; Cetinje Ba; Lovćen Eb, Ho);

f. *nigropunctata* (Sag.) Rohl., u pukotinama stijena: Tisove ploče i Žanjev do; (Krstac blizu Njeguša Pej, Ro; padine Lovćena Kš); subf. *angustana* Rohl., na rubu bukove šume kod Žanjevog dola; (Krstac blizu Njeguša Ro, Pej).

Vicia tetrasperma (L.) Mch. Uz međe, ograde i u žitaricama: Obzovica i Gornič blizu Cetinja; (Lovćen To).

Lathyrus aphaca L. U šikarama crnoga graba, na ledinama i kamenjaru: Mirac, Poda, Vrela, Zabrđe kod Cetinja i Njeguško polje; (Cetinje, Njeguši Ro; Mali Šavnik u podnožju Lovćena Pej);

* f. *affinis* (Guss.) Cess. i f. *biflorus* Post., Krstac blizu Njeguša (Ro).

Lathyrus nissolia L. Uz međe, zidine i u šikarma crnoga graba: Cetinjsko polje, Zabrđe kod Cetinja i Njeguši; (Njeguši Pej, Ro).

Lathyrus sphaericus Retz. Na kamenjaru i u šikarama crnoga graba, a ponegdje i u šikarama bukve: padine Lovćena iznad Poda, Mirca i Čavora; (između Kotora i Njeguša Ro).

Lathyrus inconspicuus L. var. *stans* Vis. U kulturama se nalazi kao korov i uz ograde: Brajići, Ugnji i Cetinjsko polje; (Cetinje Pt).

Lathyrus pratensis L. Na livadama, uz međe i ograde: Majstori, Dolovi, Ivanova korita, Njeguši i Cetinej; (Njeguši Ro; Lovćen Eb);

f. *velutinus* DC., u bukovim krčevinama i uz međe: Rujišta i Hum; (Njeguši Ro).

Lathyrus tuberosus L. Na vlažnim livadama: Brajići, Obzovica, Cetinje i Bukovica iznad Njeguša; (Njeguši Ho, Ro; Lovćen Kš, To).

Lathyrus megalanthus Steud. U šikarama bijelog i crnoga graba; Gornji Grbalj, okolina Cetinja i Obzovica;

(Lovćen To; Njeguši Pč.); var. *lanceolatus* (Freyn.) Ginzb., na livadama; Gornič blizu Cetinja i Njeguši; (Njeguši Sz; Šavnik i Žanjev do blizu Njeguša Pej, Ro).

* *Lathyrus pannonicus* (Jacqu.) Garckey var. *versicolor* (Gmel.) K. Malý. U šikarama i na vlažnim livadama: Krstac blizu Njeguša (Ro).

Lathyrus vernus (L.) Bernh. U šumama, šikarama i krčevinama bukve gdje je karakteristična za vegetacijski red Fagetalia i svezu Fagion illyricum: padine Lovćena; (Cetinje Ba).

Lathyrus venetus (Mill.) Wohlf. U grabovim šumama i šikarama, a ponegdje se nađe i u šumama bukve; inače je karakteristična za vegetacijski red *Quercetalia pubescentis*: podgorina planine, Tisove ploče, i Kapa iznad Njeguša; (Cetinje Pč, Ld; Njeguši Ki, Ho, Ld, Pej; Jezerski vrh Ho);

* var. *longipes* Rohl., Djevojački do kod Njeguša (Pej).

* *Lathyrus niger* (L.) Bernh. f. *longipes* (Rohl.) Lindb. U šumama i šikarama: Njeguši, Mali Šavnik (Ro);

* f. *protensus* Rohl., Njeguši (Ro).

Ononis spinosa L. Na pašnjacima i slabim livadama; Brajići, Obzovica, Cetinjsko polje, Njeguško polje, Ivanova korita, Dolovi i Majstori; (Njeguši Ba, Pej, Ro).

Ononis hircina Jacq. var. *spinescens* Led. Na kamenjaru, ledinama i na rubu šikara: padine Padeža iznad Obzovice, Obzovica i Njeguši; (Torinje blizu Njeguša Pej);

* f. *spinoso-hircina* (Feicht.) Šir., Njeguši (Pej, Ro).

Medicago sativa L. Na oranicama, u kulturama i livadama: Njeguško i Cetinjsko polje; (Cetinej Pt; Blatište na Lovčenu Kš).

Medicago falcata L. Na livadama i na kamenjaru, u šikarama crnoga graba: Obzovica i Zabrdje kod Cetinja; (Njeguši Pč; Cetinje Pč, Kn);

var. *viscosa* Rchb. (var. *glandulosa* Koch.), na kamenjaru, livadama i uz međe; (Njeguši Gi, Pej).

Medicago lupulina L. U livadskoj zajednici *Arrhenatheretum elatioris*: Cetinjsko polje i Njeguši; (Cetinje Kn; Njeguši Ro);

* f. *glandulosa* Koch., Trešnja blizu Njeguša (Ro).

Medicago prostrata Jacq. Na kamenjaru, livadama i pašnjacima: Brajići, Bjeloši i Trešnja; (Lovćen, Njeguši Ro).

** *Medicago orbicularis* (L.) All. Na ledinama, u šikarama bjelograba i garizima: Gornji Grbalj i Budvansko polje.

Medicago rigidula (L.) Desr. Uz puteve, na ledinama, a ponegdje i u šikarama bjelograba: Gornji Grbalj, Topliš kod Budve, Zabrdje kod Cetinja i Njeguše; (Cetinje Pč, Kn; Njeguši Ro).

Medicago minima (L.) Desr. Na oranicama, livadama i ledinama: Gornji Grbalj, Umci kod Cetinja, Njeguši; (Cetinje Pč);

* var. *longiseta* Ser., Njeguši (Ro).

Melilotus officinalis (L.) Desr. U kulturama, na smetlištima i oko kuća: Brajići, Bjeloši, Cetinje i Ivanova korita; (Cetinje Kn; Njeguši Ro).

Trifolium campestre Schreb. Na livadama i kamenjaru: Obzovica, Cetinjsko polje, Njeguši i Ivanova korita; (Lovćen Pč; Trešnja Ro).

Trifolium patens Schreb. Na livadskim zajednicama vegetacijske sveze *Arrhenatherion*: Obzovica, Cetinjsko i Njeguško poje; (Cetinje Pt).

Trifolium montanum L. Na pašnjacima, suvim livadama i rudinama: Padež, Majstori, Rujišta i Štirovnik; (Lovćen, Njeguši Ro).

Trifolium nigrescens Viv. subsp. *nigrescens*. Elemenat ruderalne vegetacije: Gornji Grbalj, Topliš kod Budve, Obzovica, Cetinje, Njeguši i Ivanova korita; (Cetinje Pč).

Trifolium repens L. Na livadama gdje je karakteristična za vegetacijski razred Molinio-Arrhenatheretea: Cetinjsko polje, Njeguško polje i Ivanova korita; (Njeguši Ro; Cetinje Kn).

Trifolium fragiferum L. Na ledinama i uz puteve: Gornji Grbalj, Brajići;

Cetinjsko i Njeguško polje; (Njeguško polje Ho).

Trifolium resupinatum L. Na livadama i uz puteve: Riječke strane, Brajići, Cetinjsko polje i Njeguško polje; (Krstac blizu Njeguša, Lovćen Ho; Cetinjsko polje Kš);

* var. *maius* Boiss., Krstac kod Njeguša (Ro).

Trifolium scabrum L. Na kamenjaru: Brajići i Cetinje; (Cetinje Kn).

Trifolium dalmaticum Vis. Na kamenjaru: uz put od Bukovice do Njeguša; (Njeguši Sz).

* *Trifolium maritimum* Huds. Na travnjacima: Cetinje (Kn).

Trifolium arvense L. U usjevima, oko kuća i uz puteve: Gornji Grbalj, Obzovica, Cetinjsko polje, Gornič i Njeguši; (Cetinje Pč).

Trifolium stellatum L. U šikarama bjelograba i na kamenjaru: Gornji Grbalj, Zabrdje kod Cetinja i Njeguši, (Njeguši Pč. Ro).

Trifolium incarnatum L. var. *molineri* (Balb.) DC. U zajednicama vegetacijskog razreda Brachypodio-Chrysopogonetea: Brajići, Vrela i Bjeloši; (Krstac blizu Njeguša Ho; Gornja Krivača i Trešnja u podnožju Lovćena Ro);

** var. *elatus* Grb., uz zidine i u kulturama; Sutvara u Gornjem, Grblju.

Trifolium angustifolium L. U zajednicama vegetacijskog razreda Brachypodio-Chrysopogonetea: Gornji Grbalj, Brajići, Padež i Njeguši; (Njeguši Ho, Ro).

Trifolium patulum Tsch. Na kamenjaru u šikarama crnoga graba: Vrela i Padež; (Krstac blizu Njeguša Ro).

Trifolium pratense L. Na livadskim zajednicama sveze Arrhenatherion dolazi najčešće ali se može naći i u drugim zajednicama: padine i podgorina Lovćena; (Trešnja u podnožju Lovćena Ro);

* f. *heterophyllum* Lej. et Court., Njeguši (Ro);

f. *pilosum* Gris., vlažna livada na Ivanovim koritima.

Trifolium pignatii Fauche et Chaub. U šikarama crnoga graba i u šumi bukve: Padež, Zabrdje kod Cetinja; Kapa i Gornič; (Cetinje Ba, Če; Njeguši Ld, Ro; Lovćen Ba).

* *Trifolium medium* L. subsp. *flexuosum* (Jacq.) A. Gr. U šikarama i na rubu šuma; Krstac blizu Njeguša (Ho).

Trifolium alpestre L. U šumama i šikarama crnog graba gdje je karakteristična za vegetacijski red Quercetalia pubescentis; lovćenska podgorina; (Mirac Ro);

f. *monostachyum* Ser., Zabrdje kod Cetinja i Njeguši; (padine Lovćena iznad Njeguša Ro).

** *Trifolium subterraneum* L. Na livadama, i u šikarama bjelograba: Gornji Grbalj i Umci kod Cetinja.

** *Dorycnium hirsutum* (L.) Ser. var. *italicum* (Jord. et Fourr.) A. et G. U garizima gdje je karakteristična za vegetacijski red Cisto-Ericetalia i svezu Cisto-Ericion: Topliš kod Budve, Gornji Grbalj, Svinjišta, Pobori i Brajići.

Dorycnium germanicum (Gremli), Rouy. Na kamenjaru, na rubu bukovih šuma i šikara; Krstac kod Njeguša; (Njeguši Ho, Ld, Pej, Ro; Njeguši, Lovćen Ro);

** f. *sericeum* (Kov.) Hay., Bukovica i Kapa iznad Njeguša.

Dorycnium herbaceum Vill. Na kamenjaru u šikarama crnoga graba: padine Lovćena oko Mirca, Poda, Brajići i Padež; (Cetinje Kn; Njeguši Ro);

* var. *illyricum* Beck., Krstac blizu Njeguša (Ro).

Lotus corniculatus L. var. *hirsutus* Koch. Na kamenjaru i u raznim šikarama. karakteristična je za vegetacijski razred Brachypodio-Chrysopogonetea: podgorine i padine Lovćena;

subsp. *corniculatus* f. *ciliatus* Koch., Obzovica, Gonrič, Podjezerske strane i Ivanova korita;

** subsp. *tenuis* (Kit.) Briqu., na vlažnim livadama; Brajići, Cetinje i Njeguši.

* *Anthyllis hermanniae* L. U šikarama kod Cetinja zabilježio je Baldacci mada je drugi istraživači nijesu uočili.

Anthyllis aurea Welden. Na kamenjaru i rubovima bukove šume: Majstori, Tisove ploče blizu Ivanovih korita; (Lovćen Ro);

f. *aurantiaca* Pant. Majstori; (Bogojeva glava iznad Njeguša Pej, Ro).

Anthyllis vulneraria L. subsp. *vulneraria* (L.) Hay. Na kamenjaru: Riječke strane kod Brajića, Majstori, Njeguši i Bukovica; (uz put Kotor-Njeguši i Pračišta kod Njeguša Ro);

* var. *psudovulneraria* Sag. f. *cattarensis* Sag., Torinje blizu Njeguša (Rej, Ro);

* subsp. *spruneri* (Boiss.) Bornm. f. *praepropera* (A. Kern.) Hay., travnjaci Lovćena (Ro. Pej);

subsp. *pulchella* (Vis.) Bornm., na kamenjarima u as. Genisto-Globularietum bellidifoliae: Majstori, Ivanova korita, Padež, i Krst iznad Bjeloša (oko Njeguša, Lovćen Huter, Ro);

* var. *scardica* (Wettst.) Bornm., Jezerski vrh (Ho);

* var. *monticola* (Sag.) Hay., Njeguši i padine Lovćena (Huter, Ld, Pej, Ro).

* *Anthyllis montana* subsp. *jaquinii* (A. Kern.) Hay. Lovćen (Ro).

** *Cytisus nigricans* L. var. *sericeus* Andrae. Na pjeskovitom tlu i šikarama bjelograba: Gornji Grbalj, Pobori i Obzovica.

Cytisus diffusus (Willd.) Vis. f. *adpresse pilosus* Lindb. U šikarama crnoga graba: Vrela, Zabrdje, Đinovo brdo i Orlov krš kod Cetinja; (uz put Krstac—Njeguši Ld, Ro; Cetinje Bo; Stare strane u podnožju Lovćena Pej, Ro);

* subf. *glabricalyx* Rohl., Krstac blizu Njeguša (Rej, Ro).

Cytisus hirsutus L. subsp. *leucotrichus* (Schur.) A. Gr. U sastojinama bijelog i crnoga graba: Gornji Grbalj, Zabrdje i Ševrlja kod Cetinja; (Lovćen Ba; Cetinje Ld);

* subsp. *ciliatus* (Wahlenb.) A. Gr. var. *alpestris* (Schur.) Briqu., u subalpskim šikarama; Njeguši (Bo).

Cytisus tommasinii Vis. U sastojinama crnoga graba i u bukovim šumama: Padež, Zabrdje i Gornić kod Cetinja; (Ivanov laz blizu Njeguša Pej, Ro).

** *Calycotoma infesta* (Presl.) Guss. U garizima, karakteristična za as. *Erico-Calycotometum infestae*: Lastva u Gornjem Grblju.

Petteria ramentacea (Sieb.) Presl. U degradiranim šikarama crnoga graba: Orlov krš kod Cetinja; (Njeguši, Cetinje, Lovćen Ro).

Genista silvestris Scop. subsp. *innocua* (Vis.) Hay. Na pašnjačkim kamenjarima zajednice *Genisto-Globularietum bellidifoliae*: Majstori, Rujišta i Padež; (Kućišta kod Njeguša Pej, Ro);

* subsp. *dalmatica* (Bartl.) Lindb. f. *parce pilosa* Lindb., padine, Lovćena (Pej, Ro).

* *Genista villarsii* Clem. Na kamenjaru kod Cetinja (Pt).

Genista sericea Wulf. Na pašnjačkim kamenjarima as. *Genisto-Globularietum bellidifoliae*: Padež, Majstori, Ivanova korita, Bukovica i Bje-loši; (Cetinje Pč, Ba; Njeguši i padine Lovćena Gi, Pej, Ja, Ro);

* f. *brevifolia* Beck., Cetinje (Ba).

Genista tinctoria L. U šikarama crnoga graba: Zabrdje i Đinovo brdo kod Cetinja; (Njeguši Ro).

** *Spartium junceum* L. U garizima, karakteristična za vegetacijski red *Cisto-Ericetalia*: rasprostranjena u primorskoj podgorini Lovćena.

Coronilla emerus L. subsp. *emeroides* (Boiss. et Spr.) Hay. U grabo-vim šumama i šikarama, karakteristična za vegetacijsku svezu *Ostryo-Carpin-ion orientalis*: podgorina i padine Lovćena: Njeguši, Cetinje (Ld, Pej, Ro).

Coronilla varia L. Na livadama, po međama i u parkovima: Cetinje, Njeguši i Ivanova korita; (Njeguši, Cetinje Pč, Eb, Sz, Ro; Golo brdo iznad Njeguša Pej, Ro).

Hippocrepis comosa L. subsp. *comosa*. Na rudinama i pašnjačkim kamenjarima zajednice *Genisto-Globularietum bellidifoliae*: Štirovnik, Majstori, Rujišta, Padež i Ivanova Korita; (Njeguši Sz, Pej, Ro).

** *Scorpiurus subvillosus* L. subsp. *subvillosus*. Na ledinama i u garizima: primorska podgorina Lovćena (Budva, Gornji Grbalj i Mirac).

Onobrychis alba (W. K.) Desv. subsp. *laconica* (Orph.) Hay. Karakteristična vrsta zajednice pašnjačkih kamenjara, Genisto-Globularietum bellidifoliae: Mirac, Rujišta i susjedna brda; (na Lovćenu f. sa sitnim i užim, listovima Pej, Ro).

Onobrychis ocellata Beck. (*O. tommasinii* Jord.). Česta na pašnjačkom kamenjaru u as. Genisto-Globularietum bellidifoliae: Majstori, Hum i Krst blizu Bjeloša, Ivanova korita i Bukovica; (oko Njeguša Pej, Ro).

THYMELAEACEAE

Daphne alpina L. subsp. *alpina*. Na kamenjaru, u pukotinama stijena i na rubu bukove šume: padine Štirovnika iznad Velikog Bostura i Golo brdo; (Lovćen, oko Njeguša i Cetinja Ro).

LYTHRACEAE

** *Lythrum salicaria* L. var. *tomentosum* (Mill.) DC. Uz potoke, kanale i bare: Sutvara u Gornjem Grblju i Brajići.

MYRTACEAE

** *Myrtus communis* L. Čest elemenat gariga katakterističan za vegetacijski razred Quercetea ilicis: okolina Budve i Gornji Grbalj.

PUNICACEAE

Punica granatum L. Elemenat as. Paliuretum adriaticum za koju je karakteristična, ali se može naći i u drugim zajednicama gariga i u šikarama bjelograba: okolina Budve, Gornji Grbalj i padine Lovćena do 800 m;; (između Cetinja i Bajica Pč; Krstac blizu Njeguša Gi).

OENOTHERACEAE

Epilobium montanum L. U šumama, šikarama i krčevinama bukve: Rujišta, Majstori, Padež, Vrela i Tisove ploče (Lovćen Pč, Ro, Bukovica Ro);

* f. *albiflorum* Hausskn., padine Lovćena (Pej, Ro);

* f. *grandiflorum* Rohl., padine Lovćena (Pej, Ro).

Epilobium lanceolatum Seb. et M. Na kamenjaru u šumi bukve: Padež i Tisove ploče; (Lovćen Pej, Ro).

** *Epilobium hirsutum* L. f. *trichocarpum* (Hausskn.) Hay. Uz potoke kanale: Gornji Grbalj, Markovići, Čavori i Brajići.

Chamaenerion angustifolium (L.) Soop. U šumama i krčevinama bukve: Ivanoa korita kod planinarskog doma; (Njeguši, Trešnja Ro);

* var. *pubescens* Hausskn., Velje osoje u podnožju Lovćena (Ro).

* *Chamaenerion palustre* Scop. Na kamenjaru i stijenama: Krstac kod Njeguša (Ro).

Circaea lutetiana L. U šumama i krčevinama bukve: padine Štirovnika iznad Vučjeg dola; (padine Lovćena Pč, Pej, Ro; Njeguši Ro, Pej).

CALLITRICHACEAE

Callitriche stagnalis Scop. U Jezeru na Lovćenu raste u velikoj masi; (Jezerski vrh na Lovćenu Ho, Ro).

CORNACEAE

Cornus mas L. U šumama i šikarama bijelog i crnog graba, a karakteristična je za vegetacijski red Quercetalia pubescentis: padine i podgorina Lovćena; (padine Lovćena Pč).

Cornus sanguinea L. U zajednicama vegetacijskog razreda Querco Fagetea: Gornji Grbalj i padine Lovćena iznad Grblja, Brajići, Obzovica Vrela, Zabrđe kod Cetinja; (Cetinje Pč).

ARALIACEAE

Hedera helix L. subsp. *helix*. Na zidovima, u raznim šumama i šikarama: Gornji Grbalj, Ugnji, Vrela, Padež, Gornič i Tisove ploče blizu Ivanovih korita; (Cetinje Pč).



СТЕВАН БАЈОВИЋ

О ГРАНИЧНИМ ЗАДАЦИМА ОБИЧНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА — МЕТОДА ФУНКЦИЈЕ ГРИНА

I. *Општи гранични задатак обичне диференцијалне једначине.* — Нека је, дата обична диференцијална једначина n -ог реда

$$(1) \quad F(x, y, y', ly'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Задатак се састоји у томе да се одреди функција $y(x)$ једначине (1) чије вредности

$y^{(s)}(x_i) = y_i^{(s)}$ ($s = 1, 1, 2, \dots, \delta_i \leq n-1$), у датом скупу тачака $S \{x_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k \geq 2$), задовољавају n међу собом независних, у општем случају нелинеарних граничних услова

(2) $\Gamma_p(y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_1^{\delta_{1p}}, \dots, y_k, y'_k, y''_k, \dots, y_k^{\delta_{kp}}) = A_p$, где су A_p константе ($p = 1, 2, 3, \dots, n; \delta_{ip} \leq n-1; i = 1, 2, 3, \dots, k$).

Специјалан случај овог задатка је *линеарни гранични задатак*

$$(3) \quad L(y) = f(x), \quad (L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y)$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_k^{(p)} y^{(k)}(a) + \beta_k^{(p)} y^{(k)}(b)] = \gamma_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots, n), \text{ где}$$

константе $\alpha_k^{(p)}$ и $\beta_k^{(p)}$ задовољавају релације

$$\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha_k^{(p)}| + |\beta_k^{(p)}|) \neq 0,$$

а функције $a_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) и $f(x)$ су непрекидне у интервалу $[a, b]$. За $f(x) = 0$, имамо да је $\gamma_p = 0$ за $p \in N$ ($N \{1, 2, \dots, n\}$), па је гранични задатак (3) — (4) хомоген. Може се линеарни гранични задатак формулисати и помоћу линеарних оператора на следећи начин.

$$(5) \quad Ly = f(P),$$

$$(6) \quad Ry = \varphi(P), \quad (P \in \Gamma), \text{ где је: } P \{x\} \text{ скуп независно променљивих:}$$

$y(x) \in K$; $f(P)$ и $\varphi(P) \in C$. L је оператор дефинисан у скупу $K\{y(x)\} \in C^n$ у $G + \Gamma$ (област G је ограничена са Γ). Оператор R је нижег реда од оператора L . Оваква формулација линеарног граничног задатка обухвата и линеарне парцијалне диференцијалне једначине, па је преимућство овакве формулације граничног задатка над претходном формулацијом очигледно.

II. *Метода функције Грина*. — Гранични задатак може бити: одређен, неодређен и немогућ. Редак је случај тачног решења граничног задатка. Због овога се приступа приближним методама. За приближно решење граничног задатка (1) — (2) одабере се функција

(7) $Z = Z(x, C_1, C_2, \dots, C_q)$, где су $C_1, C_2, \dots, C_q$ независни параметри такви да, при ма каквом њиховом избору, функција Z задовољава граничне услове (2). Заменивши (7) у (1), добијамо

$$(8) \quad F(x, Z, Z', \dots, Z^{(n)}) = D(x, C_1, C_2, \dots, C_q)^{1)}.$$

Догоди ли се да је $D(x, C_1, C_2, \dots, C_q) = 0$, тада је (7) тачно решење граничног задатка (1) — (2). Како се ово врло ретко догађа, то се наш циљ своди на задатак да учинимо израз $D(x, C_1, \dots, C_q)$ што мањи. — Ово се постиже помоћу различитих метода. Познатије методе су: Редукција на задатак Кошиа, Метода коначних разлика, Метода елиминације, Метода најмањих квадрата, Метода Галеркина, Метода Ритца, Метода факторизованих разлика и Метода функције Грина. Изложимо и објаснити ову последњу. — Узмимо, најпре, једначину облика

(9) $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y + \lambda y = 0$ ($a_0(x) \neq 0$, λ реални параметар). Претпоставимо да је: $a_0(x) \in C^1$, $a_1(x) \in C$ и $a_2(x) \in C$ у интервалу $[a, b]$.

Једначину (9) можемо трансформисати у самоадјунговану на следећи начин. — Помножимо једначину (9) са функцијом $r(x)$ ($r(x) \neq 0$ и $r(x) \in C^1$), па ћемо добити

$$(10) \quad a_0(x) r(x) y'' + a_1(x) r(x) y' + a_2(x) r(x) y + \lambda r(x) y = 0.$$

Да би једначина (10) била самоадјунгована, потребно је и довољно да буде

$$(11) \quad a_1(x) r(x) = [a_0(x) r(x)]'. \text{ Из једначине (11) следи}$$

$$(12) \quad a_1(x) = a_0'(x) + \frac{a_0(x) r'(x)}{r(x)}. \text{ Интеграцијом једначине (12),}$$

добија се

$$(13) \quad r(x) = \frac{k}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

¹⁾ Б. П. Демидович, И. А. Марон, З. Шувалова, Численные методы анализа, Издательство „Наука“, Москва 1967.

Ако се вредност за $a_1(x)$ из (12) замени у (9), а по том изврши свођење, добија се

$$(14) \quad [a_0(x) r(x) y'] + [a_2(x) r(x)] y + \lambda r(x) y = 0.$$

Сменом

$$(15) \quad \begin{cases} a_0(x) r(x) = p(x), \\ a_2(x) r(x) = -q(x) \end{cases} \text{ у једначини (14), добијамо,}$$

$$(16) \quad \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y + \lambda r(x) y = 0 \text{ или}$$

$$(17) \quad L(y) + \lambda r(x) y = 0, \text{ где је } L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y'] - q(x) y.$$

је, у овом случају, самоадјунговани оператор. — Треба, сада, наћи такво решење $y=y(x) \neq 0$, једначине (16) односно једначине (17), да буду задовољени гранични услови:

$$(18) \quad \begin{cases} A_0 y(a) + A_1 y'(a) = 0, \\ B_0 y(b) + B_1 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Константе A_0 , A_1 , B_0 и B_1 морају испуњавати следеће услове:

$$(19) \quad \begin{cases} |A_0| + |A_1| \neq 0, \\ |B_0| + |B_1| \neq 0. \end{cases}$$

Гранични задатак (17)–(18) зове се задатак Штурм-Лиувилев за хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда. Ако се граничним условима (18) придружи једначина.

(20) $L(y) + \lambda r(x) y + f(x) = 0$, где је $f(x) \in C$ у интервалу $[a, b]$, онда имамо гранични задатак Штурм-Лиувилев за линеарну нехомогену диференцијалну једначину другог реда.

Она решења једначине (17), која задовољавају исте граничне услове као и решења једначине (20), зову се карактеристична решења једначине (17), а вредности λ које одговарају тим решењима карактеристичне вредности.

Одређивање карактеристичних функција једне диференцијалне једначине сматра се модерним проблемом Математичке анализе.

Узмимо најпре задатак (20) — (18). — Да ли постоји таква функција $G(x, t)$ (x аргумент, t параметар у интервалу $[a, b]$), да се решење граничног задатка (20) — (18) може написати у облику

$$(21) \quad y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt?$$

Може се показати да се решење Штурм-Лиувиловог граничног задатка добија помоћу функције $G(x, t)$, ако функција $G(x, t)$ задовољава следеће услове:

$$1^\circ. G(x, t) \in C \text{ у квадрату } a \leq x \leq b \text{ и } a \leq t \leq b;$$

$$2^\circ. L[G(x, t)] + \lambda r(x) \cdot G(x, t) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \text{ осим за } x = t, \text{ тј.}$$

$$G''_{xx}(x, t) \in C \text{ у подинтервалим } [a, t] \text{ и } (t, b];$$

$$3^\circ. A_0 G(a, t) + A_1 G'_x(a, t) = 0 \wedge B_0 G(b, t) + B_1 G'_x(b, t) = 0;$$

$$4^\circ. G'_x(t-0, t) - G'_x(t+0, t) = \frac{1}{p(t)}.$$

Функција $G(x, t)$ зове се ГРИНОВА ФУНКЦИЈА, по енглеском математичару и физичару ЏОРѢУ ГРИНУ (1793.—1841.), који је познат и по својим интегралним теоремама на подручју Математичке анализе.

Обрнуто, ако су испуњени услови: $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ и задовољена једначина (21), тада је $y(x)$ решење граничног задатка (20) — (18). За $f(x) = 0$, имамо гранични задатак (17) — (18), где сада функција $G(x, t)$ испуњава услове: $1^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ и услов

$$2^a. L[G(x, t)] = 0, \text{ за } x \in [(a, t) \cup (t, b)], G''_{xx}(x, t) \in C.$$

Решење граничног задатка (17) — (18) може се написати, под условима $1^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ и 2^a , у облику

$$(22) \quad y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) r(t) y(t) dt^2.$$

Једначина (22) је, као што је познато, Фредхолмова хомогена линеарна интегрална једначина друге врсте. Обрнуто, ако су испуњени услови: $1^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 2^a$ и задовољена једначина (22), тада је $y(x)$ решење граничног задатка (17) — (18). Дакле, гранични задатак (17) — (18) и интегрална једначина (22) су еквивалентни. Такође и гранични задатак (20) — (18) и интегрална једначина (21) су еквивалентни. Међутим, решење граничног задатка (20) — (18) помоћу овакве ГРИНОВЕ функције $G(x, t)$, могуће је ако λ није карактеристична вредност, а решење граничног задатка (17) — (18) ако $\lambda = 0$ није карактеристична вредност.

Егзистенција ГРИНОВЕ функције $G(x, t)$, за гранични задатак (20) — (18) на пример, доказује се егзистенцијом партикуларних решења $y_1(x)$ и $y_2(x)$ једначине $L(y) + \lambda r(x)y = 0$, која задовољавају граничне услове

²⁾ В. И. Смирнов, Курс висшей математики, том: III₁, III₂ и IV, Государственное издательство Физико-математической литературы, Москва 1958.

(23) $\begin{cases} A_0 y_1(a) + A_1 y_1'(a) = 0, \\ B_0 y_2(b) + B_1 y_2'(b) = 0 \end{cases}$ односно, свако понаособ, почетне услове Кошиа. При овоме, треба имати у виду да су решења $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна у интервалу $[a, b]$ ($W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$, за $\forall x \in [a, b]$).

Симетричност ГРИНОВЕ ФУНКЦИЈЕ може се доказати на следећи начин. — Како је:

$$L(v) + \lambda r(x)v = [p(x)v']' - q(x)v + \lambda r(x)v,$$

$$L(u) + \lambda r(x)u = [p(x)u']' - q(x)u + \lambda r(x)u.$$

Ако прву једначину помножимо са u а друга са v , па затим одуземо другу једначину од прве, добијамо:

$$uL(v) - vL(u) = u[p(x)v']' - v[p(x)u']' \text{ односно}$$

$$uL(v) - vL(u) = uv'(x)v' + up(x)v'' - vp'(x)u' - vp(x)u'' \text{ односно}$$

$$uL(v) - vL(u) = p'(x)(uv' - u'v) + p(x)(uv'' - u''v) \text{ односно}$$

$$uL(v) - vL(u) = p'(x)(uv' - u'v) + p(x)(uv'' + u'v' - u'v' - u''v) \text{ односно}$$

$$uL(v) - vL(u) = p'(x)(uv' - u'v) + p(x)(uv' - v'u') \text{ односно}$$

$$(24) \quad uL(v) - vL(u) = [p(x)(uv' - u'v)]' \text{ односно}$$

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = [p(x)(uv' - u'v)]_a^b.$$

Када се у последњој једначини стави:

(25) $\begin{cases} u = G(x, t_1) \quad (a < t_1 < t_2 < b) \\ v = G(x, t_2), \end{cases}$ а затим интегрални у интервалима $[a, t_1 - 0]$, $[t_1 + 0, t_2 - 0]$ и $[t_2 + 0, b]$, добија се:

$$\begin{aligned} \int_a^b \{G(x, t_1)L[G(x, t_2)] - G(x, t_2)L[G(x, t_1)]\} dx &= [p(x)[G(x, t_1)G'_x(x, t_2) - \\ &- G'_x(x, t_1)G(x, t_2)]]_{t_1-0}^{t_1+0} + [p(x)[G(x, t_1)G'_x(x, t_2) - \\ &- G'_x(x, t_1)G(x, t_2)]]_{t_2-0}^{t_2+0} + [p(x)[G(x, t_1)G'_x(x, t_2) - \\ &- G'_x(x, t_1)G(x, t_2)]]_{t_2+0}^b. \end{aligned}$$

С обзиром да је, у интервалу $[a, b]$, $L[G(x, t_1)] = 0$ за $x \neq t_1$ и $L[G(x, t_2)] = 0$ за $x \neq t_2$, то ће, после смене у последњој једначини, бити:

$$\begin{aligned} 0 = & p(t_1 - o) [G(t_1 - o, t_1) G'(t_1 - o, t_2) - G'(t_1 - o, t_1) G(t_1 - o, t_2)] - \\ & - p(a) [G(a, t_1) G'(a, t_2) - G'(a, t_1) G(a, t_2)] + p(t_2 - o) [G(t_2 - o, t_1) \cdot \\ & G'(t_2 - o, t_2) - G'(t_2 - o, t_1) G(t_2 - o, t_2)] - p(t_1 + o) [G(t_1 + o, t_1) \cdot \\ & G'(t_1 + o, t_2) - G'(t_1 + o, t_1) G(t_1 + o, t_2)] + p(b) [G(b, t_1) G'(b, t_2) - \\ & - G'(b, t_1) G(b, t_2)] - p(t_2 + o) [G(t_2 + o, t_1) G'(t_2 + o, t_2) - \\ & G'(t_2 + o, t_1) \cdot G(t_2 + o, t_2)] \text{ односно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p(t_1) G(t_1, t_1) G'(t_1 - o, t_2) - p(t_1) G'(t_1 - o, t_1) G(t_1, t_2) - \\ & - p(a) [G(a, t_1) G'(a, t_2) - G'(a, t_1) G(a, t_2)] + p(t_2) G(t_2, t_1) G'(t_2 - o, t_2) - \\ & - p(t_2) \cdot G'(t_2 - o, t_1) G(t_2, t_2) - p(t_1) G(t_1, t_1) G'(t_1 + o, t_2) + \\ & + p(t_1) G'(t_1 + o, t_1) G(t_1, t_2) + p(b) [G(b, t_1) G'(b, t_2) - \\ & - G'(b, t_1) G(b, t_2)] - p(t_2) G(t_2, t_1) G'(t_2 + o, t_2) + \\ & + p(t_2) G'(t_2 + o, t_1) G(t_2, t_2) = 0. \end{aligned}$$

Како је, с обзиром на граничне услове 3°,

$$\begin{cases} A_0 G(a, t_1) + A_1 G'(a, t_1) = 0, \\ A_0 G(a, t_2) + A_1 G'(a, t_2) = 0, \end{cases}$$

то множењем прве једначине са $G'(a, t_2)$, а друге са $G'(a, t_1)$ и одузимањем друге једначине од прве, добијамо

$$A_0 [G(a, t_1) G'(a, t_2) - G(a, t_2) G'(a, t_1)] = 0.$$

Даље је, такође с обзиром на граничне услове 3°,

$$\begin{cases} B_0 G(b, t_1) + B_1 G'(b, t_1) = 0, \\ B_0 G(b, t_2) + B_1 G'(b, t_2) = 0, \end{cases}$$

тада множењем прве једначине са $G'(b, t_2)$, а друге са $G'(b, t_1)$, и одузимањем друге од прве, добијамо

$$B_0 [G(b, t_1) G'(b, t_2) - G'(b, t_1) G(b, t_2)] = 0.$$

Када се последње две подвучене вредности замене у једначини горе, уместо подвучених израза, добија се:

$$\begin{aligned}
 & p(t_1) G(t_1, t_1) G'(t_1 - o, t_2) - p(t_1) G'(t_1 - o, t_1) G(t_1, t_2) + \\
 & + p(t_2) G(t_2, t_1) G'(t_2 - o, t_2) - p(t_2) G'(t_2 - o, t_1) G(t_2, t_2) - \\
 & - p(t_1) G(t_1, t_1) G'(t_1 + o, t_2) + p(t_1) G'(t_1 + o, t_1) G(t_1, t_2) - \\
 & - p(t_2) G(t_2, t_1) G'(t_2 + o, t_2) + p(t_2) G'(t_2 + o, t_1) G(t_2, t_2) = 0 \quad \text{односно} \\
 & p(t_1) G(t_1, t_1) [G'(t_1 - o, t_2) - G'(t_1 + o, t_2)] - \\
 & - p(t_1) G(t_1, t_2) [G'(t_1 - o, t_1) - G'(t_1 + o, t_1)] + \\
 & + p(t_2) G(t_2, t_1) [G'(t_2 - o, t_2) - G'(t_2 + o, t_2)] - \\
 & - p(t_2) G(t_2, t_2) [G'(t_2 - o, t_1) - G'(t_2 + o, t_1)] = 0.
 \end{aligned}$$

С обзиром на услов 4°, тј. на услов

$$G'_x(t - o, t) - G'_x(t + o, t) = \frac{1}{p(t)}, \quad \text{горња једначина постаје}$$

$$G(t_1, t_1) - G(t_1, t_2) + G(t_2, t_1) - G(t_2, t_2) = 0 \quad \text{односно}$$

$G(t_2, t_1) = G(t_1, t_2)$. Ако се у последњој једнакости стави $t_1 = x$ и $t_2 = t$, добија се коначно

$$G(t, x) = G(x, t), \quad \text{чиме је симетричност доказана.}$$

Гринова функција, граничног задатка (20) — (18), формира се на следећи начин. — Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна партикуларна решења једначине

$$(26) \quad L(y) + \lambda r(x) y = 0. \quad \text{Опште решење једначине (26) гласи}$$

$$(27) \quad y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad \text{— Ово решење мора да задовољава граничне услове}$$

$$(28) \quad A_0 y(a) + A_1 y'(a) = A_0 C_1 y_1(a) + A_0 C_2 y_2(a) + A_1 C_1 y_1'(a) + \\ + A_1 C_2 y_2'(a) = 0,$$

$$(29) \quad B_0 y(b) + B_1 y'(b) = B_0 C_1 y_1(b) + B_0 C_2 y_2(b) + B_1 C_1 y_1'(b) + \\ + B_1 C_2 y_2'(b) = 0 \quad \text{односно}$$

$$(30) \quad \begin{cases} C_1 [A_0 y_1(a) + A_1 y_1'(a)] + C_2 [A_0 y_2(a) + A_1 y_2'(a)] = 0, \\ C_1 [B_0 y_1(b) + B_1 y_1'(b)] + C_2 [B_0 y_2(b) + B_1 y_2'(b)] = 0^3. \end{cases}$$

Из обадва услова (30) закључујемо, да ће бити испуњена, ако је

$$(31) \quad \begin{cases} A_0 y_1(a) + A_1 y_1'(a) = 0 \text{ и } C_2 = 0, \\ B_0 y_2(b) + B_1 y_2'(b) = 0 \text{ и } C_1 = 0, \end{cases}$$

јер ако би израз у другој угластој загради, првог услова (30), био једнак нули или пак израз у првој угластој загради, другог услова (30), такође био једнак нули, онда партикуларна решења једначине (26) не би била линеарно независна већ линеарно зависна. Уосталом, лако је видети да, из система једначина

$$\begin{cases} A_0 y_1(a) + A_1 y_1'(a) = 0, \\ A_0 y_2(a) + A_1 y_2'(a) = 0, \end{cases} \quad (A_0 \neq 0, A_1 \neq 0)$$

следи

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

а из система

$$\begin{cases} B_0 y_1(b) + B_1 y_1'(b) = 0 \\ B_0 y_2(b) + B_1 y_2'(b) = 0, \end{cases} \quad (B_0 \neq 0, B_1 \neq 0)$$

следи

$$\begin{vmatrix} y_1(b) & y_1'(b) \\ y_2(b) & y_2'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Добијене детерминанте су Вронскијеве и показују да су решења $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно зависна, што противречи нашој почетној претпоставци.

Услов (31) показује да се ГРИНОВА функција може формирати на следећи начин:

$$(32) \quad G(x, t) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & \text{за } a \leq x \leq t \\ C_2 y_2(x), & \text{за } t \leq x \leq b. \end{cases}$$

Константе C_1 и C_2 одређујемо из услова

$$(33) \quad \begin{cases} C_1 y_1(t) = C_2 y_2(t) \\ C_1 y_1'(t) - C_2 y_2'(t) = \frac{1}{p(t)}. \end{cases}$$

³⁾ Linear integral equations by William Vernon Lovitt, Ph. D. Professor of Mathematics Colorado College, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, New York.

Решењем система (33) по C_1 и C_2 , добија се:

$$C_1 = - \frac{y_2(t)}{p(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad C_2 = - \frac{y_1(t)}{p(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}$$

односно

$$(34) \quad C_1 = - \frac{y_2(t)}{p(t) W(t)} \quad \text{и} \quad C_2 = - \frac{y_1(t)}{p(t) W(t)}.$$

Ако вредности (34) уврстимо у (32), добијамо

$$(35) \quad G(x, t) = \begin{cases} - \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)}, & \text{за } x \leq t \\ - \frac{y_1(t) y_2(x)}{p(t) W(t)}, & \text{за } t \leq x. \end{cases}$$

Очевидно, да је $G(t, x) = G(x, t)$, што само потврђује ранији доказ о симетричности ГРИНОВЕ функције.

Уместо граничних услова (18) могу се узети општији гранични услови

$$(36) \quad \begin{cases} A_0 y(a) + A_1 y'(a) + A_2 y(b) + A_3 y'(b) = 0, \\ B_0 y(a) + B_1 y'(a) + B_2 y(b) + B_3 y'(b) = 0, \end{cases} \text{ при чему морају}$$

бити задовољени и услови:

$$(37) \quad \sum_{i=0}^3 |A_i| \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^3 |B_i| \neq 0.$$

Сада ћемо показати на неким примерима како се гранични задаци решавају МЕТОДОМ ФУНКЦИЈЕ ГРИНА. Узмемо задатак

$$(38) \quad y'' - y = x,$$

$$(39) \quad y(0) = 0,$$

$$(40) \quad y(1) = 0.$$

Опште решење једначине, $y'' - y = 0$, је $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Партикуларно решење једначине (38) је $Y = -x$. Опште решење једначине (38) је $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$. ГРИНОВА функција граничног задатка (38) — (39) — (40) конструише се на следећи начин:

$$(41) \quad G(x, t) = \begin{cases} Ae^x + Be^{-x}, & 0 \leq x \leq t \\ Ce^x + De^{-x}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Константе A , B , C и D одредићемо из услова:

$$(42) \quad \begin{cases} Ae^t + Be^{-t} = Ce^t + De^{-t}, \\ A + B = 0, \\ Ce + De^{-1} = 0, \\ Ce^{t+0} - De^{-(t+0)} - Ae^{t-0} + Be^{-(t-0)} = 1-. \end{cases}$$

Решењем система једначина (42) по A , B , C и D , добијемо:

$$(43) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2(e^2 - 1)} (e^{2-t} - e^t), \\ B = \frac{1}{2(e^2 - 1)} (e^t - e^{2-t}), \\ C = \frac{e^{-t} - e^t}{2(e^2 - 1)}, \\ D = \frac{e^2(e^t - e^{-t})}{2(e^2 - 1)}. \end{cases}$$

Када се вредности за A , B , C и D из (43) замене у (41), добија се аналитички израз ГРИНОВЕ функције граничног задатка (38) — (39) — (40) у зависности од аргумента x и параметра t , тј. биће:

$$(44) \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2(e^2 - 1)} (e^{2-t} - e^t) (e^x - e^{-x}), & \text{за } 0 \leq x \leq t \\ \frac{1}{2(e^2 - 1)} (e^t - e^{-t}) (e^{2-x} - e^x), & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решење граничног задатка (38) — (39) — (40) је

$$(45) \quad y(x) = \int_0^1 G(x, t) dt \quad \text{односно}$$

$$(46) \quad y(x) = \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} x - x. \quad \text{— Решење (46) добија се из решења (45) на следећи начин:}$$

$$y(x) = \int_0^{x-0} G(x, t) dt + \int_{x+0}^1 G(x, t) dt, \text{ па се у првом интегралу}$$

на десној страни, уместо $G(x, t)$ стави онај аналитички израз који одговара вредности $t \leq x$, а у другом интегралу на десној страни, уместо $G(x, t)$, стави онај аналитички израз који одговара вредности $x \leq t$, а затим се изврши интеграција. До истог се резултата долази ако се општем решењу једначине (38) придруже гранични услови (39) и (40), тј.

$$(46a) \quad \begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x \\ y(0) = 0 \Rightarrow \\ y(1) = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 0. \end{cases}$$

Решењем система (46a), добија се:

$$(46b) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{e}{e^2 - 1}, \\ C_2 = \frac{e}{1 - e^2}. \end{cases}$$

Када се вредности за C_1 и C_2 из (46b) уврсте у решење $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, добија се решење (46) граничног задатка (38) — (39) — (40). Лако се уверити да је код овог задатка $G(x, t) > 0$, за $x, t \in (0, 1)$.

Узмимо, сада, да решимо гранични задатак

$$(47) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

где је λ реални параметар. За $\lambda \leq 0$, решење граничног задатка је $y(x) = 0$, тј. тривијално решење, које не долази у обзир. За $\lambda > 0$ ($\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$), $y(x) = A_n \sin n \pi x$ је решење поменутог граничног задатка. ГРИНОВА функција, овог граничног задатка, формира се на следећи начин:

Узима се једнач. (47a) $y'' = 0$, чије је опште решење (47b) $y(x) = K_1 x + K_2$, а затим се стави

$$(47c) \quad G(x, t) = \begin{cases} Ax + B, & \text{за } 0 \leq x \leq t \\ Cx + D, & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Из граничних услова (47) и осталих услова за формирање функције ГРИНА следи:

$$(47д) \quad \begin{cases} B = 0, \\ C + D = 0, \\ At + B = Ct + D, \\ A - C = 1. \end{cases}$$

Решењем система једначина (47д) по константама, A , B , C и D , добијамо:

$A = 1 - t$; $B = 0$; $C = -t$ и $D = t$. Када се ове вредности уврсте у (47с), добија се:

$$(48) \quad G(x, t) = \begin{cases} x(1-t), & \text{за } 0 \leq x \leq t \\ t(1-x), & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решење граничног задатка (47) може се написати у облику

$$(49) \quad y = \lambda \int_0^1 G(x, t) y(t) dt.$$

Карактеристичне функције граничног задатка (47) односно једначине (49) су

$$(50) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \text{ па је}$$

$$(51) \quad G(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \cdot \sin n\pi t}{n^2}, \text{ јер је}$$

$$(52) \quad \sqrt{2} \cdot \sin n\pi x = n^2 \pi^2 \int_0^1 G(x, t) \sqrt{2} \sin n\pi t dt.$$

Није тешко проверити да је скуп функција $\{\sqrt{2} \sin n\pi x\}$ ортонормиран у интервалу $(0,1)$ и да ред (51) униформно и апсолутно конвергира. И овде је $G(x, t) > 0^4$, за $x, t \in (0,1)$, а претпоставља се да $\lambda = 0$ није карактеристична вредност.

⁴⁾ С. А. Пак, Условија сохранија знака функции ГРИНА задачи Штурма-Лиувилља Доклади Академии наук СССР, 1963. Том 148, Нр. 6, Москва

До сада само ГРИНОВУ функцију формирали под претпоставком да λ у задатку

$$(53) \begin{cases} L(y) + \lambda r(x)y = -f(x), \\ A_0 y(a) + A_1 y'(a) = 0, \\ B_0 y(b) + B_1 y'(b) = 0, \end{cases} \text{ није карактеристична вредност}$$

Међутим, ако је λ карактеристична вредност, тј. ако постоји $y_0(x)$ такво, да је

$$(54) \begin{cases} L(y_0) + \lambda r(x)y_0 = 0, \\ A_0 y_0(a) + A_1 y_0'(a) = 0, \\ B_0 y_0(b) + B_1 y_0'(b) = 0, \end{cases} \text{ тада се, као последица једначина}$$

(53) и (54), добија једначина

$$(55) \int_a^b f(x) y_0(x) dx = 0.$$

Једначина (55) добија се на следећи начин. — Прва од једначина (53) помножи се са $y_0(x)$, а прва од једначина (54) помножи се са $y(x)$, па се први производ одузме од другог производа и изврши интеграција од a до b . При овоме, треба добро водити рачуна, о једнакости $y(x) L(y_0) - y_0(x) L(y) = \{p(x) [y(x) y_0'(x) - y_0(x) y'(x)]\}'$, а затим се искористе гранични услови.

Како је $y_0(x)$ решење линеарне хомогене диференцијалне једначине, а $y(x)$ решење одговарајуће нехомогене линеарне диференцијалне једначине, тада је и функција

(56) $y(x) + k y_0(x)$ (k је константа) једно решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине односно прве од скупа једначина (53).

Константу k одредићемо из услова ортогоналности функције (56) и функције $y_0(x)$ у односу на функцију $r(x)$, тј. из услова

$$(57) \int_a^b r(x) [y(x) + k y_0(x)] y_0 dx = 0.$$

Ако овом услову прикључимо и услов

$$(58) \int_a^b r(x) y_0^2(x) dx = 1, \text{ добијамо}$$

$$(59) \quad k = - \int_a^b r(x) y(x) y_0(x) dx.$$

И у овом случају јможе се решење граничног задатка (53) изразити помоћу функције ГРИНА, па ће бити

$$(60) \quad y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt.$$

Ова функција ГРИНА мора задовољавати следеће услове:

$$1^\circ. \quad G(x, t) \in C, \text{ за } x, t \in [a, b];$$

$$2^\circ. \quad G(x, t) \in C'' \text{ у } [a, t) \text{ и } (t, b], \text{ а } L[G(x, t)] + \lambda r(x) G(x, t) = \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(t) (\varphi_0(x) = y_0(x));$$

$$3^\circ. \quad A_0 G(a, t) + A_1 G'_x(a, t) = 0,$$

$$B_0 G(b, t) + B_1 G'_x(b, t) = 0;$$

$$4^\circ. \quad G'_x(t-0, t) - G'_x(t+0, t) = \frac{1}{p(t)};$$

$$5^\circ. \quad \int_a^b G(x, t) \varphi_0(x) dx = 0.$$

Као што се види, ново-уведена функција ГРИНА, поред четири услова, мора да задовољава и пети услов. Поред овог, вреди приметити, да је услов 2° модифициран. Оваква функција ГРИНА назива се ГЕНЕРАЛИСАНА ФУНКЦИЈА ГРИНА.

Конструкција ГЕНЕРАЛИСАНЕ ФУНКЦИЈЕ ГРИНА врши се на следећи начин:

$$(61) \quad G(x, t) = \begin{cases} \omega(x) + C_1 \varphi_0(x) + C_2 \varphi_1(x), & \text{за } a \leq x \leq t \\ \omega(x) + C_3 \varphi_0(x) + C \varphi_1(x), & \text{за } t \leq x \leq b, \end{cases}$$

где је:

$$(62) \quad \begin{cases} L(\omega) + \lambda r(x) \omega = \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(t), \\ L[\varphi_0(x)] + \lambda r(x) \varphi_0(x) = 0, \\ L[\varphi_1(x)] + \lambda r(x) \varphi_1(x) = 0. \end{cases}$$

Решења $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ морају бити линеарно независна, а константе C_1, C_2, C_3, C_4 одређујемо из услова 1°, 3°, 4° и 5°. Услов 2° служи нам као контрола. Слично се поступа са гвраничним задатком

$$(63) \quad \begin{cases} L(y) + \lambda r(x)y = 0, \\ A_0 y(a) + A_1 y'(a) = 0, \\ B_0 y(b) + B_1 y'(b) = 0, \end{cases} \text{ када је } \lambda = 0 \text{ карактеристична вред-}$$

ност. Само сада функције $\omega(x)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ морају задовољавати следећи скуп једначина

$$(63a) \quad \begin{cases} L(\omega) = \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(t), & (L[G(x, t)] = \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(t)) \\ L[\varphi_0(x)] = 0, \\ L[\varphi_1(x)] = 0. \end{cases}$$

Узмимо да решимо гранични задатак

$$(64) \quad \begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ |y(-1)| < M \quad (M, N > 0) \\ |y(1)| < N. \end{cases}$$

Напред наведена диференцијална једначина може се написати у облику

$$(64a) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0.$$

Ако је $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), онда се решења ове једначине могу написати у облику

$$(64b) \quad y(x) = y_n(x) = P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \text{ — Ова су}$$

решења позната под називом Лежандрови полиноми, а једначина (64a) Лежандрова обична диференцијална једначина другог реда.

Лежандрови полиноми имају следећа својства:

$$(65) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$(66) \quad \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Норма ових полинома је

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \text{ па су функције}$$

$$(67) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \text{ ортонормиране.}$$

Није тешко показати да је, за $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, P_3(x) = \frac{10x^3 - 6x}{3}, \dots$$

С обзиром да је за $n = 0$, $P_0(x) = 1$, биће из (67)

$$(68) \quad \begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \varphi_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

За формирање ГРИНОВЕ функције користимо једначину

$$(69) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] = \frac{1}{2}.$$

Партикуларно решење једначине (69) је

$$(70) \quad \omega(x) = -\frac{1}{4} \ln(1-x^2).$$

Опште решење једначине

$$(70a) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] = 0, \text{ јесте}$$

$$(71) \quad y = C_1 + C_2 \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ па је } \varphi_1(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ а раније је}$$

одређено да је $\varphi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Дакле је, опште решење једначине (69)

$$(72) \quad y(x) = C_1 + C_2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{4} \ln(1-x^2).$$

За $C_2 = \frac{1}{4}$, имамо

$$(73) \quad y_1(x) = \alpha - \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

За $C_2 = -\frac{1}{4}$, добијамо

$$(74) \quad y_2(x) = \beta - \frac{1}{2} \ln(1+x).$$

Решење (73) ограничено је за $x = -1$ ако је ограничено α , а решење (74) је ограничено за $x = 1$ ако је ограничено β .

Константе α и β одредићемо из услова:

$$(75) \quad \alpha - \frac{1}{2} \ln(1-t) = \beta - \frac{1}{2} \ln(1+t),$$

$$(76) \quad \int_{-1}^1 G(x, t) \frac{\sqrt{2}}{2} dx = 0.$$

Једначина (75) је задовољена за:

$$(77) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma - \frac{1}{2} \ln(1+t), \\ \beta = \gamma - \frac{1}{2} \ln(1-t), \end{cases} \text{ па је}$$

$$(78) \quad G(x, t) = \begin{cases} \gamma - \frac{1}{2} \ln[(1-x)(1+t)], & \text{за } -1 \leq x \leq t \\ \gamma - \frac{1}{2} \ln[(1+x)(1-t)], & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Константу γ одредићемо из услова (76) на тај начин што ћемо интервал интеграције поделити на подинтервале $[-1, t-0]$ и $[t+0, 1]$, па ће бити

$$(79) \quad \int_{-1}^{t-0} \left\{ \gamma - \frac{1}{2} \ln[(1-x)(1+t)] \right\} dx + \\ + \int_{t+0}^1 \left\{ \gamma - \frac{1}{2} \ln[(1+x)(1-t)] \right\} dx = 0,$$

одакле следи

$$(79a) \quad \gamma = \ln 2 - \frac{1}{2}. \text{ Када се ова вредност за } \gamma \text{ уврсти у једначину}$$

(78) добија се

$$(80) \quad G(x, t) = \begin{cases} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln [(1-x)(1+t)], & \text{за } -1 \leq x \leq t \\ \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln [(1+x)(1-t)], & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решење граничног задатка (64) може се написати у облику

$$(81) \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, t) y(t) dt, \text{ где је } G(x, t) \text{ ГРИНОВА функ-}$$

ција дата релацијама (80). Фуријеов ред језгра интегралне једначине (81) гласи

$$(82) \quad G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \cdot \varphi_n(t)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(x) P_n(t)}{2n(n+1)}. \text{ — Овај}$$

ред не конвергира униформно у читавом квадрату ($-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$), јер је језгро $G(x, t)$, за $x = -1$ односно $x = 1$, неограничено (Види релацију (80)).

На основу напред изложеног, можемо извести овај закључак:

1°. Ако реални параметар λ није карактеристична вредност, онда једначина $L(y) + \lambda r(x)y + f(x) = 0$, са напред наведеним граничним

условима, има само једно решење $y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt$.

2°. Ако је λ карактеристична вредност, онда претходни гранични

задатак има решење само онда када је $\int_a^b y_0(x) f(x) dx = 0$. — У овом

случају постоји бесконачно много решења облика $y(x) + k y_0(x)$.

Узмимо, сада, гранични задатак

$$(83) \quad y^{IV} - \lambda y = 0$$

(84) $\begin{cases} y(o) = y'(o) = 0, \\ y''(l) = y'''(l) = 0. \end{cases}$ Место једначине (83) могу се узети једначине:

(85) $y^{IV} - \lambda r(x)y = 0$ и (86) $y^{IV} + f(x) = 0$ са граничним условима (84). Може се показати да је гранични задатак (83) — (84) еквивалентан интегралној једначини

(87) $y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, t) y(t) dt.$ — Даље се може показати да је гранични задатак (85) — (84) еквивалентан интегралној једначини

(88) $y(x) = -\lambda \int_0^l G(x, t) r(t) y(t) dt.$ Најзад, такође се може показати да је гранични задатак (86) — (84) еквивалентан интегралној једначини

$$(89) \quad y(x) = \int_0^l G(x, t) f(t) dt.$$

У свим, напред поменутих, граничним задацима ГРИНОВА функција мора задовољавати следеће услове:

1°. $G(x, t) \in C''$ у квадрату $x \in [0, l]$ и $t \in [0, l]$;

2°. $G(x, t) \in C^{IV}$ за $x \in [0, t]$ и $x \in (t, l]$ као и $G^{IV}(x, t) = 0$ за $x \neq t$;

3°. $G(0, t) = G'(0, t) = 0$ и $G''(l, t) = G'''(l, t) = 0$;

4°. $G'''(t-0, t) - G'''(t+0, t) = 1$.

У напред поменутих граничних задацима претпоставља се да λ није карактеристична вредност. Узмимо да решимо гранични задатак

$$(90) \quad \begin{cases} y^{IV} - \lambda y = 0, \\ y(o) = y'(o) = 0, \\ y(l) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

Да бисмо конструисали функција ГРИНА граничног задатка (90), решимо најпре једначину

$$(91) \quad y^{IV} = 0.$$

Решење једначине (91) је

(92) $y(x) = C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. ГРИНОВА функција, $G(x, t)$, биће

$$(93) \quad G(x, t) = \begin{cases} a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, & \text{за } 0 \leq x \leq t \\ b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3, & \text{за } t \leq x \leq l. \end{cases}$$

Ако ставимо $y_1(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, а $y_2(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$, тада, из $y_1(0) = y_1'(0) = 0$, следи $a_3 = a_2 = 0$, а, из $y_2(1) = y_2'(1) = 0$, следи

$$(94) \quad \begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0, \\ 3b_0 + 2b_1 + b_2 = 0. \end{cases}$$

С обзиром на вредности за a_2 и a_3 и на систем једначина (94), биће:

$$(95) \quad \begin{cases} y_1(x) = x^2(a_0 x + a_1), \\ y_2(x) = (x-1)^2(b_0 x + b_3). \end{cases}$$

Из услова 1°, који мора да задовољава ГРИНОВА функција $G(x, t)$, следи

$$(96) \quad \begin{cases} y_1(t) = y_2(t) \\ y_1'(t) = y_2'(t) \\ y_1''(t) = y_2''(t). \end{cases}$$

Систем једначина (96), с обзиром на (95), даје:

$$(97) \quad \begin{cases} t^2(a_0 t + a_1) = (t-1)^2(b_0 t + b_3), \\ 2t(a_0 t + a_1) + a_0 t^2 = 2(t-1)(b_0 t + b_3) + b_0(t-1)^2 \\ 6a_0 t + 2a_1 = 6b_0 t - 4b_0 + 2b_3. \end{cases}$$

Из услова 4°, који мора да задовољава ГРИНОВА функција $G(x, t)$, следи

$$(98) \quad 6a_0 - 6b_0 = 1.$$

Када се из система једначина (97) и једначине (98) одреде константе a_0 , a_1 , b_0 , и b_3 и уврсте у (93), водећи рачуна о систему једначина (95), добијамо да је

$$(99) \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{x^2(t-1)^2}{6} (2xt + x - 3t), & \text{за } 0 \leq x \leq t \\ \frac{t^2(x-1)^2}{6} (2xt + t - 3x), & \text{за } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решење граничног задатка (90), гласиће

$$(100) \quad y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, t) y(t) dt.$$

Знак функције $G(x, t)$, у (99), зависиће од знака тринома $2xt + x - 3t$ у интервалу $0 \leq x \leq t$ и од знака тринома $2xt + t - 3x$ у интервалу $t \leq x \leq 1$. — Како је $2xt + x - 3t \leq 2t^2 + t - 3t = 2t^2 - 2t = 2t(t-1) \leq 0$, за $x \leq t \leq 1$ и $2xt + t - 3x \leq 2x^2 + x - 3x = 2x^2 - 2x = 2x(x-1) \leq 0$, за $t \leq x \leq 1$, то се види да су ови триноми негативни у одговарајућим подинтервалима $(0, t)$ и $(t, 1)$, па је, дакле, функција $G(x, t) < 0$, за $x, t \in (0, 1)$. Међутим, знак функције ГРИНА може се, код неких граничних задатака, утврдити без конструкције њених аналитичких израза, што није тема овог рада⁵⁾. Најзад, напомињемо да се МЕТОДА ФУНКЦИЈЕ ГРИНА примењује за решавање граничних задатака парцијалих диференцијалних једначина и једначина са коначним разликама.

⁵⁾ Richard Bellman, On the non-negativity of Green's functions, Bollettino della unione matematica italiana, Anno XII, Nr. 3, Bologna 1957.

СТЕВАН БАЈОВИЧ

ОБ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИИ — МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

Резюме

В данной работе:

— определяется общая граничная задача обыкновенного дифференциального уравнения n -ого порядка с особым учетом граничной задачи уравнения $L(y) = f(x)$ ($L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$)

— дается определение общей линейной граничной задачи с помощью линейных операторов;

— описывается способ решения некоторых граничных задач, линейных неоднородных и линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков методом функции Грина;

— объясняется (теоретически и практически) способ формирования обыкновенной и обобщенной функций Грина указанных граничных задач;

— уделяется особое внимание собственным функциям и их отношению к функции Грина с учетом развития функции Грина в ряду собственных функций.

ДАМЊАНОВИЋ БОГДАН

О ЈЕДНОМ УСЛОВУ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ ФУРИЕРОВИХ РЕДОВА У ЗАДАТОЈ ТАЧКИ

Критеријуми конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки заснивају се на извесним условима који су потребни и довољни. Упознајемо се најпре са тим условима.

Означимо Фуриеров ред произвољне L -интеграбилне функције са $\sigma(f)$. Парцијални збир од $\sigma(f)$, који означавамо са $S_n(x)$, можемо да напишемо у форми

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \delta > 0 \quad (1)$$

где $o(1)$ означава величину која равномерно тежи нули на $[-\pi, +\pi]$. Релација (1) нас и доводи до потребних и довољних услова да $\sigma(x)$ конвергира у задатој тачки.

Предпоставимо да је $f(x) = 1$ на $[-\pi, +\pi]$, тада је $S_n(x) = 1$ за произвољно n , па (1) добија форму

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (2)$$

Помоћимо ли (2) са збиром од $\sigma(f)$, који означимо са S , добијамо

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} S \cdot \frac{\sin nu}{u} du + o(1) \quad (3)$$

Одузимајући (3) од (1), добијамо

$$S_n(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4)$$

На основу (4), закључујемо:

Да би Фуриеров ред произвољне L интеграбилне функције $f(x)$ конвергирано броју S у задатој тачки x , потребно је и довољно да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (5)$$

Уколико $\sigma(f)$ има за збир баш вредност функције $f(x)$, то стављајући

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \quad (6)$$

релацију (5) пишемо у форми

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_x(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0, \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Дакле, да би у произвољној тачки $x \in [-\pi, \pi]$ Фуриеров ред произвољне L интеграбилне функције $f(x)$ конвергирао баш самој вредности функције у тачки x , потребно је и довољно да буде испуњено (7). На исказаним условима у (7) се и заснивају критеријуми конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки.

У првом поглављу овога чланка навешћемо најпознатије критеријуме конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки, неке од њих ћемо и доказати. Друго поглавље се односи на конструкцију L -интеграбилне функције $f(x)$ чији Фуриеров ред конвергира у задатој тачки, а да се при томе услов

$$\int_0^{\delta} \varphi_x(u) du = 0(t)$$

I

не јавља потребним.

Најпознатији критеријуми конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки су: критеријум Диниа, критеријум Липшица, критеријум Жордана, критеријум Вале-Пусена, критеријум W. Н. Јунга, критеријум Лебега и критеријум Лебег-Гегрена. Познатије од ових критеријума ћемо само навести, док ћемо поједине и доказати. Уз исказ критеријума које не доказујемо, навешћемо литературу у којој је доказ детаљно изложен.

Напомињемо да узајамни односи појединих критеријума, као и питања равномерне конвергенције Фуриерових редова у околини задате тачке не улазе у садржину овога рада.

1) Критериум Диниа¹⁾

Пре него што наведемо критеријум Диниа, упознајмо се са дефиницијом и појмом тзв. регуларне тачке.

За произвољну тачку $x_0 \in [-\pi, \pi]$ кажемо да је регуларна уколико испуњава улсова:

а) у x_0 функција $f(x)$ је непрекидна, или

б) ако постоје вредности функције $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и ако је

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Дакле, регуларне тачке произвољне функције $f(x)$ су оне у којима је $f(x)$ непрекидна, а такође, и прекидне тачке прве врсте у којима је вредност функције $f(x)$ једнака аритметичкој средини леве и десне граничне вредности $f(x)$ у тој тачки.

Критеријум Диниа гласи:

Фуриеров ред од $f(x)$ конвергира у свакој регуларној тачки x_0 ка $f(x_0)$ уколико интеграл

$$\int_0^{\delta} |\varphi_x(u)| \frac{du}{u}, \quad \delta > 0 \quad (1)$$

има смисла

2) Критеријум Липшица⁴⁾

Већ упознати интеграл

$$\int_0^{\delta} |\varphi_x(x)| \frac{du}{u}, \quad \delta > 0$$

можемо да напишемо у форми

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)}{u} \right| du, \quad (2)$$

где је x_0 тачка непрекидности од $f(x)$. Ако је за x_0

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

онда (2) добија форму

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)|}{u} du \quad (3)$$

Јасно је да из егзистенције интеграла (2) и (3) следи и егзистенција интеграла

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + u) - f(x_0)|}{u} du, \quad \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - u) - f(x_0)|}{u} du, \quad (4)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)|}{u} du, \quad \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)|}{u} du \quad (4')$$

На основу (4') исказујемо критеријум Липшица:

Фуриеров ред од $f(x)$ у тачки x_0 , у којој је $f(x)$ непрекивна, конвергира ка $f(x_0)$ ако је за $u > 0$ и довољно мало испуњена неједнакост

$$|f(x_0 \pm u) - f(x_0)| \leq L u^{\alpha}, \quad |u| < \delta, \quad (5)$$

L и α су позитивне константе ($\alpha \leq 1$).

За $\alpha = 1$, услов (5) добија облик

$$\frac{|f(x_0 \pm u) - f(x_0)|}{u} \leq L \quad (6)$$

те закључујемо:

Фуриеров ред од $f(x)$ конвергира ка $f(x_0)$ ако $f(x)$ у тачки x_0 има коначан извод.

Специјално, ако је $f(x)$ диференцијабилна свуда на $[-\pi, \pi]$, онда $\sigma(f)$ конвергира на читавом размаку $[-\pi, \pi]$.

Позивајући се на (6) Липшицов критеријум гласи: Ако је $x_0 \in [-\pi, \pi]$ тачка прекида прве врсте, то је за конвергенцију $\sigma(f)$ у x_0 довољна егзистенција граничних вредности

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 - 0)}{u} \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}$$

У овом случају $\sigma(f)$ конвергира ка

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

3) Критеријум Жордана²⁾

Критеријум Жордана се примењује на функције ограничене варијације, а заснива се на (7, стр. 2) и неједнакости

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq H \bigvee_0^{\delta_2} f,$$

$H = \text{const.}$, а $\bigvee_0^{\delta_2} f$ је тотална варијација функције $f(x)$ на $(0, \delta_2)$.

Критеријум Жордана гласи:

Ако је функција $f(x)$ ограничене варијације на произвољном интервалу (a, b) , онда $\sigma(f)$ конвергира у свакој тачки тога интервала. Збир од $\sigma(f)$ је $f(x_0)$ ако је у x_0 функција $f(x)$ непрекидна, а ако је x_0 прекидна тачка, онда збир од $\sigma(f)$ износи

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Користећи везе које постоје између монотоне функције и функције ограничене варијације, долазимо и до ових тврђења:

а) Фуриеров ред сваке монотоне функције $f(x)$ на размаку $[a, \beta]$ конвергира у произвољној тачки $x_0 \in [a, b]$ ка $f(x_0)$;

б) Ако се функција $f(x)$ може представити као разлика две монотонно растуће функције, онда њен Фуриеров ред конвергира у тачки $x_0 \in [a, b]$ ка $f(x_0)$.

Задња два тврђења се у ствари свode на Жорданов критеријум пошто су функције које испуњавају поменуте услове функције ограничене варијације на размаку $[a, b]$.

До сада наведени критеријуми (Диниа, Липшица и Жордана) могу се исказати и преко величина које називамо модул непрекидности, односно модул глаткости функције. Упознајмо се са овим величинама и њиховим особинама.

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на размаку $[a, b]$, сем тога, нека тачке x_1 и x_2 леже на размаку $[a, b]$ и нека је $\delta > 0$ тада променљиву величину

$$w[\delta, a, b; f(x)] = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|; \quad x_1, x_2 \in [a, b] \quad (7)$$

називамо модулом непрекидности функције $f(x)$ на $[a, b]$. Ако се у току једног поступка сматра да је размак $[a, b]$, онда се модул непрекидности пише упрошћено: $w(\delta; f)$. Уколико се за $f(x)$ не помињу нека посебна ограничења, онда $w(\delta; f)$ може да буде и бесконачно.

Уколико је $f(x)$ непрекидна функција, онда је $w(\delta; f)$ коначно. За произвољно δ је тада

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta; f) = 0 \quad (8)$$

Користећи (8) и (7, стр. 2) добијамо:

За непрекидну функцију $f(x)$ на размаку $[a, b]$ и за коју важи $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta; f) = 0$ Фуриеров ред од $f(x)$ конвергира у произвољној тачки.

На основу дефиниције модула непрекидности следи:

$$w(\delta; f_1 + f_2) \leq w(\delta; f_1) + w(\delta; f_2), \quad (9)$$

функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ посматрамо на истом размаку.

Модул непрекидности од $f(x)$ има ове особине:

а) $w(\delta; f)$ монотонно расте,

б) за $n \in N$ је

$$w(n; \delta; f) \leq n w(\delta; f), \quad (10)$$

за $\lambda > 0$ ја

$$w(\lambda \delta; f) \leq (\lambda + 1) w(\delta; f), \quad (11)$$

с) ако $f(x)$ припада Липшоцовој класи функција, онда је

$$w(\delta; f) = O(\delta^\alpha), \quad (12)$$

а важи и обратни закључак.

На основу (12) важи тврђење:

Уколико функција $f(x)$, дефинисана на $[a, b]$, испуњава услов

$$w(\delta; f) = O(\delta^\alpha),$$

онда њен Фуриеров ред конвергира у тачки $x_0 \in [a, b]$ ка $f(x)_0$.

Стварно, из услова следи да је

$$\sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)| = O(\delta^\alpha); \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad \delta > 0,$$

а одавде је

$$\frac{\sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|}{\delta^\alpha} \leq L_1, \quad \text{односно}$$

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{\delta^\alpha} \leq L_2 \text{ па је}$$

$$|f(x_1 \pm u) - f(x_1)| \leq L_3 u^\alpha, |u| \leq \delta \quad (13)$$

Ако је испуњено (13), јасно је да важи и (7, стр. 64).

Посматрајући разлику

$$f(x+h) - f(x-h) - 2f(x),$$

дефинишемо модул гладкости функције $f(x)$, дефинисане на $[a, b]$.

Величина

$$w_2(\delta; f) = \sup_{0 < h \leq \delta} |f(x+h) - f(x-h) - 2f(x)| \quad (14)$$

назива се модул глаткости ункције $f(x)$.

Особине модула глаткости су:

- а) $w_2(\delta, f)$ је монотона и неоппадајућа,
- б) за произвољно λ је

$$w_2(\lambda, \delta) \leq (\lambda + 1) w_2(\delta, f). \quad (15)$$

Функцију $f(\lambda)$ називамо глатком у тачки x_0 ако важи релација

$$\frac{1}{h} \{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)\} = 0 \quad (1),$$

односно

$$\frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{1}{h} [f(x_0) - f(x_0 - h)] = 0 \quad (1) \quad (16)$$

Из (16) следи:

Ако постоји $f'(x)_0$ и коначно је, онда је функција $f(x)$ глатка у тачки x_0 .

На основу (19) и (7, стр. 64) закључујемо:

Ако је функција $f(x)$ глатка у тачки x_0 , онда њен Фуриеров ред конвергира у тачки x_0 ка $f(x_0)$.

4) Критеријум Вале — Пусена¹⁾

Претпоставимо да функција $F(t)$, исказана са

$$F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_X(u) du, \quad (17)$$

има ове особине:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(0) &= 0, \\ \text{b) } \lim_{t \rightarrow 0} F(t) &= 0 \end{aligned} \quad (17')$$

с) $F(t)$ је функција ограничене варијације на произвољном одсечку $0 \leq t \leq \delta$.

Критеријум Вале-Пусена се ослања на функцију $F(t)$ и гласи:

Ако функција $F(t)$, дефинисана са (17), поседује особине (17'), онда Фуриевов ред од $f(x)$ конвергира ка $f(x_0)$ у тачки x_0 .

Доказ:

Из (17) следи

$$t \cdot F(t) = \int_0^t \varphi_X(u) du$$

па је $\varphi_X(u)$ диференцијабилна с. с. на $[0, t]$. Узимајући у обзир ову чињеницу, можемо да ставимо:

$$\int_0^\delta \varphi_X(u) \frac{\sin nu}{u} du = \int_0^\delta [F(u)]' \frac{\sin nu}{u} du. \quad (18)$$

После диференцирања у (18) добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \varphi_X(u) \frac{\sin nu}{u} du &= \int_0^\delta u F'(u) \frac{\sin nu}{u} du + \int_0^\delta F(u) \frac{\sin nu}{u} du = \\ &= \int_0^\delta F'(u) \sin nu du + \int_0^\delta F(u) \frac{\sin nu}{u} du. \end{aligned} \quad (19)$$

Треба да се докаже, да на основу особина $F(t)$, важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_X(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

Означимо са J_1 први од интеграла на десној страни у (19)

$$J_1 = \int_0^{\delta} F'(u) \sin nu du, \quad (20)$$

а са J_2 други интеграл на десној страни у (19)

$$J_2 = \int_0^{\delta} F(u) \frac{\sin nu}{u} du. \quad (21)$$

С обзиром на особину с) у (17'), закључујемо да је $F(u)$ интеграбилна на $(0, \delta)$ па је $J_1 \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ и $|u| \leq \delta$. Уверимо се да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0$. Како је према а) и б) у (17') $F(u)$ непрекидна у тачки 0, то она има у њеној околини ограничену промену, па Фуриеров ред од $F(t)$ има вредност

$$\sigma(F) = 0 \text{ за } u = 0.$$

Тада је према (7, стр. 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [F(0) + u + F(0 - 2F(0))] \frac{\sin nu}{u} du = 0.$$

односно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [F(u) - F(-u)] \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (22)$$

Како је $[F(u) + F(-u)]$ парна функција, то је $F(u)$ парна функција те закључујемо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} F(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (23)$$

Дакле, $J_2 \rightarrow 0$ када $n \rightarrow \infty$.

На основу чињеница да и $J_1 \rightarrow 0$ и $J_2 \rightarrow 0$ када $n \rightarrow \infty$, уверавамо се у тачност релације

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_X(u) \frac{\sin nu}{u} du,$$

што и доказује критеријум Вале-Пусена.

5) Критеријум W. Јунга¹⁾

Критеријум В. Х. Јунга гласи:

Фуриеров ред од $f(x)$ конвергира ка $f(x)$ у тачки x уколико су испуњени услови:

а) функција $A(t)$ исказана са

$$A(t) = t \varphi_X(t) \quad (24)$$

је функција ограничене варијације на интервалу $(0, \delta)$,

б) за $A(t)$ важи

$$V(h) = O(h), \quad (25)$$

$V(h)$ означава потпуну варијацију од $A(t)$ на $(0, h)$ и

с) $\varphi_X(t) \rightarrow 0$ за $t \rightarrow 0$, (26)

где је

$$\varphi_X(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Доказ:

Показаћемо да се и овај критеријум ослања на већ познати услов конвергенције Фуриерових редова у тачки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt, \quad (27)$$

где је δ такав број да је на $(0, \delta)$ функција $A(t)$ функција ограничене варијације.

Интеграл у (27) можемо написати као збир два интеграла:

$$\int_0^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^{k \frac{\pi}{n}} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt \quad (28)$$

Према услову (26) је

$$\sup_{0 \leq t \leq k \frac{\pi}{n}} |\varphi_X(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{па је} \quad (29)$$

$$\left| \int_0^{k \frac{\pi}{n}} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq nk \frac{\pi}{n} \sup_{0 \leq t \leq k \frac{\pi}{n}} |\varphi_X(t)| = o(1) \quad (30)$$

Сада, према (28) можемо да напишемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt = o(1) + \int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt. \quad (31)$$

Проценимо интеграл

$$\int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt. \quad (32)$$

Уведимо помоћну функцију

$$B_n(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_X(t)}{t} = \frac{A(t)}{t^2} & \text{за } t \in \left(k \frac{\pi}{n}, \delta\right) \\ 0 & \text{за } t \in \left(k \frac{\pi}{n}, \delta\right) \end{cases} \quad (33)$$

Према изразу за $B_n(t)$, увиђамо да је она функција ограничене варијације. Према (33) интеграл исказан са (32) можемо да напишемо у форми

$$\int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} B_n(t) \sin nt dt. \quad (34)$$

Дакле,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{k \frac{\pi}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \frac{W_n}{n} \quad (35)$$

где смо са W_n означили потпуну варијацију функције $B_n(t)$ на $[-\pi, \pi]$. Ова величина свакако зависи од броја K . Уколико успемо да покажемо да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји такво K , па да важи однос

$$W_n < \varepsilon \cdot n,$$

тада би важила и релација

$$\left| \int_{k \frac{\delta}{n}}^{\delta} \varphi_X(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq \pi \varepsilon, \quad (39)$$

те би тиме и доказ био завршен.

Нека је $t = \frac{k\pi}{n}$, , тада је

$$B_n(t) = \frac{A\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{h\pi}{n}\right)^2} = \frac{\frac{k\pi}{n} \varphi_X\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} = \frac{n}{k\pi} \varphi_X\left(\frac{k\pi}{n}\right) = o(n), \quad (37)$$

још је и

$$B_n(\delta) = \frac{A(\delta)}{\delta^2} = o(1). \quad (38)$$

Релације (32) и (33) нам омогућавају да проценимо W_n , тј. потпуну варијацију $B_n(t)$ на $\left(\frac{k\pi}{n}, \delta\right)$ при погодном избору броја K . Уколико $W_n \rightarrow 0$, при поменутим условима, онда ће $W_n \rightarrow 0$ и на $(-\pi, \pi)$, јер су скокови $B_n(t)$ за $t = \frac{k\pi}{n}$ односно $t = \delta$, величине $o(n)$ и $o(1)$.

На основу (25) за тоталну промену функције $A(t)$, важи

$$V(t) < ct, \quad c = \text{const.},$$

па $A(t)$ можемо да напишемо у форми

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t), \quad (39)$$

$A_1(t)$ и $A_2(t)$ су монотоне функције. Оне испуњавају услове

$$|A_1(t)| < ct \text{ и } |A_2(t)| < ct. \quad (40)$$

Деобом интервала $\left(\frac{k\pi}{n}, \delta\right)$ раздеоним тачкама

$$t_0 = \frac{k\pi}{n}, t_1, t_2, \dots, t_m = \delta$$

и користећи (40) добијамо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{A_1(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{A_1(t_i)}{t_i^2} \right| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |A_1(t_{i+1}) - A_1(t_i)| + \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} |A_1(t_i)| \left| \frac{1}{t_{i+1}^2} - \frac{1}{t_i^2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{t_{i+1}^2} |V(t_{i+1}) - V(t_i)| + 2 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{|A_1(t)|}{t^3} dt \leq \\ &\leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{d[V(t)]}{t^2} + 2C \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогним поступком добијамо

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{A_2(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{A_2(t_i)}{t_i^2} \right| \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dV(t)}{t^2} + 2C \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \quad (42)$$

Имајући у виду (39), (41) и (42) је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{A(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{A(t_i)}{t_i^2} \right| &\leq 2 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dV(t)}{t^2} + 4C \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} = \\
&= 2 \frac{V(t)}{t^2} \bigg|_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} + 4 \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{V(t)}{t^3} dt + 4C \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \leq \\
&\leq 2 \frac{V(\delta)}{\delta^2} + 8C \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{2V(\delta)}{\delta^2} + 8C \frac{n}{k\pi}.
\end{aligned} \tag{43}$$

За $n \rightarrow \infty$, неједнакост (43) пишемо у облику

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{A(t_{i+1})}{t_{i+1}^2} - \frac{A(t_i)}{t_i^2} \right| \leq \frac{2V(\delta)}{\delta^2} + \varepsilon n = o(n) \tag{44}$$

те закључујемо

$$W_n = o(n). \tag{45}$$

Закључком исказаним за (45) је и доказан критеријум В. Х. Јунга.

6) Критеријум Лебега³⁾

Лебегов критеријум гласи:

Ако је

$$\int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_X(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_X(u)}{u} \right| du \rightarrow 0 \tag{46}$$

за $h \rightarrow 0$, онда $\sigma(f)$ конвергира ка $f(x)$ у тачки x .

Критеријум Лебега се заснива на теми:

(24) Предпоставимо ли да је

$$\int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_X(u+h)}{u+h} - \frac{\varphi_X(u)}{u} \right| du \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +0, \tag{47}$$

онда стављајући

$$\phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du, \quad (48)$$

следи да је

$$\phi_x(t) = 0(t). \quad (49)$$

Критеријум Лебега можемо исказати и овако:

Ако су за произвољну тачку испуњени услови

$$\phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)| du = 0(1), \quad (50)$$

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| du = 0(1), \quad h \rightarrow 0, \quad (51)$$

онда $\sigma(f)$ конвергира ка $f(x)$ у тој тачки.

7) Критеријум Лебега—Гергена²⁾

Критеријум Лебега—Гергена гласи:

Ако је

$$\int_0^t \varphi_x(u) du = 0(t) \text{ и}$$

$$\int_h^\delta \left| \frac{\varphi_x(u+h) - \varphi_x(u)}{u} \right| du = 0(1), \quad h \rightarrow 0,$$

онда $\sigma(f)$ конвергира ка $f(x)$ у тачки x .

Поменимо још и критеријум К. Хардија и Литтлвудда који се заснива на извесним условима које треба да испуњавају коефициенти Фуриеровог реда па да $\sigma(f)$ конвергира у задатој тачки.

Критеријум К, Хардија и Литлвудда гласи:

Ако је

$$a_n = 0\left(\frac{1}{n\delta}\right), \quad b_n = 0\left(\frac{1}{n\delta}\right), \quad \delta > 0 \quad (52)$$

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{|h|}}\right), \quad (53)$$

онда $\sigma(f)$ конвергира у задатој тачки ка функцији $f(x)$.

На крају овог поглавља наведимо још само и критеријум Идзумија:

Уколико је $f(x)$ парна и периодичка функција и која испуњава услове

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{n}}^{\delta} |f(t)| dt = o(t), \quad t \rightarrow 0 \quad (54)$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/n} \psi(n, t) dt = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (55)$$

где је

$$\psi(n, t) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \int_{t + \frac{2k\pi}{n}}^{t + \frac{(2k+1)\pi}{n}} \frac{f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{n}\right)}{x} dx,$$

онда $\sigma(f)$ конвергира у тачки $x = 0$.

II

У више наведених критеријума конвергенције Фуриерових редова у задатој тачки (Вале-Пусена, Јунга, Лебега, Лебега-Гергена) услови

$$\int_0^t |\varphi_x(u)| du = o(t) \text{ и}$$

$$\int_0^t \varphi_x(u) du = o(t)$$

су били и потребни и довољни.

Међутим, уверићемо се да услов

$$(52) \quad \int_0^t \varphi_x(u) du = o(t)$$

не мора да буде и потребан за конвергенцију Фуриеровог реда у ма датој тачки. Наиме, покажемо:

Може се конструисати L -интеграбилна функција $f(x)$, чији Фуриеров ред конвергира у задатој тачки, а да је при томе

$$\left| \int_0^t \varphi_x(u) du \right| \geq F(t), \quad (1)$$

функција $F(t)$ испуњава услове:

$$\begin{aligned} F(t) &\geq 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0} F(t) &= 0; \\ F(t_n) &> +\infty \end{aligned} \quad (2)$$

Претпоставимо да је функција $f(x)$ парна и да је за $x=0$ $f(0)=0$, тада је

$$\varphi_x(t) = f(0+t) + f(0-t) - 2f(0) = f(t) + f(-t) = 2f(t).$$

Нека су дати низови позитивних бројева (t_n) , (u_n) и (v_n) са овим особинама:

а) (t) је опадајући низ, тако да је $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, $n \rightarrow \infty$

$$\text{б) } v_n = \frac{2}{n!}, \quad u_n = \frac{n}{2^n}; \quad v_n < u_n < t_n; \quad t_{n+1} < v_n < u_n \quad (3)$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0, \quad n = 6, 7, 8, \dots$$

Према (3) конструишемо скуп интервала који се могу учинити дисјунктним, бирајући погодно (t_n)

$$\Delta = \{\Delta_n\}, \quad \Delta_n = (t_n - u_n; t_n - v_n), \quad n = 6, 7, 8, \dots$$

Дефинишемо парну функцију $f(x)$ овако:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} \cdot t \\ \frac{1}{t_n - t}, & t \in \Delta_n; \alpha > 1 \\ 0 & \text{за } t \notin \Delta_n; n = 6, 7, 8; (0, \pi) \end{cases} \quad (4)$$

Тада је

$$\int_0^{\pi} |f(t)| dt = \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{n^{\alpha}} t \right| dt = \sum_{n=6}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{\Delta_n} \left| \frac{t}{t_n - t} \right| dt + \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{C_{\Delta_n} [0, \pi]} \left| \frac{t}{t_n - t} \right| dt \right\}.$$

Како је

$$\int_{C_{\Delta_n} [0, \pi]} \left| \frac{t}{t_n - t} \right| dt = 0, \text{ то имамо}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |f(t)| dt &= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{\Delta_n} \left| \frac{t}{t_n - t} \right| dt = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt = \\ &= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(v_n - u_n + t_n \ln \frac{u_n}{v_n} \right) = \\ &= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\frac{2^{2n} - n \cdot n!}{2^n n!} + t_n \ln \frac{n \cdot n!}{2^{2n}} \right), \alpha > 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Пошто

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\frac{2^{2n} - n \cdot n!}{2^n n!} \right), \alpha > 1$$

конвергира, то при погодном избору (t_n) може се учинити да важи

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} t_n \ln \frac{n \cdot n!}{2^{2n}} < +\infty, \alpha > 1 \quad (6)$$

Дакле, (6) је конвергентан ред те закључујемо да је $f(x)$, дефини-сана са (4), L -интеграбилна функција.

Уверимо се да $\sigma(f)$ конвергира. Како је $f(x)$ парна функција, то је

$$\int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin mt}{t} dt = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{\Delta_n} \frac{t}{t_n - t} \cdot \frac{\sin mt}{t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{\Delta_n} \frac{\sin mt}{t_n - t} dt = \\
&= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{\Delta_n} \frac{\sin mt_n \cdot \cos m(t - t_n) - \cos mt_n \sin m(t - t_n)}{t_n - t} dt = \\
&= \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{\Delta_n} \frac{\sin m(t - t_n)}{t_n - t} dt = \\
&= -2 \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{-u_n}^{-v_n} \frac{\sin mu}{u} du = \\
&= 2 \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{-v_n}^{-k_n} \frac{\sin mu}{u} du = \\
&= -2 \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{v_n}^{u_n} \frac{\sin mu}{u} du, \alpha > 1 \quad (7)
\end{aligned}$$

Узимајући у обзир да је

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty, \alpha > 1,$$

показаћемо да десна страна у (7) тежи нули када $m \rightarrow \infty$. Како је

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin mt}{t} dt \right| \leq \pi, \text{ за } \alpha, \beta \in (0, \infty),$$

сем тога је јшo и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin mt}{t} dt = 0; \alpha, \beta > 0.$$

Тада за произвољно $\varepsilon > 0$ може се наћи такво N , па да важи

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon, \alpha > 1.$$

У том случају је

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{v_n}^{u_n} \frac{\sin mu}{u} du \right| < \varepsilon \pi.$$

За фиксирано N је

$$\sum_{n=6}^N \frac{1}{n^{\alpha}} \cos mt_n \int_{v_n}^{u_n} \frac{\sin mu}{u} du = 0 \quad (1),$$

пошто је сваки сабирак $\int_{v_n}^{u_n} \frac{\sin mu}{u} du$ величине $o(1)$.

Дакле, показали смо да $\sigma(f)$ конвергира.

Са друге стране је

$$\int_{\Delta_n} f(t) dt = \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt = \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\frac{2^{2n} - nn!}{2^n n!} + t_n \ln \frac{nn!}{2^{2n}} \right). \quad (8)$$

Такође је

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n - u_n}^{t_n} f(t) dt \right| &= \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{t_n - u_n}^{t_n - v_n} \frac{t}{t_n - t} dt + \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{t_n - v_n}^{t_n} \frac{t}{t_n - t} dt = \\ &= \frac{1}{n^{\alpha}} \left(t_n \ln \frac{nn!}{2^n} + \frac{2^{2n} - nn!}{2^n n!} \right) > \frac{1}{n^{\alpha}} \left(t_n \ln \frac{nn!}{2^n} - \frac{nn!}{2^n n!} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Како је } \frac{1}{n^{\alpha}} \left(t_n \ln \frac{nn!}{2^n} - \frac{nn!}{2^n n!} \right) = \frac{1}{n^{\alpha}} t_n \left(\ln \frac{nn!}{2^n} - \frac{n}{2^n t_n} \right) >$$

$$> \frac{1}{n^{\alpha}} t_n \left(\ln \frac{nn!}{2^n} - 1 \right) = \frac{1}{n^{\alpha}} t_n \ln \frac{nn!}{2^n} - \frac{1}{n^{\alpha}} t_n > \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\alpha}} t_n \ln \frac{nn!}{2^n}.$$

Дакле

$$\left| \int_{t_n - u_n}^{t_n} f(t) dt \right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n}. \quad (9)$$

Претпоставимо да су испуњени услови:

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{2^n}{n!} \right) < \frac{1}{8} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n}, \quad n = 6, 7, 8, \dots \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{4} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n} \geq F(t_n); \quad n = 6, 7, 8, \dots, \quad \alpha > 1. \quad (11)$$

Сада, позивајући се на познате релације

$$\int_{\Delta_n} f(t) dt = \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{2^{2n} - nn!}{2^n n!} + t_n \ln \frac{nn!}{2^{2n}} \right),$$

$$\left| \int_{t_n - u_n}^{t_n} f(t) dt \right| > \frac{1}{2} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n}; \quad \alpha > 1,$$

као и на (10) и (11), следи

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_n} f(u) du \right| &= \left| \sum_{n+1}^{\infty} \int_{\Delta_n} f(t) dt + \int_{t_n - u_n}^{t_n} f(t) dt \right| > \\ &> \frac{1}{2} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n} - 2 \cdot \frac{1}{8} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{n^\alpha} t_n \ln \frac{nn!}{2^n} \geq F(t_n); \quad \alpha > 1, \quad n = 6, 7, 8, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Према неједнакости (12), добијамо

$$\left| \int_0^t f(u) du \right| \geq F(t_n),$$

чиме је наше тврђење и доказано:

За функцију $f(x)$, дефинисану са (4), $\sigma(f)$ конвергира, а при томе услов

$$\int_0^t f(u) du = 0(t)$$

није и неопходан.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бари — Тригонометријски редови, Москва, 1961.
2. Г. Харди и В. Рогозински — Фуриеорви редови, Москва, 1961.
3. А. Зигмунд — Тригонометриски редови, Москва, 1965.
4. Г. М. Фихтенгољц, Кус диференцијалног и интегралног рачуна, Москва, 1963.
5. С. Аљанчић — О неким новијим резултатима из тригонометријских трансформација, САН, 1960.

БОГДАН ДАМЊАНОВИЧ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ КОНВЕРГЕНЦИИ ФУРЬЕРОВЫХ РЯДОВ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

Резюме

В данной работе приводится пример L -интегрируемой функции $f(x)$, Фурьеров ряд которой сходит в заданной точке при

$$\int_0^t f(u) du = 0(t)$$

не являющимся необходимым условием.

В первой главе работы дано описание важнейших признаков сходимости Фурьеровых рядов в заданной точке.

MIODRAG JABLANOVIĆ

ANALIZA ENDOGENIH SUPSTANCI TIP A GIBERELINA U
PUPOLJCIMA GRAŠKA (PISUM SATIVUM)
POSLE ODSECANJA STABLA

U toku posljednjih sedam decenija akumulirano je dosta eksperimentalnih podataka koji se tiču studije apikalne dominacije, jednog od, interesantnih problema morfogeneze.

U najranijim istraživanjima (Goebel 1900, Loeb 1924)] kompeticija za hranljive materije između terminalnog i bočnih pupoljaka smatrana je operativnom faktorom u održavanju apikalne dominacije. Gregory i Veale (1957)] ponovo skreću pažnju na značaj hranljivih materija. Oni su pokušali za procene relativnu ulogu hranljivih materija i hormona. Našli su da auksin inhibira bčone pupoljke samo ako je količina azota i ugljenih hidrata u podlozi mala. Zapazili su takođe da je diferenciranje sprovednog sistema kod dormantnih pupoljaka nekompletno što otežava transport hranljivih materija do ovih pupoljaka. Autori smatraju da bi auksin iz terminalnog pupoljka mogao imati udela u diferenciranju sprovednih sistema.

Ballard i Wildman (1964)] pružaju podršku teoriji efekta hranljivih materija. Oni su našli da se apliciranjem saharoze snažno povećava mitotička aktivnost u bočnim pupoljcima. Rezultati eksperimenata koje je postavio Mac Quarrie mogu se dovesti u vezu sa ovim shvatanjem. Prema ovom autoru ISK kontroliše transport šećera.

Na drugoj strani stoji dosta rasprostranjeno shvatanje, potkrepljeno mnogobrojnim eksperimentalnim radovima, o hormonalnoj regulaciji apikalne dominacije na bazi direktne inhibicije bočnih pupoljaka. Snow (1929) je svojim eksperimentima inspirisao čitavu seriju radova. On sugerira postojanje inhibitorne supstance odgovorne za održavanje apikalne dominacije.

Thimann i Skoog (1933, 34)] su ovu supstancu identifikovali kao auksin. Odsecanjem terminalnog pupoljka, oni su bočne pupoljke oslobodili inhibicije i ovi se nakon ove intervencije počinju da razvivaju. Dalje su apliciranjem lanolinske paste sa ISK na mesto preseka dekapitiranih biljaka konstatovali inhibiciju bočnih pupoljaka. ISK se, dakle, u eksperimentima ovih istraživača ponašala na isti način kao i terminalni pupoljak intaktne biljke u smislu inhibicije bočnih pupoljaka. Do sličnog zaključka došli su

Wickson i Thimann (1960)), koji su svoja shvatanja rezimirali na sledeći način: „ISK, koja se proizvodi u apeksu i transportuje niz stablo do bočnih pupoljaka predstavlja primaran uzročni faktor održavanja apikalne dominacije”.

Wickson i Thimann su (1958), na segmentima graška pokazali da kinetin može da savlada inhibiciju bočnih pupoljaka indukovanu auksinom. Slične rezultate prezentiraju Panagrahi i Audus (1966).. Razvijajući ovu ideju Sokokin i Thimann su postavili eksperimente sa segmentima graška tretirajući ih kinetinom i postigli kompletiranje vaskularnih veza a zatim i rasteње bočnih pupoljaka. Stimulirajući efekt kinetina na bočne pupoljke, na rasteње bočnih pupoljaka, neki istraživači (Wareing) tumače mobilizacijom hranljivih materija.

Ni tako relativno veliki broj radova još uvek nam ne omogućuje da sagledamo funkciju auksina i citokinina u regulaciji apikalne dominacije, a naročito što se tiče mehanizma njihovog dejstva.

Libbert (1964) i sugerira postojanje i drugih, specifičnih inhibitora osim ISK.

Manji je broj radova koji se tiču uloge giberelina u regulaciji apikalne dominacije, pa je i njihova uloga manje jasna. Manfred i Richard (1965, 66) su pratili interakciju AMO 1618 i giberelne kiseline kod sekvoje i kiparisa. AMO 1618 u njihovim eksperimentima stimulira rasteње bočnih pupoljaka dekapitiranih biljaka. Istovremena primena i giberelne kiseline rezultira u zadržavanju razvika grana iz bočnih pupoljaka. Kod graška je praćena interakcija auksina i giberelina (Jacobs i Case 1965, 67). „] Rastvori auksina i giberelina u raznim koncentracijama aplicirani su na dekapitirane mlade biljke graška. Supstitucija vrha stabala rastvorima IAA+GA obnavlja apikalnu dominaciju efektnije nego kad se upotrebi samo IAA. Autori smaraju da u interakciji auskin-giberelina giberelini mogu imati protektivnu ulogu u odnosu na auksin.

Kao što se iz ovog kratkog pregleda eksperimentalnih radova vidi, većina istraživača u proučavanju hormona rasteња u vezi sa apikalnom dominacijom pristupaju tretiranju intaktnih ili, što je češće, dekapitiranih biljaka rastvorima čistih supstanci (auksina, giberelina i citokinina) aplicirajući ih na mesta preseka ili same inhibirane pupoljke. Dalje se prati odgovor biljke na ovakav tretman pojedinim supstancama ili smešom više njih gde se mogu manifestovati i interakcije.

Manje je, međutim, pokušaja da se prate i analiziraju endogene aktivne supstance rasteња i razvika u samim biljkama a naročito bočnim pupoljcima dominacije apikalnog pupoljka. Izabrali smo ovaj drugi pristup, koji polazi od analize endogenih supstanci tipa giberelina u funkciji vremena, posle narušavanja apiaklne dominacije, dekapitacijom tj. odsecanjem dominantnog, terminalnog pupoljka mladih biljaka graška.

MATERIJAL I METODI

Za ove eksperimente upotrebljene su mlade biljke graška (*Pisum sativum*, sorte „Aljaska”) kod kojih je dobro izražena dominacija terminalnog pupoljka nad pupoljcima u pazuhu kotiledona, pa predstavljaju pogodan objekt za proučavanje apikalne dominacije. Seme graška je bogato rezervnim hranljivim materijama pa se biljka može izvesno vreme (koliko traju ogledi) gajiti bez hranljive podloge. Zahvaljujući samoograšivanju, kod graška su fenotipski karakteri u velikoj meri ujednačeni. Seme je nabavljeno od preduzeća za promet semenom „Semenarna” iz Ljubljane. Za ogled je birano zdravo seme ujednačene veličine a zatim je postavljeno u vodu i u mraku podvrgnuto imbibiciji u toku 4 časa. Kao mehanička podloga upotrebljen je kvarcni pesak, sterilisan u autoklavu do 1,2 atm. Sudovi sa semenom držani su u mraku do pojavljivanja epikotila iznad mehaničke podloge a zatim su mlade biljke gajene u klima-komori na svetlosti i temperaturi 24° C. Vlažnost u komori održavali smo pomoću specijalnog aparata („Gejzir”) za vlaženje i prečišćavanje vazduha.

Terminalni deo stabla odsecan je šest dana nakon sejanja semena. Posle ove dekapitacije razvijaju se dva bočna pupoljka iz pazuha kotiledona, od kojih jedan dominira. Dominantan pupoljak od dva bočna odsecan je šest dana nakon prve dekapitacije odnosno kod biljaka starih 12 dana.

Ukupna giberelinska aktivnost u biotestovima praćena je i analizirana u zavisnim, kotiledonarnim pupoljcima oslobođenim inhibicije dominantnog u funkciji vremena, tj.: 1, 6, 12, 18 i 24 časa, zatim 3 i 6 dana nakon druge dekapitacije.

Ekstrahcija i separacija giberelina

Uzorak za ove eksperimente čini 50 zavisnih pupoljaka oslobođenih inhibicije dominantnog, pupoljka tj. posle druge dekapitacije. Posle liofilizacije gibereline smo ekstrahovali prečišćenim metalnoom ohladjenim do -20° C. Ekstrakt je preko noći držan na -20° C a zatim filtriran i uparavan do suvog ostatka u vakuum evaporatoru. Suvi ostatak smo rastvorili u 25 ml redestilovane vode. Gibereline smo prevodili u etil acetat u tri maha sa po 50 ml etil acetata pri kiselosti pH 2,5 što je podešeno rastvorom n/10 fosfrone kiseline. Kisela EA frakcija propuštana je kroz natrijev sulfat bezvodni a zatim uparavana do suvog ostatka. Ovako pripremljen preparat giberilana upotrebljen je za biološke testove na gibereline.

Biotestovi

Endosperm test. — Između nekoliko savremenih testova koji se upotrebljavaju za testiranje aktivnosti giberelina ovaj ima neke karakteristike koje ga čine pogodnim: relativno brz odgovor na giberelinski tretman (rezultati se mogu dobiti već posle 24 časa); odgovor izgleda specifičan za gibereline (ostale supstance koje su testirali razni autori nisu dale sličnu re-

akciju); osetljivost ovoga testa je u odnosu na druge veća za 10—100 puta (GA i GA).

Giberelna kiselina stimulira sintezu hidrolitičkih enzima u prvom redu alfa-amilaze u aleuronskom sloju semena trava i kao rezultat ove aktivnosti javljaju se redukujući šećeri nastali hidrolizom skroba iz endosperma semena.

Ova činjenica potvrđena je mnogobrojnim eksperimentima više autora. Na ovom efektu giberelina počiva endosperm test a prvi put je opisan 1963. god. (Nicholis i Paleg), a zatim 1967. (B. G. Coombe, O. Cohen i L. Paleg)] uvode neke modifikacije koje se tiču uslova testiranja. Modifikacija endosperm testa koji smo mi upotreabili sastoji se u primeni 50% H_2SO_4 za sterilizaciju semena umesto kalcijum hipohlorita a vreme inkubacije je skraćeno na 24 časa. Čini nam se da je ovim postupkom ublažena osnovna teškoća u ovom testu — infekcija materijala. Za testiranje je upotrebljeno seme ječma sorte „Union” „Semenarne” iz Ljubljane.

U svemu ostalom primenjen je postupak kao u izvornom testu.

Hipokotil test. — Drugi upoređan test koji smo upotreabili za gibereline zasnovan je na stimulaciji izduživanja hipokotila kao odgovor na tretman giberelinima. Za ovaj test upotreabili smo seme salate sorte „Nansen”.

Za postavljanje i izvođenje ovoga testa primenjen je postupak koji su opisali Frankland i Wareing 1960 god.)

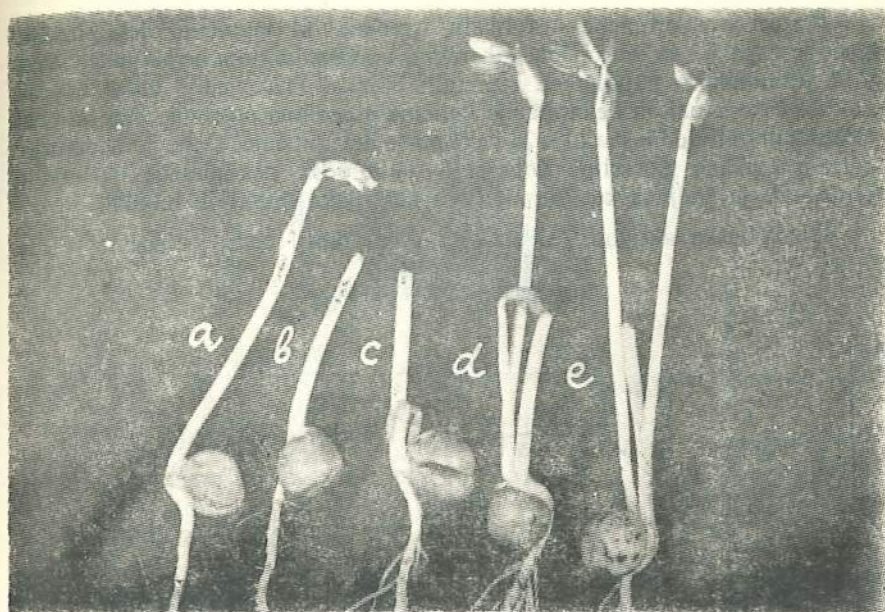
REZULTATI

Posle odsecanja apikalnog dela stabla mladih biljaka grška počinju da se razvijaju dva pupoljka u pazuhu kotiledona koji su do tada mirovali. Jedan od ova dva pupoljka, koji su posle dekapitacije oclobođeni inhibicije, brže se razvija dok drugi zaostaje. Na taj način se ponovo uspostavlja dominacija ali sada na drugom nivou, na nivou bočnih pupoljaka. Samo u oko 5—7% dekapitiranih biljaka dominacija je slabo izražena ili je nema i bočni pupoljci su iste veličine.

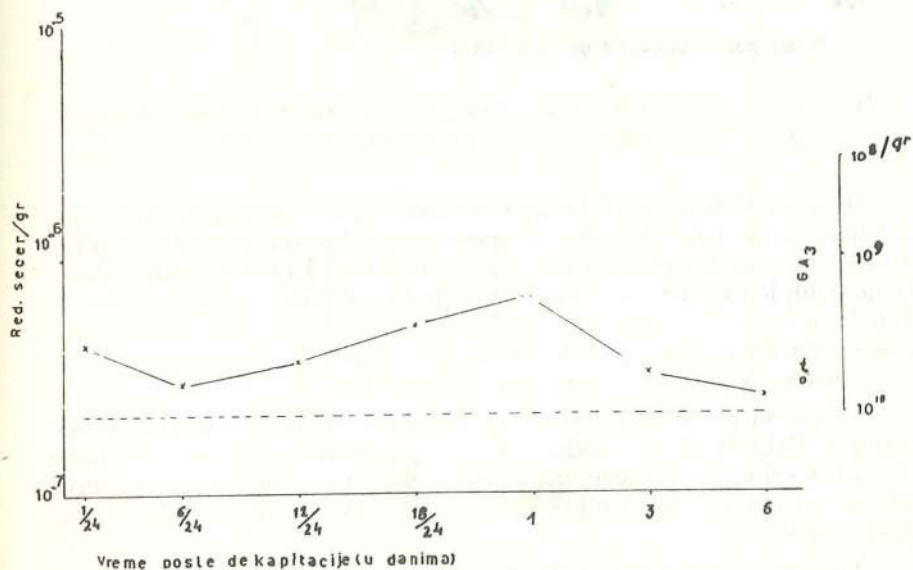
Da bismo se uverili da se dekapitacijom narušena apikalna dominacija ponovo uspostavlja na relaciji bočnih pupoljaka, jednoj grupi biljaka smo uklonili dominantne bočne pupoljke. Posle narednih 6 dana zavisni pupoljci iz ove grupe biljaka postigli su prosečnu veličinu od 118,5 mm, što je u odnosu na kontrolne biljke gde dominantan pupoljak nije odsecan (51,4 mm) značajno i ukazuje na postojanje dominacije na ovom nivou.

Preparat giberelina napravljen na opisani način testiran je sa dva upoređna testa. Jedna polovina preparata upotrebljena je za ednosperm test a druga za hipokotil test, tako da uzorak za test čini u stvari eksprakt od 25 biljaka.

Rezultati endosperm testa prikazani su na slici 2.



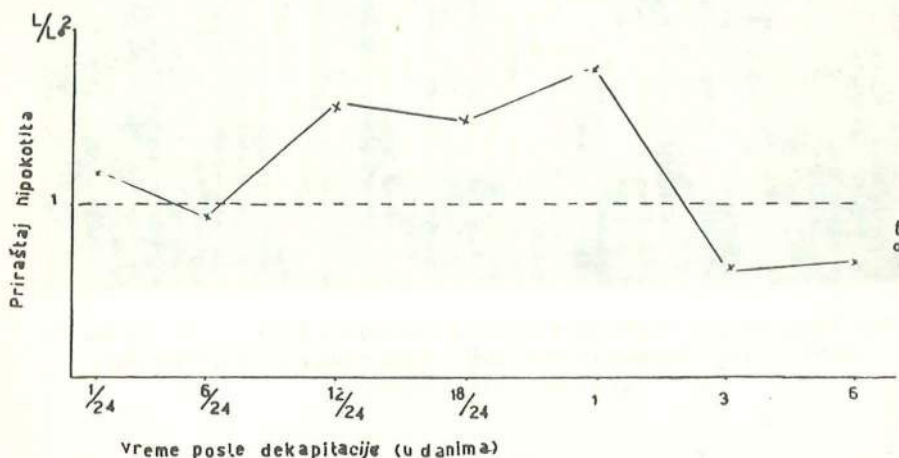
Sl. 1. a) Intaktna biljka; b) neposredno posle dekapitacije c) tri dana posle dekapitacije; d) 6 dana posle dekapitacije, dominacija na^o nivou bočnih pupoljka postoji; e) dominacija nije izražena.



Sl. 2. Na apscisi je prikazano vreme uzimanja uzoraka; na ordinati redukujući šećeri, tj. uzorak terminalnih pupoljaka intaktnih biljaka.

Prateći ove promene u funkciji vremena od momenta dekapitacije moguće je zapaziti da je količina giberelina u zavisnim pupoljcima nešto veća nego u terminalnim pupoljcima intaktnih biljaka. Posle jedne blage depresije oko 6 časova nakon dekapitacije količina giberelina pokazuje blag porast sa maksimalnom vrednošću oko 24 časa posle dekapitacije. Dalje je evidentno smanjenje količine giberelina koja je 6 dana posle dekapitacije na nivou količine koja je nadjena kod terminalnih pupoljaka intaktnih biljaka.

Giberelinska aktivnost ekstrakata u hipokotil testu prikazana je na slici 3.

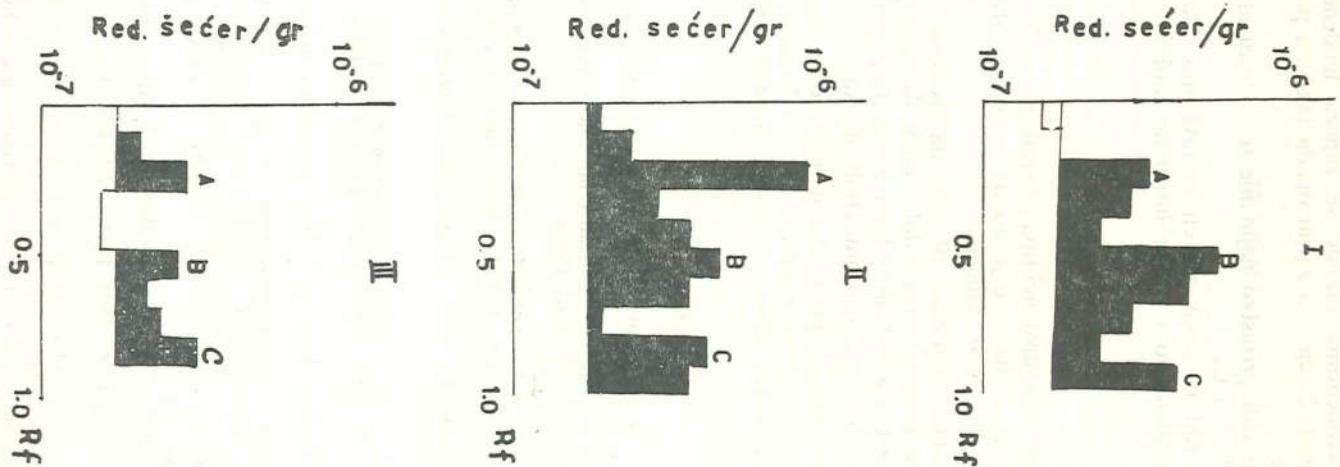


Sl. 3. Hipokotil test: priraštaj hipokotila kao odgovor na tretman giberelinskim preparatom iz zavisnih pupoljaka u funkciji vremena posle dekapitacije.

Tendencije u promeni količine giberelina posle odsecanja dominantnog pupoljka na koje ukazuje endosperm test uglavnom potvrđuje i hipokotil test. Izvesnu nesaglasnost pokazuje uzorak uzet 3 i 6 dana nakon dekapitacije. Dok je ovaj uzorak u endosperm testu pokazivao izvesnu aktivnost, u hipokotil testu je vidljiva čak inhibicija na hipokotil salate. Skloni smo da verujemo da to nije rezultat giberelinske indukcije, već se ovo možda može tumačiti prisustvom nekog specifičnog inhibitora.

Primenjujući hromatografiju na papiru u sistemu rastvarača: Iso-propanol: NH_4OH (25%): voda (10 : 1 : 1), pokušali smo da razdvojimo u ekstraktu prisutne endogene gibereline. U svemu ostalom biljke ove serije imale su isti tretman kao i biljke čiji smo ceo ekstrakt testirali, kao što je napred opisano.

Histogrami na slici 4. prikazuju giberelinsku aktivnost u endosperm testu hromatografisanih uzoraka na tri karakteristične tačke posle dekapitacije.



Sl. 4. Ekstrakti (hromatogrami) testirani enosperm testom: I—1 čas, II — 24 časa i III — 6 dana napokon odsecanja dominantnog pupoljka.

I u ovim eksperimentima takođe se zapaža tendencija povećanja količine giberelina u prvih 24 časa, a zatim opada tako da posle 6 dana na nivo intaktnih biljaka.

Iz histograma se vidi prisustvo najmanje tri u testu aktivne materije koje smo označili sa A, B i C.

Eksperimentalni rad u ovom pravcu nastavljamo. Namera nam je da ovim pristupom analiziramo i druge hormone (auksine i citokinine).

ZAKLJUČAK

1. Analizom endogenih supstanci tipa giberelina u zavisnim pupoljcima posle odsecanja dominantnog moguće je dobiti korisne informacije o ulozi giberelina u regulaciji apikalne dominacije.

2. Rezultati ovih eksperimenta ukazuju na promene u smislu povećanja količine giberelina u pupoljcima oslobođenim dominacije u prvih 24 časa posle dekapitacije; zatim se količina giberelina u funkciji vremena smanjuje i 6 dana nakon dekapitacije je na nivou intaktnih biljaka.

3. U ekstraktima zavisnih pupoljaka moguće je konstatovati u toku svih 6 dana (koliko traju analiza uzoraka) posle odsecanja dominantnog pupoljka najmanje tri u testu aktivne endogene supstance tipa giberelina.

NAPOMENE

1. a, 1b, 1c. Leatsch M. W. & Cleland R. E. 1967. Papers on Plant growth and development Little, Brown and Company, Boston 77—79.
2. Shnow R. 1937. On the nature of correlative inhibitions. Papers on Plant growth and development, Little, Brown and Company, Boston.
3. Thimann K. & Skoog F. 1933. On the inhibition of bud development and other functions of growth substance in *Vicia faba*. Papers on Plant growth and development. Little, Brown and Company, Boston, 1967., 75—81.
4. Wickson M. & Thimann K., 1965. The antagonism between kinetin and Indoleacetic acid in lateral bud development. *Plant Physiol.*, 31.
5. Wickson M. & Thimann K. 1957. The antagonism between auxin and kinetin in Apical dominance. Papers on Plant growth and development Little Brown and Company, Boston, 1967.
6. Panagari B., M. & Audus L., J., 1966. Apical dominance in *Vicia faba*. *Annales of Botany*, vol. 230, 119.
7. Overbeek, 1966. Plant hormones and regulators. *Science*, vol. 152, 3723.
8. Richard P., Ruddat M., Phillips C., Hoffman E. 1965. Gibberellin, growth and Apical dominance in arizona cypres. *Naturwissenschaften*, 52, 4:88—89.
9. Jacobs W. R., & Case D., 1965. The role of gibberellin in Apical dominance in green Alaska pea. *Plant Physiol.*, 40.
10. Jacobs W. P. & Case D. 1965. The role gibberelin in Apical dominance. *Science* 148, 3678:1729—1731.
11. Nicholis D. B., & Paleg L. G. 1963. Barley endosperm bioassay for gibberelins. *Nature*, vol. 199, 4895.
12. Combe B. G., Paleg L. and Choen D. 1967. Barley bioassay for gibberellins. II—Application of the method. *Plant Physiol.* 42, 1:113—119.
13. Frankland B. & Wareing P. F. 1960. Effects of gibberellic acid on hypocotyl growth lettuce seedlings. *Nature*, 185:255, 256.

Miodrag Jablanović.

ANALYSIS OF ENDOGENOUS GIBBERELLINE—LIKE SUBSTANCES IN PEA BUDS AFTER STEM DECAPITATION

S u m m a r y

The endogenous gibberellin like substances have been analyzed in axillary Pea (*Pisum sativum*), buds after cutting off the dominant bud. After cutting off the shoot of young branches of Pea plant, two buds begin to develop in the lateral position of the cotyledon which had until then been still. One of the two buds develops more intensively in about 92% cases, and takes over the function of the dominant bud. In that way, the once distrurbed apical dominance, by having cut off shoot, is regained on the relation of the lateral cotyledon buds.

From two lateral buds we have cut off the dominant one and then, in the function of time from 1 hour to 6 days after the decapitation, have analyzed the gibberellins in dependent buds freed from inhibition.

We extracted the gibberellins by means of methanol, and then in the acidity of pH 2.5 transferred into ethyl acetate.

The gibberellin preparation, prepared in that way, is then used for bioassay.

The endosperm test has been done with half of the extract, whereas the other half has been used for the hypocotyl test.

The results of these experiments point out to the changes in the dependent buds, after amputating the dominant ones, in the sense of the increasing amount of the gibberellins in the course of the first 24 hours after the decapitation. After that interval, amount of the gibberellins decreases so that in 6 days after the removal of the dominant bud the amount of the gibberellins in the dependent buds is very close to the values which have found for plants.

The results, obtained by the endosperm and hypocotyl test, essentially accord. A certain disaccordance is only to be seen in the extract 3 to 6 days after the decapitation. In the endosperm test these extracts show a certain gibberellin activity, whereas in the hypocotyl test there are no such effects. We are not apt to believe that the inhibition, in the hypocotyl test on this part of the curve, should be brought into relation with the gibberellins, it would perhaps be more logical to expect the presence of a specific inhibitor.

Using Chromatography on paper in the solvent system of Isopropanol: NH_4OH (25%): Water (10:1:1) we concluded that in the extracts, during those 6 days after the decapitation, the presence of at least three active endogene substances of the gibberellin type is to be found in the bioassays.

YMER MEROVCI

ORTOGONALNI SISTEMI U PRIMERIMA

Ideja geometrizacije analize je pojam našeg veka. Analog geometrije i analize se očituje uvođenjem ortogonalnog sistema funkcija koji je pak sa svoje strane sličan sistemu ortogonalnih vektora u Euklidskim konačno-dimenzionalnim prostorima.

Pri tome za geometrijsko predstavljanje beskonačnog ortogonalnog sistema funkcija ponovo se zahteva uopštavanje Euklidskog n -dimenzionalnog vektorskog prostora na beskonačno (prebrojiv) dimenzionalan.

Razlaganju vektora na ose-komponente odgovara razvijanje funkcije u Fourier-ov red sobiziorom na posmatrani ortogonalni sistem dok teoremi Pitagore odgovara teorema Parsevala.

Velika je zasluga Davida Hilberta što je zadatak o sopstvenim funkcijama tretirao kao problem svodenja beskonačno-dimenzionalne kvadratne forme na glavne ose.

Osnovno oruđe u ovoj teoriji je Lebesgueov integral i s tim u vezi potpun Hilbertov funkcionalni prostor L_2 koji dopušta uvođenje potpunog ortonormiranog sistema funkcija.

Pošto je, prema poznatom Riesz-Fischerovom stavu, svaki Cauchyev niz elemenata iz L_2 konvergentan u njemu, to u analogiji sa Euklidskim prostorima može se reći da je takođe neprekidan i L_2 pri tom se ne zahteva uvođenje pojma uređajne strukture u njemu. Potpunost prostora L_2 u smislu konvergencije u srednjem čini njegovu nitnu odliku i pogodnost za raznolika teoriska razmatranja kao što je teorija ortogonalnih redova, integralne jednačine itd. (1, 2, 4, 6, 11).

Cilj ovog rada se sastoji, s jedne strane, u primeni ortogonalnih sistema na rešavanju konkurentnih fizičkih problema kao što su oscilacije žice (homogene i nehomogene) koji pri tome vode do homogenih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda i, s druge, na ukazivanje koje su poteškoće i matematički aspekti takvih problema.

Ako je data funkcija $f(x) \in L_2$ i ortogormiran (ili samo ortogonalan) sistem funkcija $\{\omega_n(x)\}$ takođe iz L_2 , to ako je moguća reprezentacija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x) \quad (1)$$

gde su c_n ($n=1, 2, \dots$) Fourierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ s obzirom na sistem $\{\omega_n(x)\}$ dati sa

$$c_n = \int_a^b f(x) \omega_n(x) dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

onda se kaže da je funkcija $f(x)$ razvijena u ortogonalan red s obzirom na sistem $\{\omega_n(x)\}$.

Prema tome svakoj funkciji $f(x) \in L_2$ može se pridružiti funkcionalan red čiji su članovi ortogonalne funkcije tj.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x) \quad (2)$$

Osnovni pronlem teorije ortogonalnih redova sastoji se u iznalaženju uslova pod kojima se u relaciji (2) znak „ $\sim$ “ može zameniti znakom „ $=$ “ [4].

Klasičan primer ortogonalnog sistema predstavlja trigonometrijski sistem

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (3)$$

iz $L_2(-\pi, \pi)$ koji je potpun i ima osoninu da: *svaka funkcija $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ može se razviti u red s obzirom na sistem (3) koji konvergira u metici prostora $L_2(-\pi, \pi)$.*

Sistem (3) posle normiranja donija onlik

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (4)$$

Prema tome imamo klasičan rezultat Fouriera ukoliko se u (1) funkcije $\omega_k(x)$ zamene odgovarajućim iz (4).

Mnogobrojni su fizički problemi koji vode do razmatranja ortogonalnih sistema odnosno ortogonalnih redova: oscilatorni sistemi, vibracija žice ili membranem provodljivost toplote, difuzija gasova zatim ispitivanja u vezi Schrodingerove jednačine itd.

Kao što je poznato iz matematičke fizike svaka od gore navednih fizičkih pojava može se izraziti pomoću linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa parcijalnim derivacijama. Njihovom rešavanju može se prići sa različitih stanovišta, kao npr. u terminima upoštenih rešenja (distribucija), metodom integralnih transformacija, pomoću ortogonalnih redova itd.

Metodom ortogonalnih redova porražimo rešenje $U(x, t)$ homogene parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (*)$$

koja predstavlja jednačinu kretanja homogene (sa gustinom $\mu(x) = 1$) elastične žice fiksirane na oba kraje intervala $(0, \pi)$.

Neka su dati još granični uslovi

$$U(0, t) = 0 \quad (B_1)$$

$$U(\pi, t) = 0 \quad (B_2)$$

kao i početni uslov — položaj

$$U(x, 0) = f(x) \quad (I_1)$$

osciljuće žice, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija od x . Uslovima (B_1) , (B_2) i (I_1) obično se dodaje još sledeći uslov

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (I_2)$$

čiji fizikalni smisao predstavlja raspored brzine duž žice u momentu $t = 0$ i time kompletira poznati problem koji nosi naziv *Cauchyev zadatak*.

U funkcionalnom obliku mnoštvo svih rešenja jednačine (*) dato je izrazom

$$U(x, t) = \alpha(x + t) + \beta(x - t) \quad (**)$$

gde su α i β proizvoljne dva puta diferencijabilne funkcije svojih argumenata.

Ako se mnoštvo rešenja kompletira konkretno s obzirom na metriku uniformne konvergencije, to se na prirodan način dolazi do *uopštenih rešenja* (u smislu teorije distribucija) jednačine (*) koja su idalje u obliku (**) pri čemu α i β ne moraju biti više diferencijabilne ali svakako neprekidne.

Posmatrajmo sad zadatak sa aspekta ortogonalnih redova:

Neka su ispunjeni samo granični uslovi (B_1) , (B_2) i početni (I_1) . Tako postavljen zadatak može se uključiti u daleko šire okvire: *Sturm — Liouvilleov zadatak* koji se sastoji u sledećem:

Dat je diferencijalni operator Sturm—Liouville-a

$$L = Q - \frac{d}{dx} \left(P \frac{d}{dx} \right)$$

na $L_2(a, b)$, pri čemu funkcija $u \in L_2$ na kojoj je L definiran zadovoljava npr. granični uslov $u(a) = u(b) = 0$. Operator L nije svuda definiran na L_2 , nije ograničen ali je na njemu simetričan.

Ako se posmatra jednačina

$$Lu = \lambda u,$$

onda, kao što se zna, za različite (nenulte) sopstvene vrednosti operatora L dobijaju se različite sopstvene funkcije koje su ortogonalne u prostoru $L_2(a, b)^{10}$. U zadatku Sturm-Liouvillea radi se o sledeća dva pitanja:

1°. Da li postoji beskonačno mnoštvo sopstvenih funkcija operatora L .

2°. Potpunost tog sistema?

Neka se dakle radi o stacionarnom kretanju⁷) žice, tj. rešenje (*) treba tražiti u obliku

$$U(x, t) = \varphi(x) \psi(t)$$

pri čemu $\psi(t)$ nije identički jednaka nuli u $[a, b]$. Tada relacija (*) nam daje

$$\varphi''(x) \psi(t) = \varphi(x) \psi''(t)$$

ili

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \text{const.}$$

Na taj način dobijamo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0 \\ \psi''(t) + \lambda \psi(t) = 0 \end{cases}$$

čija su opšta rešenja data izrazima

$$\varphi(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$\psi(t) = A' \cos \sqrt{\lambda} t + B' \sin \sqrt{\lambda} t$$

gde su A, B, A', B' proizvoljne konstante.

Korišćenjem relacije (B_1) nalazimo $A=0$, tj.

$$\varphi(x) = B \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Uslov (B_2) nam daje

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad (\text{jer je } B \neq 0) \quad (5)$$

Kako je $\lambda \neq 0$, to za $\lambda < 0$ sinus prelazi u hiperbolički sh kojis e, međutim, ne anulira ni za jedno $\lambda \neq 0$. Dakle, $\lambda > 0$, s jedne strane i s druge relacija (5) je moguća za $\sqrt{\lambda} \pi = k \pi$, tj. $\sqrt{\lambda} = k$.

Za k možemo uzeti redom samo vrednosti $1, 2, 3, \dots$ i time dobijamo odgovarajuće vrednosti z_{λ_k} . Stoga odgovarajuća partikularna rešenja biće

$$\varphi_k(x) = B_k \sin kx.$$

Lako se zaključuje da se slučaj $\lambda = 0$ ne može održati.

Na taj način niz funkcija

$$U_k(x, t) = B_k \sin kx [A'_k \cos kt + B'_k \sin kt] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

predstavlja partikularna rešenja homogene jednačine (*) tako da njihova suma daje njeno opšte rešenje

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx (A'_k \cos kt + B'_k \sin kt).$$

Neupuštajući se u dalji fizikalni smisao poslednje relacije to po uslovu (I_1), tj. za $t = 0$ dobijamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (6)$$

gde je $b = A'_k B'_k$, i $\{\sin kx\}$ čini ortogonalan sistem.

Prema tome ako poslednji red uniformno konvergira, to neposredno dobijamo Fourierove koeficijente

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Dakle, matematički aspekt ovog zadatka se sastoji u ispitivanju prirode koeficijenata b_k pri pojedinim vrstama konvergencije reda (6) s jedne strane i s druge u kojim uopštenim metodama sumacije će odgovarajuća suma predstaviti funkciju $f(x)$.

U vezi s tim zna se da je problem iznalaženja potrebnih i dovoljnih uslova pri kojima Fourierov red predstavlja datu funkciju i dan danas ne rešen⁹⁾.

Posmatrajmo sad prethodni problem u nešto složenijem obliku, tj. uz uslov da je gustoća žice $\mu(x)$ data pozitivnom funkcijom položaja tačke x .

Sličnim rezoniranjem sa prethodnim slučajem dolazimo do diferencijalne jednačine

$$\omega''(x) + \lambda \mu(x) \omega(x) = 0, \quad (7)$$

koja će za niz sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ imati odgovarajući niz sopstvenih funkcija $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots$ i ujedno zadovoljiti uslove Sturm-Liouvillea u nešto opštijem mislu.

Naime polazimo od sledećih dveju jednakosti

$$\omega''_i(x) + \lambda_i \mu(x) \omega_i(x) = 0$$

$$\omega''_j(x) + \lambda_j \mu(x) \omega_j(x) = 0$$

zatim pomnožimo prvu sa ω_j dok drugu sa $-\omega_i$. Posle sabiranja vodeći još računa o znaku $\frac{d}{dx}$ dobićemo

$$[\omega_j(x) \omega'_i(x) - \omega_i(x) \omega'_j(x)]' + (\lambda_i - \lambda_j) \mu(x) \omega_i(x) \omega_j(x) = 0.$$

Na osnovu (B_1) i (B_2) neposredno dobijamo

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^\pi \mu(x) \omega_i(x) \omega_j(x) dx = 0$$

odnosno

$$\int_0^\pi \mu(x) \omega_i(x) \omega_j(x) dx = 0,$$

jer je $\lambda_i \neq \lambda_j$. Poslednja relacija kazuje da je zaista sistem $\{\omega_k(x)\}$ ortogonalan s obzirom na težinu $\mu(x)$. Međutim, mi možemo funkcije niza uzeti u obliku $\sqrt{\mu(x)} \omega_i(x)$ odnosno integral shvatati u smislu Stieltjesa i staviti

$$M(x) = \int_0^x \mu(t) dt,$$

odakle se ponovo dobija

$$\int_0^\pi \omega_i(x) \omega_j(x) dM(x) = 0.$$

Staveći

$\gamma_k(x) = \sqrt{\mu(x)} \omega_k(x)$, to ponovo možemo izračunati koeficijente c_k s obzirom na sistem $\{\gamma_k(x)\}$,

$$c_k = \int_0^\pi f(x) \gamma_k(x) dq,$$

pod pretpostavkom da ortogonalni red uniformno konvergira¹⁾.

Kao što se vidi iz prethodna dva primera, mnogobrojni su problemi fizike i čiste matematike koji nužno vode ispitivanju konvergencije ortogonalnih redova u najširem smislu. Valja na kraju istaći da se teorija ortogonalnih redova s uspehom primenjuje u teoriji verovatnoće^{1) 8)}.

НАПОМЕНЕ

1. Alexits, G.: Convergence problems of orthogonal series.
2. Collatz, L.: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik Berlin—Gottingen—Heidelberg, 1964.
3. Indritz, J.: Methods in Analysis, 1963.
4. Качмаж, С.—Штейнгауз, Г.: Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.
5. Люстерник, Л. Д.—Соболев, В. И.: Елѣменты функционального анализа, изд. второе, Москва 1965.
6. Riesz, F.—Nagy, B. Sz.: Lecons d analyse fonctionnelle, 5-e ed .1968.
7. Schwartz, L.: Methodes mathematiques pour les sciences physiques, Paris 1961.
8. Steinhaus, H.: Les probabilites denombrables et leur rapport a la theorie de la mesure, Fund. Math., 4, 1923, 286—310.
9. Zygmund, A.: Trigonometric series, II, 1959.
10. Шилов, Г. Е.: Математический анализ (спец. курс), Изд. второе, Москва 1961.
11. Забрейко, П. П. и коавторы: Интегральные уравнения, Москва 1968.

Резюме

Цель жтой работы с одной стороны состоит в применении ортогональных систем для решений конкретных флзических проблем, а с другой стороны автор указывает на трудности и на математические аспекты таких проблем.

It is a very old story, and one which has been told in many different ways. The story is of a man who was very rich and powerful, and who was very kind to his people. He was a very good man, and he was very wise. He was a very great man, and he was a very good man. He was a very great man, and he was a very good man.

THE HISTORY OF THE

It is a very old story, and one which has been told in many different ways. The story is of a man who was very rich and powerful, and who was very kind to his people. He was a very good man, and he was very wise. He was a very great man, and he was a very good man. He was a very great man, and he was a very good man.

It is a very old story, and one which has been told in many different ways. The story is of a man who was very rich and powerful, and who was very kind to his people. He was a very good man, and he was very wise. He was a very great man, and he was a very good man. He was a very great man, and he was a very good man.

NEDŽAT DACI

ISPITIVANJE HEMIJSKE KONSTITUCIJE KEROGENA ALEKSINAČKOG BITUMINOZNOG ŠKRILJCA

Usled ogromne potrošnje tečnih goriva i sve većeg smanjivanja njihovih rezervi, sve industrijski razvijene zemlje ispituju mogućnost za dobivanje tih goriva iz drugih sirovina. Jedna od tih sirovina jesu i bituminozni škriljci.

Prema B. Guthrieu¹⁾ bituminozni škriljci obuhvataju grupu listastastih i očvrslih smesa glinastih sedimenata i organskih supstanci koje imaju zajedničku osobinu da pri destruktivnoj destilaciji daju ulje, a malo su osjetljive prema rastvaračima.

S obzirom da bituminozni škriljci predstavljaju potencijalni izvor velike količine energije, u svetu se vrše mnoga, kako fundamentalna tako i tehnološka ispitivanja ove prirodne sirovine. Kako je Jugoslavija bogata ovom materijom to je i ispitivanje aleksinačkog bituminoznog škriljca čije je ležište jedne od najbogatijih od posebnog interesa.

Prerada bituminoznih škriljaca ima relativno dug istorijat. Eksploatacija škriljaca počela je još u prvoj polovini XIX veka kada su se u Škotskoj, Australiji i Nemačkoj iz njih dobijali petroleum, vosak i amon-sulfat. Međutim, otkriće bogatih nalazišta nafte kao i lakoća i ekonomičnosti njene prerade doveli su do toga da značaj bituminoznih škriljaca sve do najskorijeg vremena, ostane lokalni i relativno mali. Pa ipak, nagli porast potrošnje nafte i njenih derivata u novije vreme, a s druge strane organskenost rezervi nafte, stavljaju bituminzne škriljce u red onih prirodnih sirovina na čijem se ispitivanju najviše radi.

Značaj domaćeg aleksinačkog bituminoznog škriljca u svetlosti gore izloženog zasnovan je na sledećim činjenicama:

1) Domaći izvori nafte su nedovoljni imajući u vidu porast potrošnje goriva i razvitak petrohemijske industrije kao i čitave hemijske industrije.

2) Naslage bituminoznih škriljaca u aleksinačkim rudnicima nalaze se u slojevima koji su paralelno sa slojevima uglja koji se eksploatišu i

3) Neke zemlje uspešno eksploatišu čak i bituminozne škriljce lošijeg kvaliteta nego što je aleksinački škriljac.

Za problem eksploatacije bituminoznih škriljaca od posebnog je značaja poznavanje prirode i konstitucije organske supstance, koja je predmet ovoga rada.

Bituminzoni škrljci se sastoje od organskih i neorganskih supstanci najčešće u potpunoj homogenoj smesi. Odnos između neorganskog i organskog dela kod raznih škrljaca menja se u širokim granicama. Mineralni deo sastoji se uglavnom od jedinjenja silicijuma aluminijuma, kalcijuma, sumpora, natrijuma i kalijuma.

Odnos pojedinih elemenata različit je u škrljcima različitih lokaliteta. Iz niza analitičkih podataka koje su dali Himus²), Dunstan³), Me Kee⁴), Gavin⁵) i mnogi drugi vidi se da se sadržaj SiO_2 kreće u granicama od 30—76%, Al_2O_3 i Fe_2O_3 od 12—67%, CaO od 0,6—38% i MgO od 0,3—10%.

Prema Horneu i Purdyu⁶), SiO_2 i Al_2O_3 nalazi se u škrljcima u obliku kvarca i rastvornih silikata, Fe_2O_3 u obliku sulfida i oksida, Na_2O , K_2O kao aluminati kao i silikati a CaO i MgO kao karbonati i sulfati. Fosfor u obliku $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ nađen je u koloradskim škrljcima u količinu od 0,15 — 3%. Azot sumpor prisutni su kako u organskom tako i neorganskom delu škrljaca.

V. M. Mitrović i J. Ignjatović) izvršili su analizu pepela aleksinačkog ibituminaznog škrljca:

SiO_2 47,05%; Al_2O_3 14,20%; MgO 5,57%;

Fe_2O_3 9,51%; CaO 19,75%; SO_3 4,19%.

Organska supstanca bituminoznih škrljaca predstavlja glavnu komponentu prema kojoj se i procenjuje vrednost škrljaca kao industrijske sirovine. Uobičajeni thnički naziv za organsku supstancu škrljaca jeste *kerogen*. Ova reč izvedena je od Grčke reči keros, što znači vosak) a samo ime prvi je upotrebio Crum Brown sa značenjem „supstanca što daje vosak”. Termin *kerogen* neoznačava neko određeno hemijsko jedinjenje, ili grupu jedinjenja, već složenu organsku supstancu iz koje se pri zagrevanju dobija ulje. Korogeni različitih naslaga mogu biti hemijski različiti, a njihove osbine mogu se menjati i u raznim delovima istog sloja.

Za dobivanje pouzdane slike o sastavu korogena pokazalo se neophodnim da se organska supstanca na neki način, u nativnom obliku, odvoji od mineralnih sastojaka. U principu, delimično ili potpuno odvajanje organskog i neorganskog dela vrši se uglavnom na tri načina:

1. Hemijskim metodama, na primer tretiranjem sirovog škrljca pomoću mineralnih kiselina pri čemu se neorganske supstance većim delom rastvaraju a korogen ostaje slobodan.

2. Mehaničkim metodama, iskorišćavajući razlike u psecifičnim težinama organskog i neorganskog materijala.

3. Ekstrakcijom pomoću organskih rastvarača.

U sastav kerogena pored ugljenika, vodonika i kiseonika ulaze azot i sumpor, odnos ovih elemenata menja se prema vrsti škrljca. Međutim, na koji način su oni međusobno povezani odnosno kakva je hemijska konstitucija kerogena do danas nije sa sigurnošću utvrđeno.

Mi smo u našem radu kombinovali hemijske metode i metode ekstrakcije da bi smo dobili nativni korogen. Dobiveni kerogen smo hemijskim

metodama razlagali na: kisele, bazne i neutralne sastojke. U ovim razdvojenim komponentama smo pomoću reakcije u kapima po Feiglu dokazali prisustvo pojedinih klasa organskih jedinjenja ili jedinjenja pojedinih.

Mogućnost primene prvih reakcija u kapima bila je relativno ograničena pošto su ove reakcije izvođene na hartiji tako da se nije moglo raditi sa jakim bazama i kiselinama i na visokim temperaturama. U daljem razvitku ove analize otklonjena su pomenuta ograničenja pošto su reakcije izvođene na porcelanskoj ploči. U prvom planu su bile reakcije sa raznim organskim jedinjenjima koje daju talog, boju i drugo. Za reakcije u kapima potrebno je 0,001—10 mikrograma supstance, što omogućava da se otkriju tragovi supstanci u nekoj smesi ili da se analiziraju vrlo razblaženi rastvori.

Najveći broj reakcija na organske supstance zavisi od učešća nekih funkcionalnih grupa u hemijskim reakcijama, i najčešće se ovim reakcijama saznaju podaci samo o nekoj funkcionalnoj grupi ispitane supstance a ne o celom jedinjenju. Najčešći cilj analize u kapima je utvrđivanje prisustva određene klase jedinjenja u ispitivanoj supstanci, što se najčešće svodi na dokazivanje odgovarajuće funkcionalne grupe.

Organske reakcije u kapima mogu se podeliti u zavisnosti do cilja u tri grupe:

- 1) identifikacija elemenata; ponašanje prilikom sagorevanja; ispitivanje na kiseli ili bazni karakter.
- 2) identifikacija funkcionalnih grupa;
- 3) identifikacija pojedinih organskih jedinjenja.

EKSPERIMENTALNI DEO

Polazni materijal — podaci o škrljcu.

Upotrebljeni aleksinački bituminozni škrljac je sivkaste mrke boje. Osušeni škrljac smo tretirali hlorovodoničnom kiselinom (1 : 1) da bi smo odstranili rastvorne karbonate i sulfate. Dobiveni škrljac sadrži pored organske supstance još silikate i pirit i zove se „HCL-koncentrat“. U ovom koncentratu smo određivali procenat kerogena. Vreme tretiranja hlorovodoničnom kiselinom bilo je 24 sata. Ispiranje je vršeno sa 25 litara tople destilirane vode.

Rezultati određivanja sadržaja organske supstance prikazni su u tablici broj 1 i 2.

Tablica br. 1

Odmereno suvog škrljca	200 gr
Težina „HCL-koncentrata“	127,75 g
Procenat „HCL-koncentrat“	63,81
Rastvoreno u HCL u gramima	72,25
Procenat rastvoreno u HCL	36,13 g

Tablica br. 2

Odmereno „HCL-koncentrat“	1,8932 g
Pepeo „HCL koncentrat“	1,2238 g
Procenat pepela u odnosu na koncentrat	64,64
Nekorigovani kerogen	0,6694 g
Procenat nekorigovanog kerogena	35,35
Težina Fe_2O_3 u „HCL koncentratu“	0,3038 g
Procenat Fe_2O_3 u koncentratu	16,04
Izračunata težina Fe S_2	0,4564 g
Procenat Fe S_2 u „HCL koncentratu“	24,10
Težina nepiritnog pepela	0,9200 g
Procenat nepiritnog pepela	48,58
Težina korigovanog kerogena	0,5168
Procenat korigovanog korogena	24,34

EKSTRAKCIONA METODA I PRINOSI

Dobiveni „HCL-koncentrat“ smo posle sušenja do konstantne težine preneli u dve celulozne čaure (hilzne) koje smo stavili u Soxlet-ov aparat i vršili sukcesivno estrakciju pomoću: benzola, dietil-amina i dioksana. Ekstrakcija je vršena na temperaturi ključanja rastvarača, rezultati ekstrakcije su dati u tablicama 3,4 i 5.

Tablica 3

Br. oglada	Vreme „HCl koncentrat“ ekstrakcije	Ekstrahovano supstance	Procenat ekstrah. org. supstance u odnosu na korigov. kerogen	
1	20 h	62,591 g.	0,3762 g.	1,18
2	20 h	55,762 g.	0,3175 g.	1,01

Ovi se rezultati odnose na ekstrakciju sa benzolom.

Rezultati ekstrakcije benzolom dobiveni su pri ekstrakciji koja je trajala 20 sati a temperatura kupatila je bila 120°C.

Ekstrakcija dietil-aminom je vršena na temperaturi kupatila od 80°C, a ekstrakcija je trajala 50 sati.

Rezultati ekstrakcije dietil-aminom dati su u tablici br. 4

Tablica 4

Br. ogleda	Vreme ekstrakcije	„HCL koncentrat“	Ekstrahovane supstance	Procenat ekstrah. org. supstance u odnosu na korig. kerogen.
1	50 h	61,2148 g.	0,7700 g.	2,42
2	50 h	55,4445 g.	0,5950 g.	2,19

Eksatkcija dioksanom vršena je na temperaturi kupatila od 150°C i trajala je 28 sata. Rezultati ekstrakcije dati su u tablici br. 5.

Tablica 5

Br. ogleda	Vreme ekstrakcije	„HCl koncetrat“	Ekstrahovane supstance	Procenat ekstah. org. supstance u odnosu na korig. korogen.
1	28 h	61,4448 g.	0,2650 g.	0,83
2	28 h	55,0670 g.	0,1300 g.	0,41

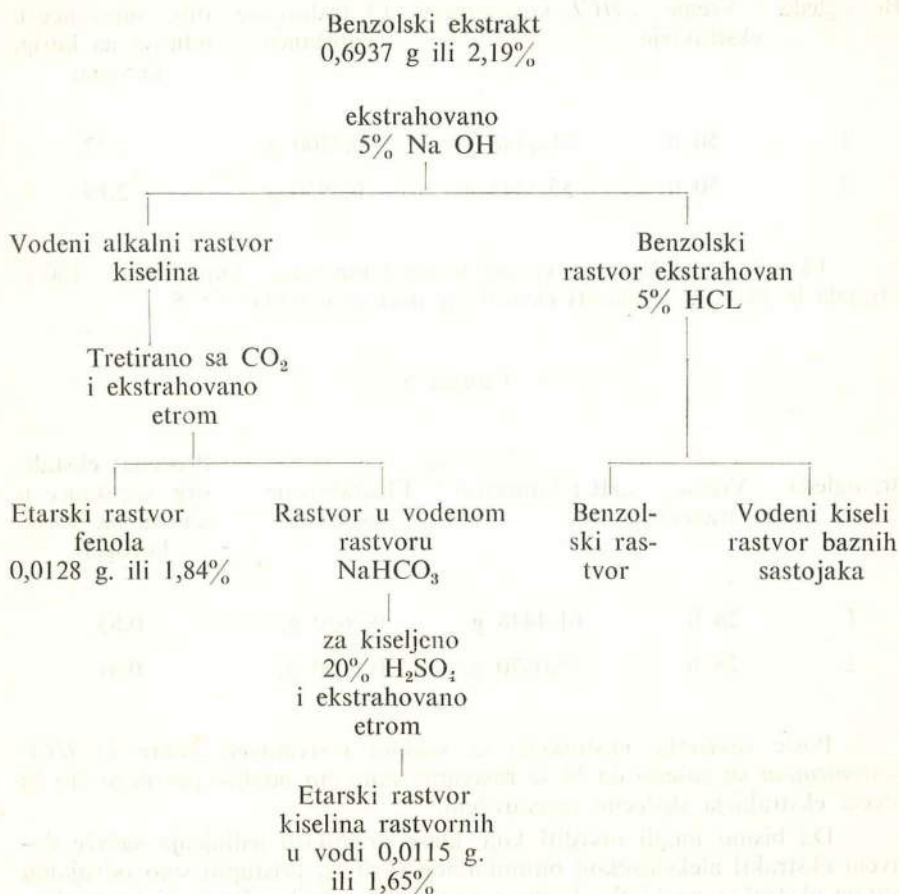
Posle završetka ekstrakcije sa svakim rastvaračem čaure sa *HCl-koncentratom* su sušeno da bi se rastvarač potpuno udaljio pre nego što bi počela ekstrakcija sledećim rastvaračem.

Da bismo mogli utvrditi koje klase organskih jedinjenja sadrže dobiveni ekstrakti aleksinačkog bituminonog škrljca, pristupili smo odvajanju svakog ekstrakta na kisele, bazne i neutralne sastojke. Postupci za razdvajanje smesa organskih supstanci mogu se grubo podeliti u tri grupe:

- 1) razdvajanje na osnovu različitih hemijskih osobina sastojka,
- 2) razdvajanje na osnovu isparljivosti komponenata ili njihovih soli;
- 3) razdvajanje na osnovu različitih fizičkih osobina.

Ovim metodama smese se mogu rastaviti na grupe organskih supstanci sa sličnim sobinama. Kada se vrši rastavljanje neke smese nerastvorljive u vodi, može se ta smesa prvo rastvoriti u nekom inertnom rastvaraču koji se ne meša sa vodom i koji ima nisku tačku ključanja npr. u etru ili benzolu. Ovakav rastvor se onda može ekstrahovati kiselim ili baznim reagensima. Važno je da se svaka ekstrakcija vrši do kraja, jer ako se jedna komponenta ne odvoji u potpunosti ona smeta u sledećoj fazi odvajanja.

RAZLAGANJE BENZOLSKOG EKSTRAKATA. — Benzolom je ukupno ekstrahovano 0,6937 g. ili 2,19% od ukupnog korigovanog kerogena unetog u obe čaure. Razlaganje ovog ekstrakta je vršeno po sledećoj šemi:



a) *EKSTRAKCIJA I ODVAJANJE KISELIH KOMPONENATA.* — Benzolski ekstrakt smo prebacili u levak za odvajanje i ekstrahovali 5%-nim rastvorom natrijum-hidroksida da bi odvojili kisele komponente.

Ekstrakciju smo vršili nekoliko puta u porcijama, dva puta sa po 100 ml i tri puta po 30 ml 5% rastvora natrijum-hidroksida. Sve alikalne vodene rastvore smo stavljali u jedan sud i celokupnu količinu na kraju ispirali sa 100ml benzola. Benzolski sloj smo vratili rastvoru benzola. Vodeni alkalni ekstrakt smo tretirali ugljen-dioksidom do pH=7,5 do 8, što odgovara rastvoru natrijum-bikarbonata. Rastvoru smo dodali čvrstog natrijum-bikarbonata u malom višku. Posle cedenja rastvor smo ekstrahovali dva puta sa po 50 ml etra koji se rastvorio a zatim tri puta sa po 20 ml etra da

bi smo odvojili rastvorne fenole. Posle odvajanja fenolskih jedinjenja bikarbonatni rastvor smo zaskiselili 20% H_2SO_4 . Kiseo rastvor smo ekstrahovali etrom u porcijama četiri puta po 20 ml i time odvojili rastvorne kiselinske komponente.

EKSPERIMENTALNI PODACI

1. Zapremina benzolskog ekstrakta (rastvora) iznosila je 500 ml.
2. Količina fenolskih jedinjenja iznosi 0,0128 g. ili 1,84% računato na celukupnu količinu organske supstance rastvorene u benzolu.
3. Količina kiselina rastvornih u etru iznosi 0,0115 g. ili 1,65%.
4. Kiselina nerastvornih u vodi nije bilo.

b) *ODVAJANJE BAZNIH KOMPONENATA*. — Benzolksi rastvor posle odvajanja kiselih komponenata ekstrahovali smo 5%-nom hlorovodoničnom kiselinom pet puta sa po 20 ml zatim smo ga ispirali destilovanom vodom (dva puta sa po 10 ml). Vodeni kiseli rastvor baznih komponenata smo ispirali benzolom (tri puta sa po 10 ml.) i benzolske slojeve vratili benzolskom rastvoru. Vodeni kiseli rastvor baznih komponenata smo zaalkalilisali dodatkom 20%-nog natrium-hidroksida.

Ovaj rastvor smo ekstrahovali etrom ali smo konstatovali da nije bilo amina rastvornih u etru. Amine rastvorne u vodi nismo mogli odvojiti, ali smo njihovo prisustvo u vodenom rastvoru kvalitativno dokazali reakcijama u kapi.

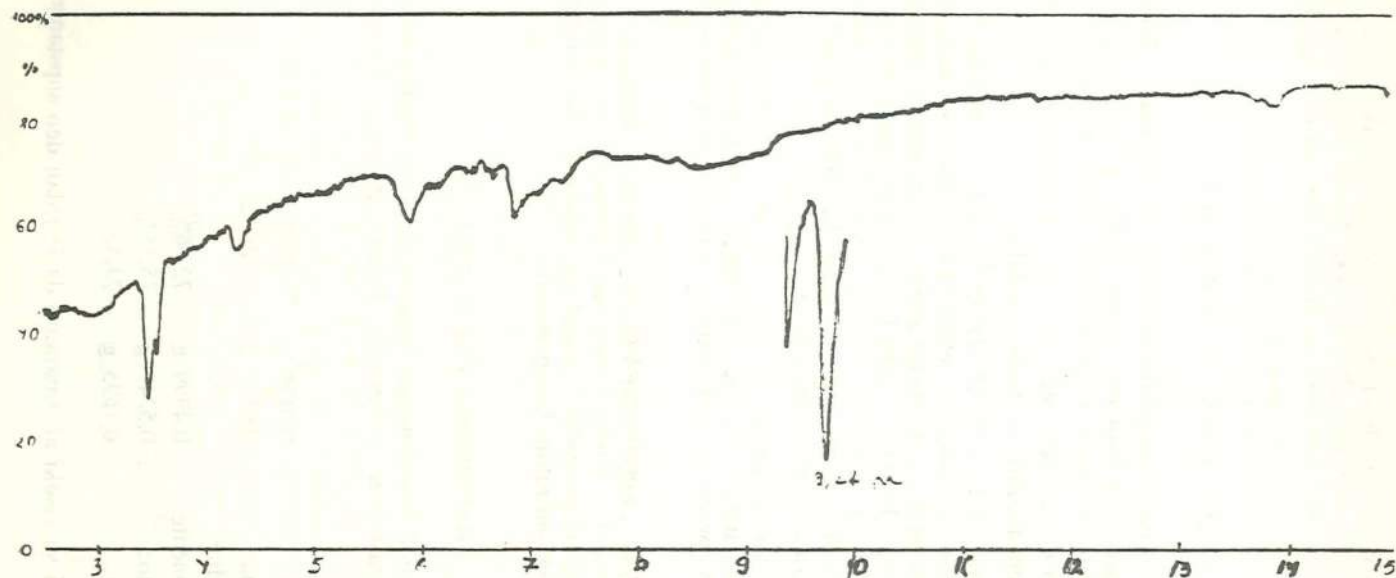
c) *NEUTRALNE KOMPONENTE*. — Zaostali benzolski rastvor posle ekstrakcije baznih i kiselih komponenata osušili smo pomoću anhidrovanog natrium-sulfata procedili i benzol predestilovali. Posle udaljavanja benzola ostao je talog neutralnih komponenata.

EKSPERIMENTALNI PODACI

Težina neutralnih komponenata iznosi 0,4999 g ili 72,07% od ukupne količine supstance rastvorne u benzolu. Prinosi pojedinih komponenata bili su sledeći.

Fenola:	0,0128 g	— 1,84%
Kiselina:	0,0115 g.	— 1,65%
Neutralne		
komponente:	0,4999 g	— 72,06%
Ukupno:	0,5242 g	— 75,55%
Gubici:	0,1695 g	— 24,45%

Obrazloženje: gubici su visoki ali smaramo da je jedan deo supstance ostao koloidno rastvoren.



IR-speklar benzolskog ekstrakta „HCL-koncentrata“ Aleksinačkog bituminoznog škriljca br. 3
KBr-tehnika 6.1 1966

N.D

DIETIL-AMINSKI EKSTRAKT

S obzirom da organska supstanca ekstrahovana dietil-aminom nije rastvorna u benzolu ili etru, rastvarač smo (dietil-amin) odstranili destilacijom a zatim smo odvajali kisele i bazne sastojke mućkanjem (na mehaničkoj mućkalici) s odgovarajućim rastvaračima. Razdvajanje komponenata smo vršili kao kod benzolskog ekstrakta. U ovom slučaju smo našli dve bazne komponente više a to su: etarski rastvor amina nerastvornih u vodi i bazne komponente koje su se taložile pri zaalkalisavanju s 20%-nim natrium-hidroksidom. Snimili smo i IR-spektar dietil-aminskog ekstrakta. Rastavljenje dietil-aminskog ekstrakta vršeno po sledećoj shemi:

EKSPERIMENTALNI PODACI

1. Ekstrakciju kiselih komponenata smo vršili 20%-nim natrium-hidroksidom u porcijama (pet puta sa po 10 ml). Vreme mućkanja na mehaničkoj mućkalici bilo je dva sata za svaku porciju.

2. Ekstrakciju baznih sastojaka smo vršili pomoću 5%-tne hlorovodonične kiseline u porcijama (pet puta sa o 10 m.) Vreme mućkanja dva sata za svaku porciju.

3. Ukupna količina ekstrakta bila je 1,4650 g ili 4,61% obračunato na korigovani kerogen.

Prinosi pojedinih komponenata bili su:

a) Kisele komponente:

Fenola:	0,0162 g.	1,10%
Etarski rastvor kiselina	0,0392 g	2,67%

b) Bazne komponente:

Amini rastvorni u etru:	0,0711 g	4,85%
Talog dobiven ddatkom 20% NaOH	0,1200 g	8,19%

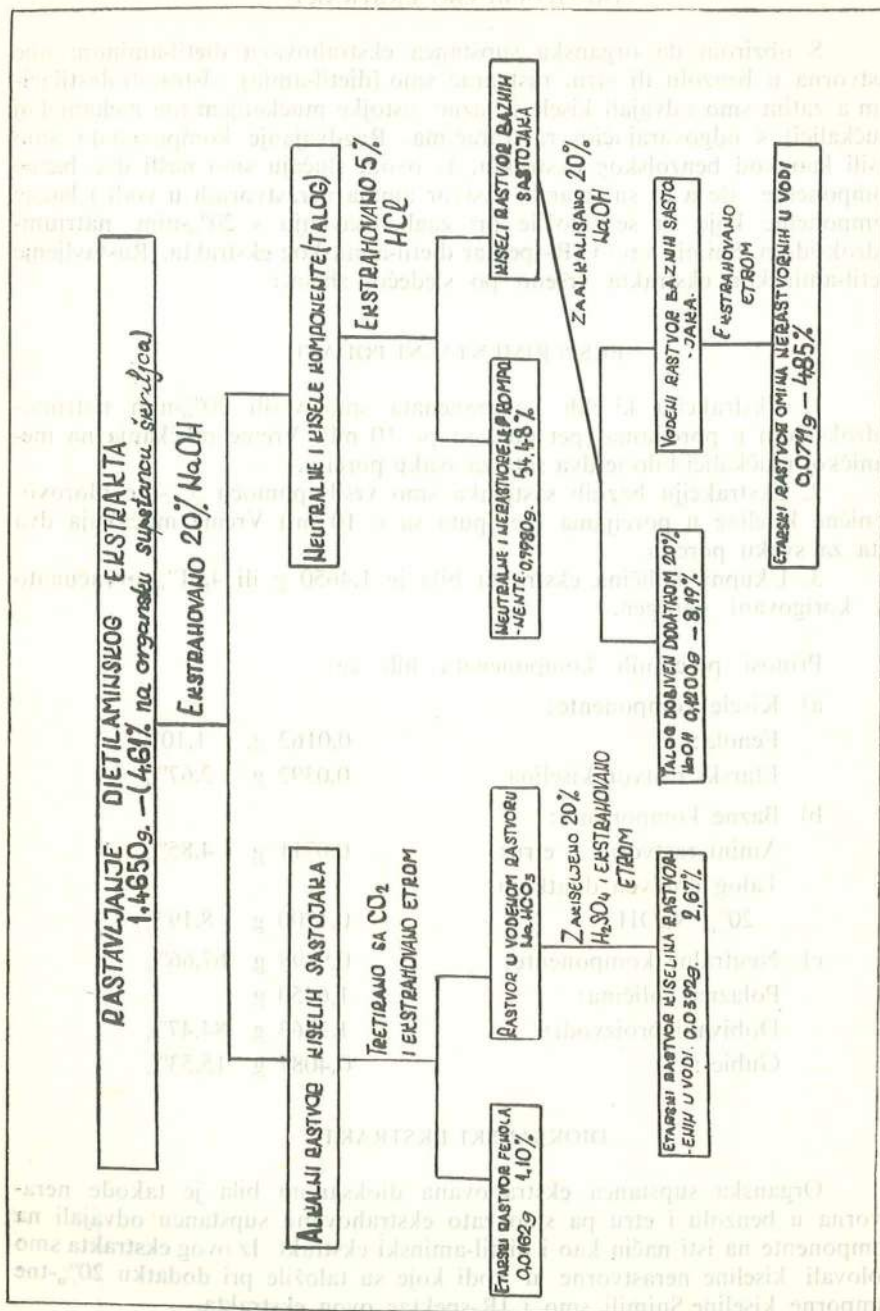
c) Neutralne komponente:

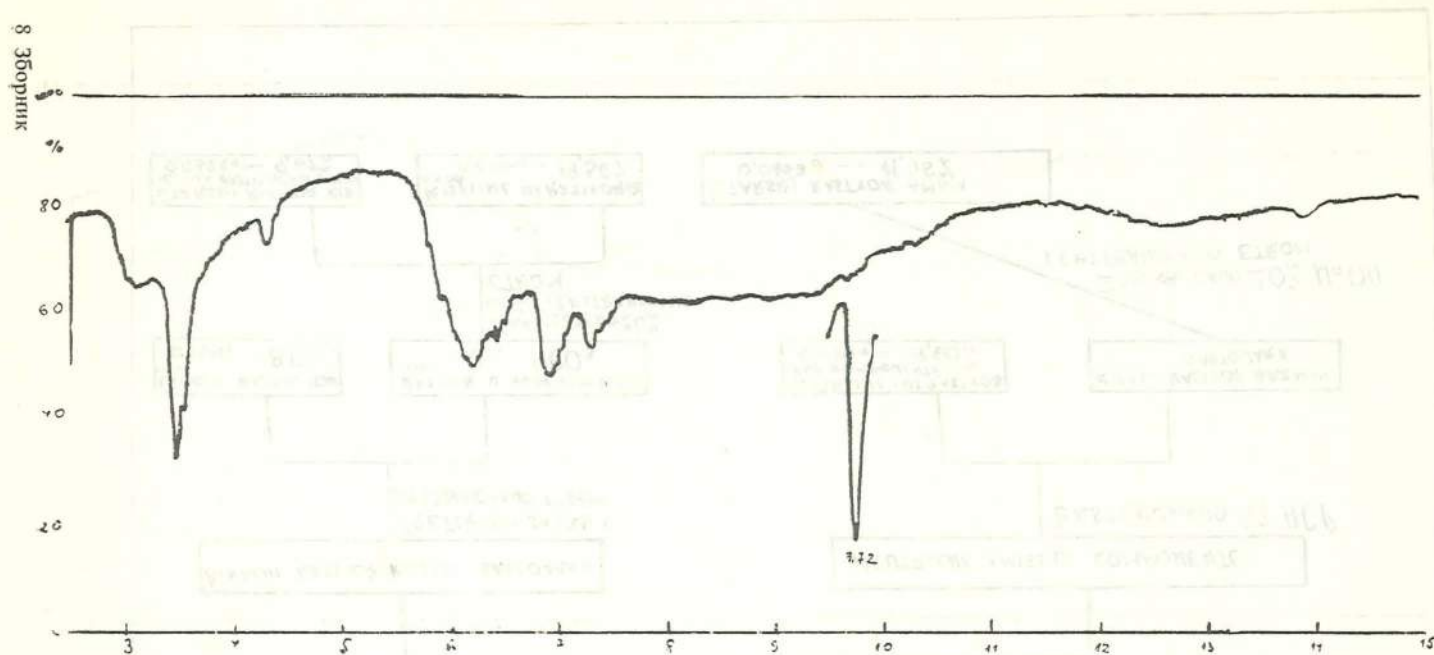
Polazna količina:	0,9898 g	67,66%
Dobivani proizvodi:	1,6450 g	
Gubici:	1,2363 g	84,47%
	0,4087 g	15,53%

DIOKSANSKI EKSTRAKT

Organska supstanca ekstrahovana dioksanom bila je takode nerastvorna u benzolu i etru pa smo zato ekstrahovanu supstancu odvajali na komponente na isti način kao i dietil-aminski ekstrakt. Iz ovog ekstrakta smo izolovali kiseline nerastvorne u vodi koje su taložile pri dodatku 20%-tne sumporne kiseline. Snimili smo i IR-spektar ovog ekstrakta.

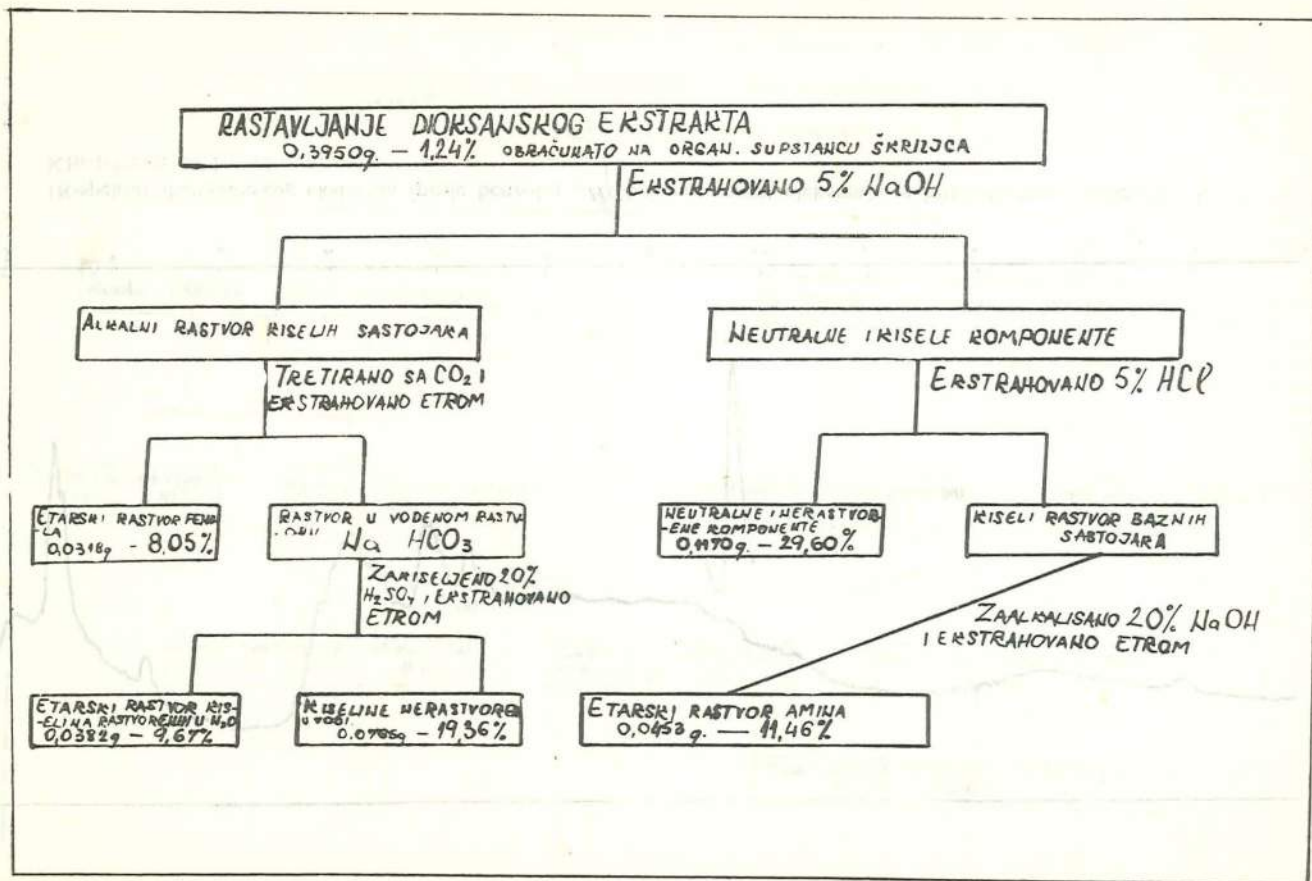
Razlaganje dioksanskog ekstrakta je vršeno po sledećoj shemi,

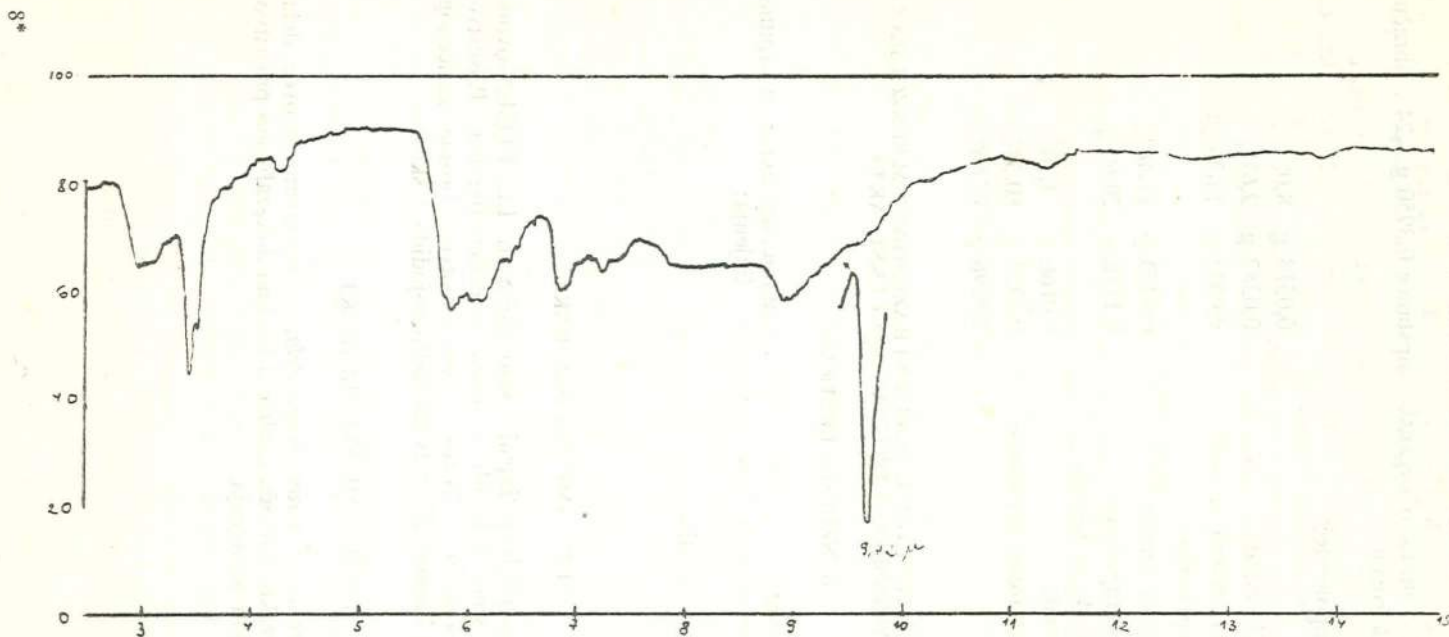




IR-spektar dietilanolnog ekstrakta (posle benzola) „HCL koncentrat“ aleksinačkog bituminoznog škriljca br. 3.
KBr-tehnika 24 I 1966 god.

N. D





IR-spektar dioksanskog ekstrakta (posle benzola i dietil amina) „HCL-koncentrata“ aleksinačkog bitaminoznog škrljca br. 3. KBr-tehnika 8 II 1966.

N.D

EKSPERIMENTALNI PODACI

1. Ukupno ekstrahovano organske supstance 0,3950 g 1,24% obračunato na korigovani kerogen:

2. Kisele komponente:

a) Fenoli:	0,0318 g	8,05%
b) Rastvorne kiseline	0,0382 g	9,67%
c) Kiseline nerastvorne u vodi	0,0675 g	19,36%

3. Bazne komponente:

Etarski rastvor amina	0,0453 g	11,46%
-----------------------	----------	--------

4. Neutralne komponente 0,1170 g 29,60%

5. Etarski ekstrakt iz baznih

komponentata	0,0166 g	4,20%
--------------	----------	-------

Ukupno razloženo supstance	0,3254 g	80,34%
----------------------------	----------	--------

Gubici	0,0696 g	17,66%
--------	----------	--------

ISPITIVANJE FRAGMENTA KOJI SU DOBIVENI RAZLAGANJEM BENZOLSKOG DIETIL-AMINSKOG I DIOKSANSKOG EKSTRAKTA

BENZOLSKI EKSTRAKT

Neutralne komponente. — U neutralnom delu pomoću analize u kapima dokazali smo prisustvo sledećih klasa organskih jedinjenja:

- a) Aromatična jedinjenja
- b) Aldehyde
- c) Enole

DIETIL-AMINSKI EKSTRAKT

Prisustvo aromatičkih jedinjenja smo dokazali LE ROSEN-ovom reakcijom. Aldehyde smo dokazali pomoću p-fenilen-diamina. Prisustvo enola smo dokazali pomoću zasićenog vodenog rastvora broma, zasićenog rastvora sulfosalicilne kiseline 5% rastvora kalijum-jodida i skroba.

DIETIL-AMINSKI EKSTRAKT

Ispitivanje neutralnog i nerastvornog dela. — Ispitivanjem ovog dela dietetil-aminskog ekstrakta pomoću analize u kapima dokazali smo prisustvo sledećih klasa organskih jedinjenja:

- a) aldehyde
- b) alkohole
- c) enole

Prisustvo aldehida i enola dokazali smo kao i kod benzolskog ekstrakta. Dokazali smo prisustvo sekundarnih alkohola pomoću 2%-tnog rastvora sumpora u ugljen-disulfidu i olovo acetatne hartije.

ISPITIVANJE BAZNIH SASTOJAKA. — U baznim sastojcima smo dokazali prisustvo sekundarnih alifatičnih amina nerastvornih u vodi a, rastvornih u etru a isto tako i prisustvo sekundarnih amina rastvornih u vodi. Prisustvo sekundarnih amina smo dokazali pomoću 5%-tnog rastvora kuprisulfata, amonijjaka i smese od jedne zapremine ugljen-disulfida i tri zapremine benzola.

DIOKSANSKI EKSTRAKT

Ispitivanje neutralnog i nerastvorenog dela. — Ispitivanjem ovog dela dioksanskog ekstrakta dokazali smo prisustvo sledećih jedinjenja:

- a) enola
- b) sekundarnih alkohola

Ispitivanje kiselina nerastvornih u vodi. — U ovom delu smo dokazali prisustvo:

- a) anhidrida dikarbonskih kiselina
- b) karbonskih kiselina
- c) dikarbonski kiselina

Prisustvo anhidrida dikarbonskih kiselina smo dokazali pomoću 0,5% alkoholnog rastvora ferihlorida zakiseljen sa koncentranom hlorovodoničnom kiselinom i zasićen na toploti sa hidroksil-amin hlorohidratom. Karbonske kiseline smo dokazali pomoću toinil-hlorida, zasićenog rastvora hidroksil-amin hloridrata. Dikarbonske kiseline smo dokazali pomoću rezorcina i koncentrovane H_2SO_4 .

U bazninim sastojcima dioksanskog ekstrakta smo dokazali prisustvo amina nerastvornih u vodi a rastvornih u etru.

DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Među metodama koje su se upotrebljavale za proučavanje konstitucije kerogena, hemijske metode zauzimale su de sada najznačajnije mesto.

Mi smo u našem radu za ispitivanje delova kerogena aleksinačkog bituminoznog škrljca primenili metodu razdvajanja organske supstance na kisele, bazne i neutralne komponente pa smo dobivene komponente ispitivali pomoću organskih reakcija u kapima po Feiglu.

Na osnovu rezultata ekstrakcije koju smo vršili suksesivno sa tri organska rastvarača: benzolom, dietil-aminom i dioksanom zaključili smo da dietil-amin ekstrahuje najviše organske supstance 4,61% i pored toga

što je primenejn posle benzola. Najmanje je ekstrahovao dioksan (1,24%), ali je on primenjen kao treći rastvarač.

Treba istaći da u fragmentima kerogena aleksinačkog bituminoznog škrljca najvećim su delom zastupljene neutralne komponente. U benzolskom ekstraktu 72,06% dietil-aminskom 54,47% i dioksanskom 29,60%. Kao što se iz rezultata vidi, benzol je ekstrahovao najvećim delom ugljovodonike (verovatno parafine) a dioksan kao poslednji rastvarač najmanju količinu ovog proizvoda. Prisustvo aramatičnih komponenti u neutralnom delu bez-zolskog ekstrakta potiče verovatno od samog rastvarača benzola.

U prilog objašnjenja ovih rezultata idu i IR-spektri snimljeni za svaki ekstrakt i svaku komponentu ekstrakta. Iz rezultata ispitivanja se vidi da bar deo kerogena aleksinačkog bituminoznog škrljca nije aromatičnog karaktera.

Za dietil-aminski ekstrakt specifično je prisustvo velike količine baznih komponenata u odnosu na ostale ekstrakte 13,04% ali amini ovde mogu poticati i od rastvarača. Benzolski ekstrakt sadrži vrlo malo ovih kmponenata tako da ih nismo uspeli odvajati, ali smo njihovo prisustvo dokazali kvali-tativno. Dioksanski ekstrakt je specifičan po sadržaju kiselih komponenata, sadrži 19,12% od ukupnog ekstrakta.

Na osnovu dobijenih rezultata mogu se izvesti sledeći zaključci:

1. Metoda za razlaganje organhkih proizvoda na neuralne, kisele i bazne komponente kao i naknadno ispitivanje dobivenih prozivoda pomoću reakcije u kapima mogu se sa uspehom primiti i pri ispitivanju organske supstance aleksinačkog bituminoznog škrljca.

2. Na osnovu ekspreimentalnih podataka može se o prirodi ispitivanih delova kerogena aleksinačkog bituminoznog škrljca pretpostaviti sledeće:

a) kerogen nije aromatičnog karaktera,

b) deo koji je razlaganjem ekstrakta dobiven kao neutralna kompo-nenta sastoji se od dugih alifatičnih nizova (nizovi n-parafina), aldehida i enola.

3) IR-spektri ne daju pouzdanu sliku o sastavu fragmenata aleksi-načkog kerogena.

4) Metoda organske analize u kapima pored preimućstva koje smo pomenuli u teorijskom delu našeg izlaganja ima nedostataka u primeni za ispitivanje kerogena. Neki reagensi reagiraju sa većim brojem funkcionalnih grupa i jedinjenja na isti način, a sem toga najčešće se kroz ove reakcije saznaje samo o nekoj funkcionalnoj grupi a ne o celom jedinjenju.

LITERATURA

1. B. Guthrie, U. S. Burean of Mines Bulletin 415, Vashington, 1938, str. 6.
2. G. W. Himus, *Petroleum*, 4, 9, 1941, i cit. po Chem. Abstr., 36, 5983, 1952, „Oil Shale and Canel Coal”, Proceodings of the Send Oil Shale and Canel Coal Conference, publ. by the inst. of Petz., London, 1951, str. 88.

3. A. E. Dunstan: „The Science of Petroleum, vol. 4, London, 1938, cit po C. H. Prien, Second Oil Shale and Cannel Coal conference, Glasgow, July 3—7, 1950, str. 11.
4. R. H. McKee, „Shale Oil”, ACS Monograph Series New York, 1925, str. 14.
5. M. J. Gavim, U. S. Bur, Mines Bulletin, 210, 1922, str. 201, cit po C. H. Prien, Second Oil Shale and Cannel Coal conference Glasgow, July 3—7, 1950, str. 11.
6. J. W. Horne i W. W. Purdy, U. S. Bureau of Mines, Bulletin 915, Washington, 1938, str. 105, C. H. Prien, Second Oil Shale and Cannel coal conference (A. 5), Glasgow, July 3—7, 1950, str. 11.
7. W. M. Mitrović i J. Ignjatović, Glasnik hemijskog društva, Beograd, 4, 213, 1933.
8. R. H. Mekec i R. T. Goodwin, „shale Oil”, ACS, Monograph Series, New York, 1925, 74, cit. po U. S. Bureau of Mines Bulletin 915, Washington, 1938, str. 105.
9. Spot Test in Organic analysis by Fritz Feigl, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, London, New York, 1956.

RESUME

Au fond des résultats expérimentaux ob Aenus on peut tires les conclusions Sui-vantes.

1. La méthode de séparation des produi organiques en: composants neutres, aigres et fondamentals aussi bleu que la recberebe complémentaire des des produits, obtenus par la réaction dans les gouttes peuvent être apliquei avec succès au cours de la recberebe de la substance organique de la pierre bitumineuse de Alexinatz.

2. Au fond des données expérimentales on peut représenterle suivant des parties de la pierre bituneuse de Alexinatz cherogene:

a. Le chérogene n'est pas de nature aromatique.

b. L'élè,emnt qui est obtenu par la séparation de son extrait comme le composant neutre se compose des quesne longues alifatiques (les quenes du n-parafine), de l'aldehyde et de l'énol.

3. Les ir-spectres ne donnent pas une image certaine de la composition des fragments chérogenes de Alexinatz.

4. La méthode de l'analyse organique dans les gouttes vis-à-vis de la priorité que vous avons mentionée dans la partie lléarique de notre exposition, il y a des defsaits dans l application du chérogene. Quelques matieres reagineut avec un plus grands nombres de gronfes fnctionnauts et des unités de meme manière, et a coté de cela, dans ces réaction on necomprend que d'un gronfe fonctionaul, et non pas de .’ unite totale.

ŠAIB RIZVANOLI

UVOD U IZUČAVANJU SPECIFIČNOG DINAMIČKOG DEJSTVA HRANE KOD BARSKE KORNJAČE

EMZS ORBICULARIS L.

Istraživanja Lavaoaziea (Lavasier), Bedera i Šmidta (Biddera i Smidta) i Rubnera ustanovila su zavisnost između kaloričnosti primljene hrane i nivoa razmene gasova celog organizma. Povećanje metabolizma pri hranjenju naročito belančevinama označeno je kao specifično dinamično dejstvo hrane.

Mehanizam regulacije metabolizma ugljenhidrata u organizmu posvećen je veliki broj radova (Genesa, 1948, 1953; Lejbson 1954) ali reakcija organizma na prijem hrane nije razjašnjena u dovoljnoj meri. Do nedavno vladalo je ubeđenje da povećanje šećera u krvi posle uzimanja ugljenhidrata je rezultat absorpcije glukoze iz želuca u krvi. Radovi Jacobsena (1913), Eisnera i Fotsztera raspravljaju o refleksnom povećanju šećera u krvi koji dolazi iz želuca ili creva. Pomenuti autori su zanemarili procese koji se odigravaju u usnoj duplji za vreme primanja hrane, kao i uslovno refleksivne gasne razmene u vezi sa primanjem hrane (Sevčenko, 1949). Kanfor (1953, 1955, 1959) pokazao složene refleksivne reakcije (prirodnih i uslovnih refleksa) koji utiču na procese primanja hrane i regulaciji nekih aspekata metabolizma ugljenhidrata.

Dejstvo hrane a specijalno uticaj ugljenhidrata na razmenu gasova obrađen je na neraznovrsnom eksperimentalnom materijalu odnosno samo na pojedinim predstvanicima jedne sistematske kategorija — prvenstveno kod sisara. Komparativni prilaz izučavanju specifičnog dinamičnog dejstva hrane na potrošnju kiseonika odnosno oslobodanje ugljandioksida, sa aspekta evolucione fiziologije, svakako bi uneo više svetla u razjašnjenje tih procesa

ŽIVOTINJE I METODA RADA

Naša istraživanja smo vršili u pet primeraka barske kornjače *Emys orbicularis*, koje po morfološkim karakteristikama predstavljaju izrazitu arhaičnu formu. Njen način ishrane kao i visok stepen razvitka čula, poput sisara, nasuprot svojih srodnika smatramo da predstavlja pogodan eksperimentalni objekat za izučavanje dejstva hrane na razmenu gasova.

Barske kornjače su ulovljene po barama ili slabo tekušćim vodama u okolini Prištine. Životinje za eksperimenat bile su smeštene u termostate određene temperature sa dovoljnom količinom vode, ali bez hrane. Dugotrajna potpuna glad prouzrokovala je neznatno gubljenje težine.

Da bi se izbegle posledice termičke apaptacije na konačan ishod razmene gasova, životinje su sedam dana smeštene na temperaturu ogleda od 30°. Odmah posle uzimanja prve gasne probe, nakon 30-tog minutnog boravka u komoru, životinjama je dopušteno aktivno uzimanje 20% rastvora glukoze u trajanju od 20 minuta. Količina uzete hrane izmerena razlikom u težini pre i posle uzimanja određenog rastvora, iznosila je sa malim individualnim razlikama oko 5 g na 100 g telesne težine životinja. Pet minuta nakon aktivnog uzimanja hrane kornjača je vraćena ponovo u komoru. Posle hranjenje uzete su svega sedam gasnih proba u razmaku od 45 minuta. Eksperimenat je trajao 5 časova. Hranjenje saharozom je sledilo sutradan i do tog trenutka životinje nisu dobile ni vodu za piće.

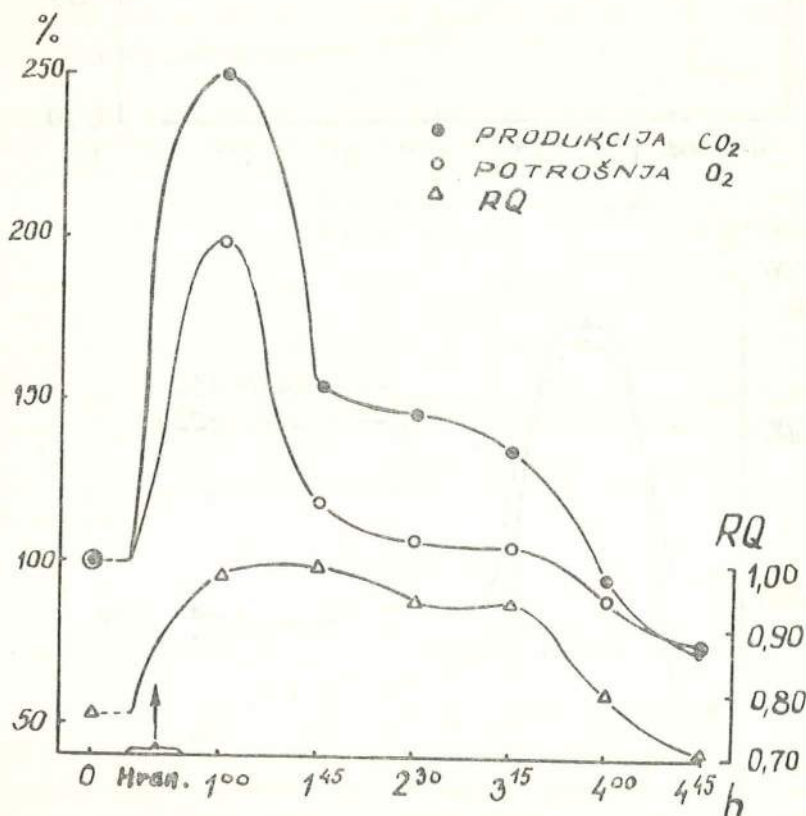
Potrošnja kiseonika i produkcija ugljendioksida određivano je metodom pneumatičnih komora određenih zapremine. Gasne porbe su analizirane Holdenovim aparatom. Dobivene vrednosti su korigovane na 0° i 760 mm Hg i izražene u ccm kg/h ili Cal/kg/h.

EKSPERIMENTALNI REZULTATI

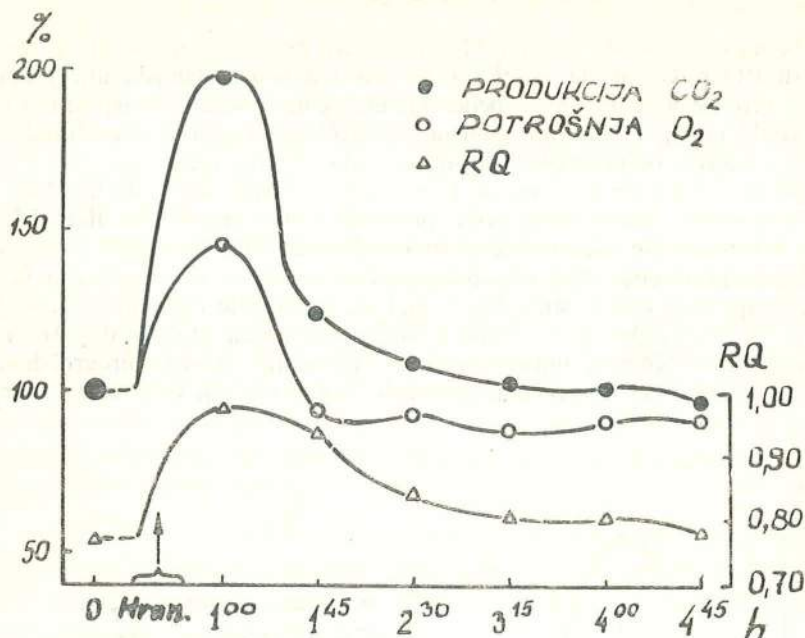
Eksperimentalni rezultati analize gasova uzetih iz pneumatičnih komora pokazali su da se vrednosti ugljendioksida i kiseonika se povećavaju. Odnos utrošenog O₂ i oslobođenog CO₂ odražava se na izmenu respiratornog koeficijenta u smislu njegovog povećanja. Najveće vrednosti smo nalazili pri analizi prve gasne probe uzete nakon hranjenja. Rezultat te analize, izražen u procentima, u odnosu na rezultat dobiven pre primanja glukoze za oslobođeni CO₂ iznosio je 150,7% više a za potrošeni O₂ samo za 92,8% više. (Sl. 1) odnosno za 98% i 45,1% posle hranjenja saharozom (sl. 2). Međutim respiratorni koeficijent pretrpeo je znatan porast približavajući se jedinici. Taj očevidan skok se odigravao od trenutka uzimanja hrane ali određivan je 40 minuta posle akta jedenja tj. aktivnog uzimanja rastvora. Posle Svega 45 minuta (drugo merenje posle hranjenja) kriva oslobođenog CO₂ odnosno absorpcije O₂ naglo opada ali još uvek je iznad početnog nivoa sa tendencijom slabog opadanja. Kriva respiratornog koeficijenta, međutim, ne pokazuje isti smer kao i analizirani gasovi i njen visok nivo odraz je još uvek relativno povišenog oslobođenog CO₂. Vrednosti sa petom gasnom analizom označavaju kraj dejstva glukoze na razmenu gasova, koja je sledila nakon 4 časa a to nije slučaj sa dejstvom saharoze. Od značaja je podvući da nivo kalorifikovanja pred primanja glukoze iznosio je 34% manje u poređenju sa dobivenih posle 24 časova pred hranjenju glukozom (sl. 3).

DISKUSIJA

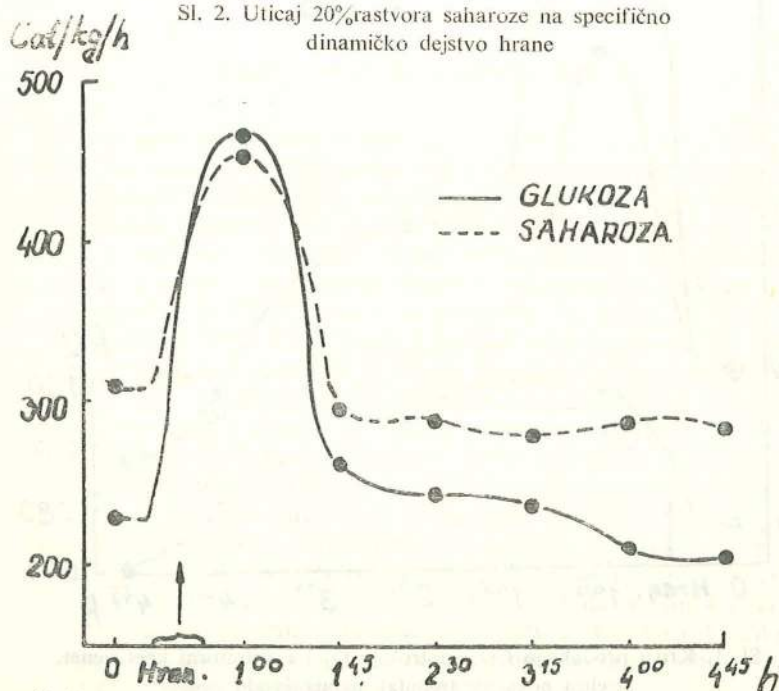
Sama činjenica da unošenje hrane izaziva povećanje metabolizma kao i izmenu RQ pokazuje da u toj fazi je prisutan neuro-hemijski uticaj koji deluje u procese varenja i apsorpcije. Međutim, ne možemo da ispustimo iz vida i veliki uticaj refleksivnih izmena metabolizma u vezi sa stimuliranjem razmene materija odigravanim aktom jedenja. Prema tome, akt primanja hrane ne utiče samo na kvalitativne izmene metabolizma nego i da karakter i intenzitet izmena metabolizma posle primanja hrane (specifično dinamičko dejstvo hrane) zavise od prirode dobivene hrane (Oljanska 1964) tako da ukus hrane, konkretno slatkost uzetog rastvora glukoze ili saharoze u fazi razdraživanja usne duplje služi kao signal za prestizanje ugljenhidrata. Čak i fiktivno hranjenje eksperimentalnih životinja rastvorima glukoze dugotrajno je izmenilo metabolizam ugljenhidrata — povećanje šećera, pirogroždane i mlečne kiseline u krvi i povećanje potrošnje O_2 i produkcije CO_2 (K a p f o r,



Sl. 1. Krivu produkcju CO_2 , potrošnju O_2 i respiratorni koeficijent. Strelica pokazuje trenutak uzimanja glukoze.



Sl. 2. Uticaj 20%rastvora saharoze na specifično dinamičko dejstvo hrane



Sl. 3. Metabolizam barske kornjače *Emys orbicularis* na 30° spoljašnje temperature pre i posle primanja glukoze odnosno saharoze.

1954, Seuzing, 1959), kao i respiratovnog koeficijenta (Martinea u i sr. 1964 Basseres i sr, 1961). To je potvrđeno brojnim eksperimentalnim podacima sa glukozom, kojoj je dodavano hinin, sredstvo za zamaskiranje slatkog ukusa. Uzimanje takve glikoze izaziva vrlo neznatna porast šećera u krvi i povećanje gasne razmene organizma. U refleksivnoj fazi bitan momenat za razmenu gasova predstavlja i vreme delovanja određene hrane u usnoj duplji. (Naumova i Rogal, 1950, 1955).

Brojni eksperimentalni podaci uveravaju nas u postojanje još jedne faze neuro-hemijske, koja nastupa sa procesima varenja i koja zauzima značajno mesto u reakcijama specifičnog dinamičkog dejstva hrana. Nakon 10 minuta posle unošenja glukoze per os zapaža se njeno povećanje u krvi i dostiže maksimum posle 40—60 min. (Dean, 1960). U tkivima apsorpcija O_2 se povećava uz prisustvo glukoze (Symons, 1959), dok kod pacova je ustanovljeno da se 40% izdisanog CO_2 , obrazuje na račun neposredne oksidacije glukoze (Holt, 1961) i to proporcionalno sa količinom unete glukoze (Gigoni sr., 1964) I izmena respiratornog koeficijenta potvrđuje konstataciju da je glukoza neposredno uključena u metabolizam, i da se unošenjem hrane odigravaju i kvantitativne izmene pored onih kvalitativnih.

Naglo povećanje nivoa gasne razmene smatramo da je jedan od vodova kompenzacije inače smanjenog intenziteta metaboličkih procesa usled gladi i žeđi. Normalno je pretpostaviti da su naše životinje zbog nedostatka hrane i periodično vode imale niži nivo metaboličkih procesa. Iz literaturnih podataka može se videti da postoji direktna zavisnost između gladi i količine šećera u krvi (Christof 1960), metabolizma (Holt, 1961) i respiratornog koeficijenta (Cahn, 1961). Isto tako i pojava žeđi (Bahtiozina 1960) prouzrokuje smanjenje plućne ventilacije praćene smanjenjem potrošnje O_2 , opadanjem produkcije CO_2 pa i smanjenjem RQ (0,5). Naši eksperimentalni rezultati su pokazali da razlike početne vrednosti pre hranjenja zapravo je su rezultat i odraz različitog stanja gladi. Slika br. 3 ukazuje i na još jednu značajnu činjenicu koja se tiče nesignifikantnosti maksimalnog kalorifikovanja u prvih 40 minuta nakon unošenja hrane, što nije slučaj sa ostalim tačkama koje slede. Ta činjenica nameće zaključak o nepromenjenom plafonskom nivou specifičnog dinamičkog dejstva određene hrane bez obzira na početni nivo kalorifikovanja.

ZAKLJUČAK

1. Aktivno uzimanje 20% rastvora glukoze ili saharoze u barskoj kornjači *Emys orbicularis* izaziva povećanje produkcije CO_2 , potrošnju O_2 kao i porast RQ.

2. Maksimalno povećanje razmene gasova zapaženo je 40 minuta posle primanja hrane. Naredne gasne analize su pokazale pad gasne razmene ali ne i smanjenje respiratornog koeficijenta. Kvantitativne i kvalitativne izmene u metaboličnim procesima nakon primanja glukoze trajale su oko 4 časa, a za saharozu taj period je dužiji. Te izmene jasno se očituju na linijama RQ.

3. Hranjenje povećava metabolizam ogladne životinje. Bez obzira na različit nivo kalorifikovanja maksimum specifičnog dinamičkog dejstva hrane pokazuje se približno podjednakim.

LITERATURA

1. Bassérs J., Hédon L., Macabiès J. 1961 (1962). Effects compris, sur le quotient respiratoire de chiens normaux et dépancés, de l'ingestion de glucose, de fructose et d'un mélange de ces deux sucres. „cmt. rend. Soc. biol.“, 155, No 12, 2421—2423.
2. Биков К. М. и Слоним А. Д. Исследования сложнорефлекторной деятельности животных деятельности животных и человека. АН СССР.
3. Cahn Theophile et Houget Jacques. 1960. Sur l'action dynamique spécifique. C. r. Acad. sci., 251, No 3, 452—454.
4. Holt C. von, Schmidt, H., Teldmaun H. 1961. Der Anteil der Glucoseoxydation an der Kohler dioxydproduktion der Ratte. Biochem. Z., 334, No 6, 545—559.
5. Christophe Jean et Mayer Jean. 1960. Glucose uptake as a function of food intake in normal and hypothalamic hyperphagic rats. „Metabolism“, 9, No 10, 932—937.
6. Jacobsen Th. M. 1913. Untersuchungen über den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Blutzucker bei normalen, Zuckerkranken und graviden Personen. Bioch. Ztschr., Bd. 56, S. 471.
7. Канфор И. С. 1953. Сложнорефлекторные влияния акта еды на углеводный обмен. Совещ. по проблеме кортикальн. регулирующей желез внутр. секреции, тез. докл., Л. ст. 38.
8. Канфор И. С. 1955.: Сложнорефлекторная регуляция углеводного обмена. Бюл. exper. биол. и медиц., т. XXXIX, No 6, 7.
9. Канфор И. С. и Р. П. Олянская. 1954. Влияние раздражения рецепторов полости рта на обмен веществ. В сб.: Опыт изуч. регулаций физиол. функций в естеств. условиях существования организмов. т. III, Изд. АН СССР, М.-Л.
10. Martineaud M., J. Trémolières. J. 1964. Effet d'une surcharge glucidique sur les échanges respiratoires chez l'obèse. Natur. et dieta 6, No 3, 203.
11. Mitchell H. H. 1955. The specific dynamic action of food. Scientia. No 6, 193.
12. Наумова О. А. 1954.: Влияние изменения стереотипа акта на газообмен и желудочную секрецию. Тез. докл. 1-й научн. сессии Калининск. гос. мед. инст. ст. 5.
13. Олянская Р. П. 1964.: Очерки регуляции обмена веществ. Изд. „аука“. АН СССР.
14. Peters G., J. Govaerds, Sierens G. 1957. Metabolisme de glucose dans le pis de vache silé et perfuse. 110, No 2—3, 367.
15. Seusing J. 1959. Zur Frage der negativen spezifischen-dynamischen Wirkung kleiner Dextrose-mengen. Dtsch. Arch. klin. Med. 206, No 1, 78.

Šaib Rizvanoli

THE STUDY OF SPECIFIC DYNAMIC ACTION OF FOOD IN EMYS ORBICULARIS

Summary

The results of numerous investigations indicate that the process of food taking produces the increase of gas exchange. The nature and rate of metabolic exchange after taking of nutrient substances (specific dynamic action of food) depends on the nature of taken food.

Specific dynamic action of food (glucose and saccharose) on the gas exchange was studied in *Emys Orbicularis*. The animals stayed before and during the experiments at the temperature of 30°C. At that temperature and during a two months starvation and a 24

hours of thirst the animals were allowed food ad libidum (20% solution of glucose and saccharose respectively). Before as well as immediately after taking of food in the intervals of 45 minutes, gas samples were taken from pneumatic chambers. The production CO_2 and consumption O_2 was determined according to Holden.

The obtained results concerning gass exchange indicate that taking of glucose and saccharose produces the increase of carbondionide by 150,7% and 92,8% respectively, as well as the increase of oxygen consumption by 98,0% and 45,1% respectively. In both cases, respiratory quotient is changed after taking of carbonhydrates approaching to one. The maximal increase of gass exchange was observed during the first 45 minutes after taking of glucose, and after 4 hours the rate of gass exchange reaches again the initial level.

of the American Medical Association, Chicago, Ill., U.S.A.
The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

Subscription prices: Single copies, 15 cents; Six months, \$8.00; One year, \$15.00. In advance. Payment in advance is required. The Journal is sent by mail to subscribers at their own risk. It is not responsible for loss or damage to subscribers' property.

Entered as Second-Class Matter, May 2, 1912, under Post Office No. 383, at Chicago, Ill., under Act of October 3, 1917. Postage paid at Chicago, Ill., and at additional mailing offices. Postmaster: Send address changes in Chicago, Ill., to The Journal of the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

Acceptance for mailing at special rate of postage provided for in Act of October 3, 1917, authorized on July 1, 1918. Postage paid at Chicago, Ill., and at additional mailing offices. Postmaster: Send address changes in Chicago, Ill., to The Journal of the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

Copyright, 1918, by The American Medical Association. All rights reserved. Reproduction of this journal in whole or in part without permission is prohibited. Printed and published by The American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

Published by The American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A. The Journal of the American Medical Association is published weekly, except on Sundays and public holidays, at the office of the Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill., U.S.A.

ČAZIM LEŠI

KLASIFIKACIJA I TIPOLOGIJA NASELJA SAP KOSOVA

KVANTITATIVNA OBELEŽJA

Socijalistička Autonomna Pokrajina Kosovo se odlikuje veoma velikim brojem naselja, kao posledica njihove izrazito male veličine a u uslovima velike gustine stanovništva. Prema proceni gustina u 1970 godini iznosi 114 stanovnika na jedan kvadratni kilometar površine i najveća je u SFR Jugoslaviji.

Poređenja radi, prikazaćemo gustinu stanovništva po jedinici površine (st./1 km²) društveno-političkih celina SFRJ u 1970. g.:

SFRJ	80
SR B i H	77
SR CG	39
SRH	78
SRM	63
SP Slov.	84
SRS	94
Uža Srb.	91
SAPV	89
SAPK	114

Na površini od preko deset hiljada kvadratnih kilometara Kosova postoji 1.452 naseljena lokaliteta, odnosno prosečno preko 13 naselja na 100 km² površine (13,4/100 km²). To je znatno iznad jugoslovenskog proseka (10,9 naselja na 100 km²), odnosno proseka SRS (6,9 naselja na 100 km²). Po gustini naselja u odnosu na jedinicu površine, od većih društveno-političkih celina SFRJ, ispred Kosova je jedino SR Slovenija, koja znatno odskaje i ispred svih ostalih republika, jer ima 29 naselja na 100 km².

Brojčani odnos naselja prema površini od 100 km² u zemlji i po republikama je sledeći:

SFRJ	10,9
SRB i H	11,9
SRCG	9,1
SRH	11,9
SKM	6,8
SRSlov.	29,7
SRS	6,9
Uža Srbija	7,5
SAPV	2,1
SAPK	13,4

Iz priloženog tabelarnog pregleda se vidi da je gustina naselja po jedinici površine na Kosovu veoma velika. Uočava se da je ona 6,5 puta veća nego u Vojvodini, odnosno 2 puta veća od proseka SR Srbije. Kada se zna da je u pogledu reljefa Kosovo nepovoljnija sredina od pojedinih republika, posebno SAP Vojvodine, onda se dâ zaključiti da je SAP Kosovo u ovom pogledu u nezavidnom položaju.

Drugi, važniji parametar jeste prosečan broj stanovnika po jednom naseljenom lokalitetu u Pokrajini. Prema predviđanju broja stanovnika sredinom 1970. g. izlazi da na jedan naseljeni lokalitet na Kosovu otpada prosečno 859 stanovnika, što se približava opštejugoslovenskom proseku od 737, a znatno je niže od proseka SR Srbije, odnosno pet puta niži od vojvodanskog proseka, koji iznosi 4.279. Prosek stanovnika po 1 naselju u ostalim republikama iznosi (prema proceni sredinom 1970):

SFRJ	737
SRBiH	650
SRCG	427
SRH	652
SRM	927
SR Slov.	284
SRS	2.168
Uža Srbija	1.368
SAPV	4.279
SAPK	859

Iako Kosovo kao što se dâ zaključiti iz priloženih podataka, nije oblast sa najsijsnijim naseljima (ispred nje nalaze se 3 republike) različiti su faktori koji su uslovlili usitnjenost naselja u ovoj Pokrajini. Naime, Kosovo je poznato po svom niskom stepenu urbanizacije i još nedovoljnoj industrijalizaciji kao i njegovom opšteprivrednom i društvenom zaostajanju iza ostalih krajeva zemlje. Posleratni preobražaj ove oblasti, iako intenzivan posebno od 1957. g., nije uspeo za relativno kratak vremenski period da u znatnijoj meri utiče na

pregrupisavanje stanovništva u veće naseobinske aglomeracije, odnosno ostale industrijske centre i uopšte u neagrarna naselja.

Drugi, isto tako važan elemenat koji je uslovio veoma veliku disperznost je čisto ekološke prirode. Prvenstveno to su morfološki oblici tla, odnosno preovlađivanje planinskog zemljišta. Oko 60% teritorije SAP Kosova nalazi se pod brežuljkastim, niskoplaninskim i uopšte planinskim zemljištem. Preko ekstenzivne poljoprivrede koju uslovljava ovakvo tle, u nasleđenim zaostalim društveno-ekonomskim prilikama razvio se više sesilni način privređivanja, tj. uža povezanost stanovanja uz eksploatacionu površinu sopstvenog poseda seljaka (domaćinstva nastanjena u neposrednoj blizini njive koju obrađuju, odnosno voćnjaka, pašnjaka ili šumarka). Uz neposredni posed se češće vezuje kombinovani način privređivanja (ratarsko-stočarski) sa težnjom samozadovoljenja životnih potreba seljaka, a srazmerno manjom proizvodnjom namenjenju tržištu. Ova vrsta ekonomije je uglavnom karakteristična za periferne brdsko-planinske predele koji skoro podjednako okružuju metohijsku i kosovsku ravnici. Ovo su ujedno krajevi sa najjače izraženom disperzijom naseljenosti, uslovljenom i većom izolacijom u saobraćajno-prometnom pogledu, tj. težom pristupačnošću. Ovuda se nalaze veoma udaljeni delovi naselja istureni kao ogranci matičnog sela u vidu zaseoka, kao pojedine mahale, često sastavljene od par kuća bližih rođaka, koje su često udaljene i po 3—4 kilometara od matičnog sela. Tamo gde je reljef više raščlanjen, nailazi se na veoma male grupice kuća (na glavicama) mahalskog tipa, koje su locirane prema rodbinskoj pripadnosti (naselja mahalskog tipa, koja se uostalom sreću i u nižim predelima). Međutim, po vremenu nastanka ovi viši delovi se kasnije formiraju deobom većih porodičnih zadruga, tj. bratstava kada se ona umnožavaju. Ima slučajeva, mada redih, da se ovakvi delovi naselja osnivaju i u ravničarskim krajevima.

Regionalne razlike unutar Pokrajine mogu se pratiti prema niže priloženoj tabeli u kojoj je izložen broj naselja po jedinici površine, broj stanovnika po jednom naseljenom lokalitetu, kao i klasifikacija naselja prema njihovoj veličini u slojevima: do 200, od 200 do 500, od 500 do 1.000, od 1.000 do 2.000, od 2.000 do 5.000, od 5.000 do 10.000, od 10.000 do 15.000, od 15.000 do 20.000, od 20.000 do 30.000 i preko 30.000. Ovi elementi dati su prema 8 većih celina -*regiona* Pokrajine i 20 srednjih celina — *podregiona*, manje-više usvojenih kao konceptualni u budućoj regionalnoj politici privrednog i društvenog razvoja Pokrajine, a čiji je autor sam pisac ovog rada¹). Zbog nemogućeg svežijeg prikaza današnjih veličina naselja, njihova kvantitativna klasifikacija izvršena je prema takvom stanju 1961. g. kade je u stvari i vršen poslednji popis stanovništva i naselja. Međutim, podaci izneti u ovoj tabeli nisu adekvatni funkcionalnoj regionalizaciji SAP Kosova, već su podaci popisa prema ranijoj administrativnoj podeli Pokrajine na 28 opština (do 31. XII. 1965), prekrojani prema regionima i podregionima sa veoma proizvoljnim granicama u pogledu veličine i brojčanosti regiona-podregiona, sa jedinim ciljem da se

¹) Č. Leši, Funkcionalna regionalizacija i određivanje centralnih naselja AP Kosova i Metohije, Pokrajinski Zavod za društveno planiranje, Priština 1968.

uočavaju regionalne razlike u pogledu gustine naselja po pojedinim krajevima, a nikako kao definitivno uokvirene celine.

ODNOS URBANIH — RURALNIH NASELJA

Poznate teškoće prilikom razgraničenja urbanih od ruralnih naselja koje se javljaju svugde u svetu karakteristične su i za SAP Kosovo, premda je proces intenzivnije urbanizacije u ovim krajevima novijeg doba. Naime, kao poznati pratilac dinamičnog privrednog razvoja, posebno industrijskog, on se javlja u većem zamahu tek nakon drugog svetskog rata, a naročito u zadnjoj deceniji. Upravo su nakon ovog vremenskog razdoblja nastale teškoće u razgraničavanju urbanog od ruralnog i agrarnog uopšte. Dotle je bilo relativno lako diferencirati u prostoru urbanog od agrarnog pejzaža.

Izuzimajući Kosovsku Mitrovicu, pre rata su sva gradska naselja u Pokrajini bila regionalnog karaktera. Međutim, i pored činjenice što su pred-ratni regionalni centri Kosova bili prostorno i funkcionalno dobro distancirani od okolnog agrarnog pejzaža, u samoj strukturi njihovog stanovništva postojao je velik procentat agrarnog stanovništva koje je obrađivalo gradska polja u neposrednoj okolini, ili prosto živelo od zemljišne rente izdavanjem svojih poseda pod zakup ili angažovanjem nadničara za obradu iste. Naročito su se izdvajali po visokom procentu poljoprivrednog stanovništva gradovi Priština i Gnjilane na Kosovu i Đakovica i Prizren u Metohiji. Stanje se nakon rata iz osnova promenilo u pogledu učešća pojedinih struktura stanovništva kod ovih i ostala 3 regionalna centra (K. Mitrovice, Uroševca i Peći) i to u pravcu preovladavanja sekundarnog i terciarnog stanovništva na štetu poljoprivrednog, koje sve više i veoma rapidno isčezava kod svih gradova prve kategorije. Međutim kod sviju regionalnih centara nakon rata je faktički zbrisana stara granica grad-polje, s obzirom da su sedam pomenutih centara doživeli u ovom periodu veoma snažnu teritorijalnu ekspanziju izvan stare gradske granice, nekad tako lepo i čisto ograđenu od okolnog gradskog polja. Usled toga, kod pojedinih gradova regionalnih i drugih podregionalnih centara, došlo je do fuzionisanja urbanih sa ruralnim sredinama na periferiji i stvaranja na taj način velikih aglomeracija, čija je stanovništvo (periferno i seosko u prigradskoj zoni) neraskidljivo i životno povezano sa dotičnim urbanim centrima (snabdevanje gradova ratarsko-stočarskim proizvodima, naročito svežim povrćem i voćem, jajima, mlekom i živinom; od grada okolno stanovništvo beneficira mogućnost zaposlenja svojih odraslih članova, po-hađanje njihove dece srednjih i visokih škola, korišćenje lekarskih usluga, poseta kuturno-zabavnih institucija itd.). Stoga je gradska periferija 7 urbanih centara postala veoma karakteristična po urbanoj renesansi koju doživljava u najnovije doba, uglavnom tokom zadnje decenije (1957—1967). I to ne samo što je samo gradsko stanovništvo delom pobeglo na periferiju zbog rušenja i renoviranja centralnih delova, zatim sve većom deobom ranijih većih porodičnih zadruga sa više oženjenih članova u jednom domaćinstvu kao i očito radi veće udobnosti koju im može pružiti gradska periferija (okućnica, bašta). Na nekadašnju praznu gradsku periferiju nagnulo je i okolno seosko stanovništvo zbog navedenih prednosti neposredne gradske blizine.

Još jedan važan razlog nadolasku seoskog stanovništva u navedenoj dekadi (1957—1967) treba tražiti u težnji da se preko „seoskog zbega” reše nagolemilani problemi socijalno-ekonomske prirode kosovskog sela nastalih zbog relativnog nazadovanja agrarne produkcije i uopšte nedovoljnog tretmana poljoprivrede u ovom periodu, a i zbog izraženog prirodnog priraštaja ruralnog stanovništva Kosova, koji je najveći u zemlji (uporediti prikazani tabelarni odnos stanovništva prema jedinici površine). Drugi razlog leži u područstvenju individualnog zemljišnog poseda stvaranjem velikih kompleksa u okviru formiranja velikih poljoprivrednih kombinata, posebno u Metohiji; dok je individualno zemljište na Kosovu oduzeto više za potrebe ekspanzije industrijskih kapaciteta i gradova. Poslednje promene padaju nešto kانسije, uglavnom šesdesetih godina.

*

Prema mojoj proceni sredinom 1970. g. je od ukupno 1.250.000 stanovnika Kosova, oko 340.000 živelo u gradovima, odnosno drugim naselja neagrarnog i mešovitog tipa. Ukupno ovakvih naselja ima 31 čije stanovništvo čini 25,5% od ukupnog na teritoriji SAP Kosova. U odnosu na druge teritorijalno-političke celine SFRJ, po nivou urbanizacije Kosovo je jedno od zadnjih područja u zemlji, što se može videti iz uporednog prikaza sa drugim društveno-političkim celinama:

	Br. gradova		Gradsko st (%)		Procena	Indeks	Procena
	1953	1961	1953	1961	1970	(1953—100)	1970
SFRJ	241	348	21,1	28,3		142,1	
SR BiH	52	72	15,0	19,5		150,0	
SR CG	9	11	14,7	21,5		164,0	
SR H	52	73	24,2	30,8		134,6	
SRM	18	25	26,0	34,9		144,3	
SR Slovenija	32	48	22,4	27,4		129,4	
SR ²⁾ Srbija	78	119	22,5	30,0		145,9	
Uža Srbija	48	72	21,2	28,6		145,9	
SAPV	22	34	29,8	38,7		142,1	
SAPK	8	13	14,5	20,0 ¹⁾	25,2 ²⁾	162,6	173,0 ²⁾

Međutim, dinamika urbanizacije Kosova u posleratnom periodu se kretala veoma brzo tako da je samo u vremenu od 1953. do 1961. procenat urbanog stanovništva porastao za 5,5% što se može videti i po indeksu porasta u tome razdoblju (162,6) zauzevši drugo mesto u zemlji posle Crne Gore (164,0).

²⁾ Moje p. ocene

Relativno je isto tako nisko učešće glavnog grada Pokrajine — Prištine u ukupnom stanovništvu Kosova, koje prema proceni u 1970 iznosi 4,5²⁾ tako da je to najniži odnos od svih ostalih političko-teritorijalnih celina SFRJ¹⁾, i ako je taj iznos izmenjen u pozitivnom pravcu:

Glavni grad Učešće u ukupnom stanovništvu svoje republike (%)

	1953.	1961.	1970.
Beograd	6,3	7,7	
Zagreb	9,1	10,3	
Ljubljana	7,4	8,6	
Sarajevo	3,9	4,6	
Skoplje	9,1	11,5	
Titograd	3,7	6,2	
Novi Sad	4,9	5,9	
Priština	2,9	4,0 ¹⁾	4,5 ²⁾

KVALITATIVNA OBELEŽJA

URBANA NASELJA

Socio-ekonomska klasifikacija. — U razmatranje je uzeto 13 naselja, koja su prema kriterijima popisa 1961. okvalifikovana kao gradska. Naime, osnovni kriterij njihovog izdvajanja bio je u osnovi procentualno učešće nepoljoprivrednog stanovništva u ukupnom stanovništvu dotičnog naselja, čiji iznos mora biti u obrnutoj srazmeri sa njihovom populacionom veličinom tj. što sitnija naselja morala bi imati veći procenat neagrarnog stanovništva da bi se mogla tretirati kao gradska, odnosno naselja mešovitog tipa. Prema tom šablonu SAP Kosovo je imalo u 1961. g. 13 gradskih naselja.

Niže ćemo navesti diferenciranje oviju naselja prema ukupnim grupama stanovništva po zanimanju (podaci i procenti iz popisa 1961):

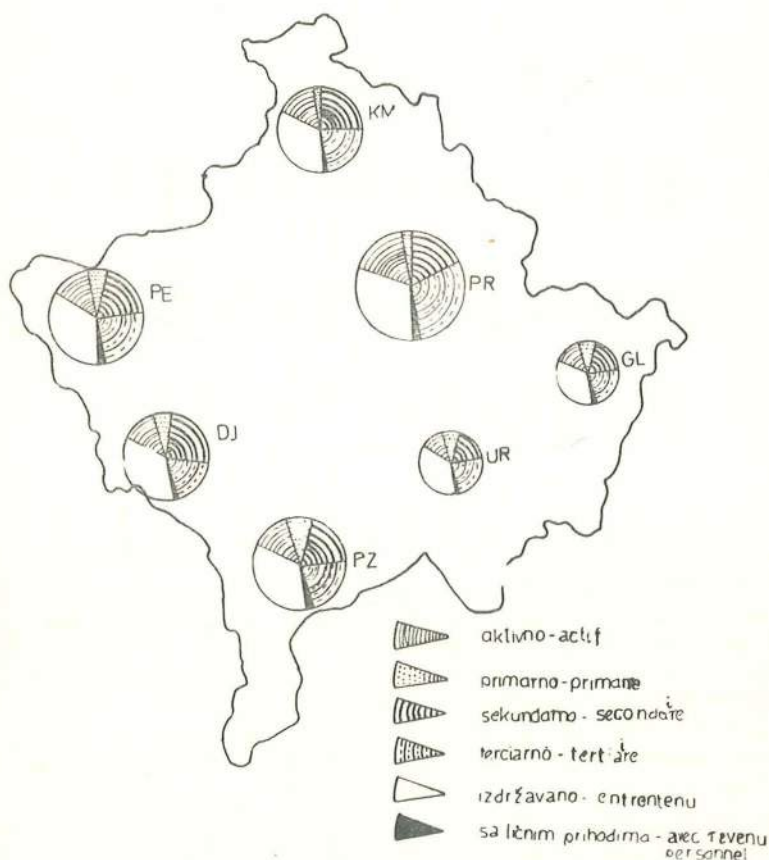
Iz priloženog opšteg tabelarnog pregleda profesionalne strukture stanovništva prema trima glavnim grupama zanimanja vidi se da najveći procenat stanovništva koje živi od primarnih delatnosti imaju uglavnom manja gradska naselja (Podujevo 28,2%, Janjevo 26,8%, Vučitrn 19,0%) kao i pojedini regionalni centri smešteni u najznačajnijim agrarnim područjima i krajevima tradicionalne poljoprivredne proizvodnje. Takvi su na primer Prizren u istoimenom basenu, Gnjilane u gornjemoravskom predelu i dr.; prvi ima 17,6% agrarnog stanovništva, a drugi 17,7%. Naprotiv, sa najmanjim

¹⁾ VI. Đurić, Dinamika porassta populacije i funkcionalno diferenciranje jugoslovenskih gradova, Zbornik radova GZ PMF UB, 1965, XII, 93, 86.

²⁾ Moje procene.

Grad	Ukup. st.	Prim.	%	Sekun.	%	Terc.	%	Ostali	%	Lič. pr.	%
Dj.	20.778	2.333	11,2	8.753	42,1	3.512	17,0	4.489	21,6	1.610	7,7
Gnj.	12.681	2.237	17,7	4.163	32,8	1.850	14,7	3.552	28,0	789	6,2
Janjevo	3.762	1.063	28,2	1.949	51,8	184	5,0	311	8,3	243	6,5
Kačanik	2.923	263	9,0	1.113	38,0	508	17,5	663	22,8	366	12,3
K. M.	26.721	1.014	3,8	10.655	39,9	5.432	20,2	6.251	23,5	3.020	11,3
Obilić	3.646	532	17,0	1.726	47,2	493	13,4	704	19,2	175	5,0
Peć	28.351	2.785	9,7	8.762	34,1	5.651	20,0	6.990	24,6	3.899	13,7
Podujevo	4.870	1.307	26,8	1.292	25,2	731	15,0	1.144	25,0	391	8,0
Pr.	38.593	2.745	7,0	11.760	32,2	7.011	18,1	13.311	33,4	3.539	9,0
Pz.	28.062	4.946	17,6	9.288	33,1	4.573	16,2	6.546	23,3	2.558	9,1
Ur.	11.665	1.564	13,4	4.175	35,8	2.013	17,2	2.636	22,6	1.027	8,8
Vučitrn	8.025	1.523	19,0	2.981	37,1	1.317	16,4	1.501	18,7	599	7,4
Zvečan	2.353	28	1,2	969	41,2	414	17,6	805	34,1	127	5,4

procantom agrarnog stanovništva odlikuju se izrazito industrijski centri Pokrajine — K. Mitrovica sa 3,8% primarnog stanovništva, Zvečan sa svega 1,2%. Između 9,7 i 13,4% agrarnog stanovništva nalaze se gradovi — regionalni centri: Peć, Đakovica i Uroševac, kao i podregionalni centar Kačanik (sa 9,0%). Sa neznatnim postotkom primarnog stanovništva odlikuje se i glavni grad Priština — 7%.



SOCIO-EKONOMSKA STRUKTURA STANOVNIŠTVA GRADOVA
L'A STRUCTURE SOCIO-ÉCONOMIQUE DU POPULATION DES VILLES

Što se tiče udela stanovništva koje živi od sekundarnih zanimanja, od gradova regionalnih centara, u prvu kategoriju (sa 40%) dolaze Đakovica i K. Mitrovica; u drugu (sa oko 35%) Uroševac, Peć, Prizren i Gnjilane. Od podregionalnih centara, u prvu kategoriju (sa 37—38%) spadaju Vučitrn i Kačanik, a u drugu (sa 25%) Podujevo. Od drugih urbaniziranih naselja

Kosova u prvu kategoriju po učešću industrijskog stanovništva dolaze Janjevo i Oblilić (sa po 50%), a u drugu (sa 40%) Zvečan.

Znatno manje su razlike u učešću tercijarnog stanovništva i to kod regionalnih (maksimalne razlike do 5,5%), a naročito podregionalnih centara (razlike do 2,5%). U kategoriju sa najvećim procentom tercijarnog stanovništva (sa oko 20%) od regionalnih centara spadaju K. Mitrovica i Peć; u drugu (sa 17—18%) Priština, Uroševac i Đakovica; u treću (sa 15—16%), Prizren i Gnjilane. Od podregionalnih centara u drugu kategoriju (sa 17,5) nalaze se Kačanik, a u trećoj (od 15—16%) Vučitrn i Podujevo.

* * *

Tokom zadnje decenije, od momenta poslednjeg zvaničnog popisa od 1961. g., urbana naselja SAP Kosova pretrpela su znatne promene u njihovoj socio-profesionalnoj strukturi, koje, na žalost ne možemo cifarski prikaziti i uporediti. Ali je najverovatnije da je u svim regionalnim, pa i pojedinim podregionalnim centrima, došlo do daljeg procesa njihovog urbanog diferenciranja i konsolidovanja tj. povećan je broj ljudi zaposlenih u neagrarnim zanimanjima: sekundarna i tercijarna, odnosno kvartarna. Prvenstveno se to odnosi na glavni grad Prištinu, koja se upravo tek nakon 1961. počela uoblikovati u značajno urbano središte na jugu zemlje i to kao pojačani političko-upravni centar, dobivanjem većih kompetencija u okviru autonomije Pokrajine Kosova, a od prošle godine i pravo na donošenje ustavnog zakona. Nakon ove godine Priština dobija prve fakultete da bi se u ovoj 1970. g. krunisala Univerzitetom; proširenje i kompletiranje zdravstvenih ustanova kao i kulturnih institucija.

U drugoj kategoriji intenzivne urbanizacije gradova sa znatnijim promenama socio-ekonomske strukture stanovništva doživeli su i 6 ostalih regionalnih centara Kosova: K. Mitrovica, Uroševac i Gnjilane u užem Kosovu; Peć, Đakovica i Prizren u Metohiji. Sličnu sudbinu su doživeli i neki od podregionalnih centara geografski bolje položeni (Podujevo) i drugi koji su dobili značajne industrijske kapacitete (Suva Reka, Kačanik).

Uža klasifikacija urbanih naselja—prema učešću tercijalnog i kvartarnog stanovništva

Sledeća, uža klasifikacija urbanih naselja SAP Kosova bazira na procentualnom učešću njihovog ukupnog stanovništva prema delatnostima i to po dvema izrazito urbanim kategorijama: *tercijarnim* (saobraćaj, trgovina, ugostiteljstvo, lične usluge; komunalne, kulturno-prosvetne i zdravstveno-socijalne delatnosti) i *kvartarnim* (državna uprava, bankarstvo i osiguranje).

U niže datom tabelarnom prikazu izvršena je kategorizacija 13 naselja koje popis 1961. klasificira kao gradska i to u 6 osnovnih grupa — kategorija. U prvu kategoriju uvršćeni su gradovi sa približno 40% stanovništva ovih delatnosti, u drugoj su oni između 20—32%, u trećoj 26—28%, u četvrtoj sa oko 20%, u petoj sa 14% i šestoj kategoriji su naselja sa svega oko 8% stanovništva u vanprivrednim delatnostima. Prikaz u sledećoj tabeli je isključivo u procentima:

Kat.	Urbano naselje	Ukupno		Tercijarne delatnost (T)							Kvartatne (K)			Ostalo Van del.	
		(T+K)	Ukup.	Saobr.	Trg.	Ugost.	Lič. u Kom	Kult.	Zzr.	Ukup.	Dr. up.	Bank.	Os.		
I	Priština	38,8	28,2	2,9	6,3	2,2	0,9	4,0	7,3	4,6	10,6	9,1	1,5	9,4	11,3
II	Peć	32,6	26,2	4,7	7,0	2,2	1,5	2,3	4,8	3,7	6,4	5,3	1,1	4,2	16,2
„	Kačanik	32,1	26,1	9,0	5,3	1,1	0,8	4,4	2,7	2,8	6,0	6,0	—	4,4	16,1
„	Prizren	30,6	24,3	2,3	6,0	1,7	0,9	4,2	6,7	3,5	6,3	5,3	1,0	4,4	11,6
III	Gnjilane	28,0	19,0	1,9	3,8	1,0	1,0	2,4	4,7	4,2	9,0	8,0	1,0	5,8	9,5
„	Podujevo	27,0	17,6	3,2	5,2	1,1	0,6	1,2	4,0	2,3	9,4	9,1	0,3	4,1	10,2
„	K. Mitrovica	26,8	21,7	3,1	5,6	2,1	0,7	2,8	4,2	3,2	5,1	4,0	1,0	7,2	14,0
„	Uroševac	26,8	20,2	5,0	5,0	1,6	0,8	1,9	4,5	1,3	6,6	6,0	0,6	6,4	14,3
„	Đakovica	26,3	21,7	2,5	7,0	1,7	0,9	2,0	5,1	2,5	4,6	4,4	0,2	3,4	12,0
IV	Tvečan	21,9	19,8	6,4	0,9	2,9	0,4	1,1	5,0	3,0	2,1	1,6	0,5	2,7	7,2
„	Vučitrn	19,2	13,6	2,4	3,3	1,7	0,9	1,1	3,1	1,2	5,6	5,3	0,3	6,8	11,8
V	Obilić	13,9	12,5	4,2	1,4	0,9	0,1	1,7	3,2	1,0	1,4	1,4	—	1,0	7,6
VI	Janjevo	7,9	6,1	0,3	0,9	0,3	0,9	1,9	1,4	0,4	1,8	1,8	—	1,6	8,0

U prvoj kategoriji se izdvaja Priština sa najvećim procentom svog stanovništva koje egzistira iz vanprivrednih delatnosti. Ona istovremeno ima i najveći postotak kvartarnog stanovništva (10,6), premda u ovome pogledu ne zaostaju i pojedini skromniji urbani centri Kosova kao Gnjilane i Podujevo sa preko 9% kvartarnog stanovništva. U drugu kategoriju spadaju Peć, Prizren kao i skromna varošica Kačanik na najjužnijoj tački užeg Kosova. Peć i Kačanik istovremeno imaju i najveći procenat stanovništva izvan delatnosti (preko 16%). Radi se o velikom broju penzionisanog stanovništva (kolonizacionog porekla) u Peći i starijeg neaktivnog (iznemoglog i starijeg sloja) u Kačaniku. U trećoj — najvećoj grupi, u koju spadaju 5 urbanih centara različite veličine (od 12 do 27 hiljada stanovnika prema stanju u 1961) u kojima je procenat tercijarnog stanovništva približno jednak (od 17 do 21%), dok postotak kvartarnog varira od 4,6% kod Đakovice do 9,4% kod Podujeva. U četvrtu kategoriju spadaju Zvečan i Vučitrn, prvi zbog izrazito industrijskog i uopšte neagrarnog profila, dok drugi zbog izvesne centralne uloge u okolnom prostoru (5,6% kvartarnog stanovništva). Obilic je u petoj kategoriji zahvaljujući preovlađivanju industrijskog stanovništva, a Janjenvo u šestoj blagodareći brojnom zanatlijskom i neagrarnom stanovništvu, koje svoju egzistenciju obezbeđuje prodajom svojih izradevina širom Kosova i drugih krajeva Jugoslavije.

FUNKCIONALNA TIPOLOGIJA URBANIH I URBANIZIRANIH NASELJA

I. Regionalni centri

Gradovi	St. 1961.	Procena 1970,
PRIŠTINA	38.593	65.000
K. MITROVICA	26.721	50.000
PRIZREN	28.062	40.000
P E Ć	28.351	40.000
ĐAKOVICA	20.778	30.000
GNJILANE	12.681	20.000
UROŠEVAC	11.665	17.000

Ovi gradovi predstavljaju stubove urbane armature SAP Kosova i na njih se nadovezuje celokupni privredni i društveni život Pokrajine.

Populaciono to su najveća naselja Kosova (po zvaničnom popisu od 1961. imala su između 12.000 i 40.000 stanovnika, a po proceni sredinom 1970. g. od 17.000 do 65.000 st.). U strukturi njihovog stanovništva (ukupnog) tercijarna i kvartarna grupa čini preko 1/4, dok je učešće agrarne grupe stanovništva maksimalno do 20%, što skupa daju dovoljno elemenata da se isti okvalifikuju kao pravi gradovi. Uz to, po prometno-geografskom položaju koji poseduju, svi su veoma sretno položeni tako da će oni i u budućoj mreži gradova ovih krajeva predstavljati glavna urbana žarišta od kojih i oko kojih će većito strujati život.

Apstrahujući ulogu Prištine kao pokrajinskog centra čiji je delokrug aktivnosti čitava teritorija SAP Kosova, svi navedeni centri po nizu svojih funkcija i aktivnosti imaju veoma širok i raznovrstan dijafazon regionalnog dometa. U navedenih 7 centara skoncentrisan je niz tercijarnih i kvartarnih delatnosti čiji delokrug aktivnosti opslužuje okolnu teritoriju sastavljenu od 2 ili više opština.

Od kvartarnih delatnosti velikog regionalnog dometa, čiji je delokrug aktivnosti zakonski određen, u 7 navedena centara postoje sledeći servisi: unutrašnja bezbednost i bezbednost saobraćaja, pravno-pravnobranilička služba u nivou okruga (osim u K. Mitrovici, Uroševcu i Đakovici), služba nadgledanja dinamike zaposlenja (sedišta zavoda za posredovanja pri zapošljavanju u svih 7 centara), služba socijalnog zbrinjavanja (osim u Uroševcu, Đakovici i Gnjilanu), služba društvenog knjigovodstva (osim u Đakovici, Uroševcu i Gnjilanu). U većim urbanim centrima, kao što su Priština i Kos. Mitrovica postoje stručne socijalne službe za maloletnu i delikventnu decu (zavodi za socijalni rad), kao i zavodi za unapređenje domaćinskih delatnosti. Zatim u jačim centrima (Prištini, K. Mitrovici, Prizrenu i Peći) postoje organizovane službe (stručne) za praćenje procesa urbanizacije i zaštite prirode i spomenika kulture. U Prištini, K. Mitrovici, Prizrenu, Đakovici i Peći postoje zavičajni ili muzeji revolucije.

Od tercijarnih delatnosti u svim centrima (osim u Uroševcu) postoje kompletni medicinski centri sa svim specijalističkim klinikama. Takođe u svim navedenim centrima (osim Uroševca), postoji neka viša škola, ili pak njena isturena odeljenja, kao i bolje opremljene biblioteke.

II. Podregionalni centri

1. Veća naselja varoškog tipa

	St. 1961.	Procena 1970.
Vučitrn	8.025	12.000
Podujevo	4.870	8.000
Orahovac	7.378	12.000

2. Manja naselja varoškog tipa

Lipljan	2.415	5.000
Suva Reka	2.708	4.500
Kačanik	2.923	5.000

3. Naselja — administrativni centri

Dragaš	600	900
Istok	2.657	3.500
Srbica	1.009	2.000
K. Kamenica	1.298	2.500

U drugi hijerarhijski nivo funkcionalne klasifikacije urbanih naselja Kosova dolaze urbani i urbanizirani centri koji se po svojoj veličini, fizionomiji naselja, opremljenosti raznim servisima i svojim regionalnim dometima mogu dalje podeliti u 3 gorenavedena tipa.

U prvu varijantu podregionalnih centara uvršćena su tri varoška naselja, koja su u vremenu popisa imala oko 7 do 8 hiljada stanovnika, a po prognozi u ovoj, 1970, g. treba da imaju od 8 do 12 hiljada.

Ova naselja predstavljaju drugorazredne centre po važnosti iza navedeni 7 regionalnih centara, iako pojedini — kao Orahovac — čak ne ulaze u kategoriji gradova, s obzirom da je isti imao u 1961. g. preko 60% agrarnog stanovništva. Međutim, kako po svojoj dugogodišnjoj varoškoj tradiciji, tako i po sadašnjoj ulozi koju ima u okolnom prostoru, Orahovac je jedan od većih podregionalnih centara Metohije tj. centar je Podrimlja i Prekoruplja.

Ostala dva centra prve varijante imaju upola manji postatak agrarnog stanovništva (od 24 do 30%), a uz to su podregionalni centri svojih područja: Podujevo labskog i golačkog kraja, a Vučitrn severnog dela kosovske ravni i obodnog planinskog pojasa. Procenat tercijarno-kvartarnog stanovništva se kreće između 12% kod Orahovca i 27% kod Podujeva.

Sva 3 podregionalna centra su sedišta značajnih tercijarnih i kvartarnih delatnosti: sedišta su ekspozitura zavoda za zapošljavanje i socijalno osiguranje, a Podujevo i ekspoziture društvenog knjigovodstva; od tercijarnih delatnosti svi imaju domove narodnog zdravlja sa porodilištima, zatim apoteke; jednu (Orahovac) ili više srednjih škola: Podujevo — 2, Vučitrn — 3; biblioteke sa kompletnim dečjim odeljenjima. Sva tri centra imaju dobro opremljenu trgovinu i značajno zanatstvo, a naročito starija naselja (Vučitrn), dok po trgovačkim funkcijama predniči Podujevo.

Prema kategorizaciji popisa 1961. kao gradska naselja ovaklifikovana su Podujevo i Vučitrn, dok je Orahovac uvršćen u naselje mešovitog tipa.

*

Podregionalni centri druge varijante populaciono su upola manja naselja od naselja prve varijante (od 2.500 do 3.000 st. 1961., odnosno oko 5.000 u 1970.), ali su kako po svojoj teritoriji koju opslužuju, takođe i tercijarno-kvartarnim aktivnostima kojima raspolažu, veoma važna semi-urbana sedišta.

U strukturi njihovog ukupnog stanovništva poljoprivredna grupa je zastupljena između 10% kod Kačanika i 60% kod Suve Reke, dok je tercijarno-kvartarna grupa kod svih veoma značajna kategorija i iznosi od 21% (Suva Reka) do 37% (Lipljan).

Od kvartarno-tercijarnih aktivnosti u ovim centrima postoje: sedišta skupština opština i opštinskih sudova, ekspoziture zavoda za socijalno osiguranje i zavoda za zapošljavanje, domovi zdravlja sa porodilištima, apoteke, 1—2 srednje škole, biblioteke sa dečjim odeljenjima, a u Lipljanu i ekspozitura društvenog knjigovodstva.

Popis 1961. je okvalifikovao Kačanik u gradsko naselje, a Lipljan u naselje mešovitog tipa, odnosno Suvu Reku kao obično selo. Treba dodati međutim da je Suva Reka u poslednjoj deceniji doživela snažan privredni i društveni napredak usled znatnog ekonomskog oživljavanja: u međuvremenu podignut je veliki vinski podrum i gumeni kombinat „Balkan”. Suva Reka ima i povoljan saobraćajno-geografski položaj s obzirom da se nalazi na putnoj magistrali koja povezuje Metohiju sa Kosovom; uz to ona je značajan lokalni centar u oblasti Prizrenskog podgora.

*

Treća varijanta podregionalnih centara obuhvata 4 skromnija centra (od 600 do 2.600 st 1961., odnosno 1.000 do 4.000 u 1970), koji se takođe odlikuju po njihovoj ulozi gravitacionih centara područja u kojima su smešteni.

U socio-ekonomskoj strukturi ukupnog stanovništva ovih centara preovlađuje poljoprivredno stanovništvo koje se procentualno kreće između 30% (Dragaš) i 60% (Istok). Tercijarno-kvartarna grupa stanovništva je procentualno znatno veća, negoli u podregionalnim centrima prve varijante i kreće se između 18% (Istok) i 50% (Dragaš); K. Kamenica i Srbica imaju po 40% u grupi tercijarno-kvartarne kategorije stanovništva.

Relativno visoko procentualno učešće tercijarne i kvartarne grupe u ukupnom stanovništvu Dragaša, K. Kamenice i Srbije je posledica njihove upravo-administrativne uloge kao sedišta opština, kao i izvesnih privrednih aktivnosti koje su locirane u ovim centrima (K. Kamenica), a u uslovima malog broja ukupnog stanovništva. Tercijarne i kvartarne aktivnosti ovih centara su slične kao kod druge varijante.

Od sva četiri centara jedino je Istok uvršćen u grupi seoskih naselja, dok su ostala 3 centra u grupi mešovitih naselja (prema klasifikaciji popisa 1961).

III. Administrativni centri

Naselja mešovitog tipa sa 40—50% neagrarnog stanovništva

	St. 1961. g	Prognoza 1970.
Dečane	1.829	2.500
Klina	1.092	2.500
Vitina	2.210	3.000
Leposavić-Ulije	1.742	2.000

Reč je o čisto administrativnim centrima — sedištim opština, a kod pojedinih ova funkcija dopunjena je sa još jednom ili dve funkcije, koje su u perspektivi budućeg razvoja dotičnih naselja i njihovog daljeg preobražaja u gradska. Tako je kod Kline u začecima industrijska i važna saobraćajno-prometna funkcija, kod Dečana turistička itd.

Od tercijarno-kvartarnih aktivnosti navedeni centri poseduju: ekspoziture zavoda za socijalno osiguranje i zapošljavanje (osim u Glogovcu), domove zdravlja sa porodilištima, apoteke, po jednu školu drugog stupnja (opšteobrazovnog tipa), biblioteke sa dečjim čitaonicama. Navedeni centri imaju nešto trgovine i nekoliko zanatlijskih radnji. Međutim, popis 1961. g. sva ova naselja kategorizuje kao seoska.

Kao veoma perspektivan centar iz ove varijante treba izdvajati Klinu koja će u skoroj budućnosti prerasti u podregionalni centar. Šira društvena zajednica u planiranju razvojne politike urbane mreže Kosova treba da forsira Klinu kao jedan od najperspektivnijih centara Pokrajine i učini sve da ona što prije presraste u gradski centar prve kategorije, tj. regionalni centar. Time bi se popunila praznina urbane mreže Metohije sa još jednim centrom i izjednačavala se sa užim Kosovom koje ima 4 urbana centra³⁾.

IV. Naselja — važni saobraćajni punktovi

	St. 1961	Procena 1970.
Kosovo Polje	2.423	10.000
Štimlje	2.832	3.500
Đurakovac	2.143	2.500

U ovoj grupi posebno treba izdvojiti Kosovo Polje, koje ima i drugih funkcija osim saobraćajno-prometne: ono je industrijsko naselje, a u prigradskoj je zoni Prištine. Pored toga ono je u poslednjoj deceniji doživelo veoma dinamičan privredni i demografski razvoj tako da se računa da ima iznad 10.000 stanovnika.

U ostala dva centra saobraćajno-prometna funkcija ostala je dominantna. Uz to oba punkta su istovremeno i lokalni centri svojih područja (trgovina, zanatstvo). Sedišta su i pojedinih kvartarnih aktivnosti. Tako je u Đurakovcu sedište suda za opštinu Istok i Klina, kao i ekspozitura Zavoda za socijalno osiguranje Peći za područje istočke opštine. U oba ova centra postoji zdravstvena služba i apoteke. U bliskoj prošlosti oba punkta su imala i veći administrativni značaj: u Đurakovcu je bilo odmah posle rata sedište istoimenog sreza, a u Štimlju sedište opštine. Tako su vremenom ovi punktovi uspeli da stvore izvesno gravitaciono područje. Štimlje je između dva svetska rata bilo proglašeno varošicom i imalo značajnu trgovinu koju su mahom držali Đakovčani. U ovu kategoriju naselja spada i Zrze, nakon što je izgrađena željeznička linija Metohija—Prizren u 1963. g. kada je postala železnička veza za Đakovicu i Orahovac.

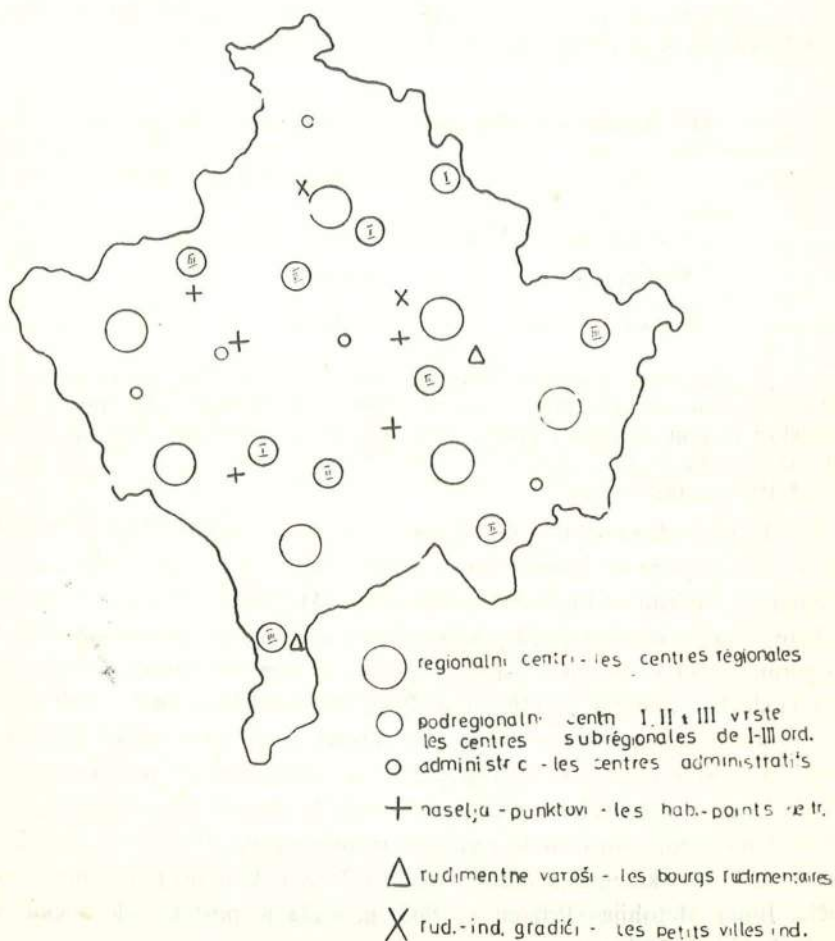
³⁾ Č. Leši, Funkcionalna regionalizacija i određivanje centralnih naselja APKiM, Priština, 1968.

V. Rudarsko-industrijska naselja

	St. 1962	Procena 1970
Zvečan	2.353	5.000
Obilić	3.646	8.000

VI Veća rudimentna naselja (sa preko 65% nepoljoprivrednog st.)

Janjevo	3.762	4.000
Brod	1.604	2.000



FUNKCIONALNA TIPOLOGIJA URBANIH I URBANIZIRANIH NASELJA
 LA TYPISATION DES HABITAT URBAINE ET URBANISE

Region— Podregion	Broj naselja na 100 km ²	Broj st. po 1 n.	Svega naselja Do 199 st.	U%	Od 200 do 499	%	Od 500 do 999	%	Od 1.000 do 1.999	%	Od 2.000 do 4.999	%	Od 5.000 do 9.999	Od 10.000 do 14.999	Od 15.000 do 19.000	Od 20.000 do 29.000	preko 30.000	
Ukupno																		
SAPK	13,4	859	1.452	253	17,1	580	40,0	437	30,1	152	10,4	21	1,4	2	2	—	4	1
I.																		
K. MITR	15,9	675	330	110		135		63		18		2		1	—	—	—	—
1. Leposavić	13,1	405	70	32		30		6		2								
2. K. Mitrov	18,0	667	139	59		55		18		4		2				1		—
3. Vučitrn	19,3	821	68	15		26		22		4	—	1						
4. Srbica	13,4	900	53	4		24		17		8								
II.																		
PRIŠTINA	13,2	1.000	288	37		108		96		40		6		—	—	—	—	1
1. Podujevo	12,4	901	87	11		27		32		16		1						
2. Priština	11,1	1.421	93	7		36		11		3								1
3. Lipljan	18,3	714	73	19		28		16		8		2						1
4. Glogovac	10,2	834	35	—		17		13		5		—						
III.																		
UROŠEVAC	8,6	1.375	123	18		39		49		14		2		—	1			
1. Uroševac	8,0	1.492	80	7		24		34		13		1		—	1			
2. Kačanik	9,9	1.152	43	11		15		15		1		1						
IV																		
GNJILANE	13,4	975	172	12		69		54		33		3		—	1			
1. K. Kamenica	14,6	855	73	8		30		25		10		—						
2. Gnjilane	12,5	1.136	99	4		39		25		23		3		—	1			
V.																		
PRIZREN	12,8	1.077	159	22		58		52		23		3		—	—	—	1	—
1. Suva Reka	11,9	961	43	8		12		13		8		2		—	—	—	—	—
2. Prizren	17,0	1.280	79	13		28		24		12		1		—	—	—	1	—
3. Dragash	8,6	818	37	1		18		15										
VI.																		
ĐAKOVICA	13,4	915	199	38		93		52		13		1		1	—	—	1	—
1. Orahovac	13,1	1.112	76	11		31		26		6		—		1	—			
2. Đakovica	13,7	833	123	27		62		26		6		1		—	—	—	1	—
VII.																		
P E Ć	12,2	1.143	127	13		49		54		6		4		—	—	—	1	—
1. Istok	12,5	980	50	1		18		26		3		2		—				
2. Peć	11,7	1.236	77	12		31		28		3		2		—	—	—	1	—
VIII.																		
KLINA	17,0	833	54	3		29		17		5		—	—	—	—	—	—	—

Popisni materijal 1961, pored Zvečana i Obilića i Janjevo rangira u gradove. Ovo poslednje je međutim rudimentna varoš bez svog hinterlanda, tim pre što je nakon rata Lipljan, inače geografski znatno sretnije položen, preuzet za administrativno sedište — pivo sitničkog, a kasnije istoimene opštine na srednjem i najširem delu kosovske ravni. Sličnu sudbinu je doživio i Brod — najveće goransko naselje, nakon uzimanja Diagaša za sedište sreza, odnosno sadašnje istoimene opštine. Brod je još 1913 bio proglašen za varošicu, a prema kriterijima predposlednjeg popisa stanovništva (1953) figurirao u grupi gradskih naselja; poslednji popis uvršćuje Brod u grupi mešovitih naselja.

Obilić je posle rata urbanizovano naselje zahvaljujući izgradnji energetsko-metalurško-hemijskog Kombinata „Kosovo“, dok je Zvečan dobio varošku fizionomiju još tridesetih godina sa početkom eksploatacije obojenih metala u sklopu mitrovihčkog rudarskog revira.

U posleratnom periodu od rudarsko-industrijskih naselja na Kosovu najviše je porastao Obilić, koji je za svega 15 godina (od 1948 do 1953) utrostručio broj svojih stanovnika⁴).

RURALNA NASELJA

(NEAGRARNA I AGRARNA)

Pojava ruralnih naselja neagrarnog tipa je posleratni fenomen na Kosovu. Pre rata je inače pojam ruralnog i agrarnog u ovim krajevima bio nerazdvojliv u prostoru kako po fizionomiji, tako i u funkcionalnom značenju. Pojava ruralnih neagrarnih naselja na Kosovu je počela uzimati maha tokom zadnje decenije. Ono je pratilac posleratnog industrijskog razvoja Kosova. Javljaju se u blizini gradskih aglomeracija, naročito većih i dinamičnijih, kao i u mestima rudarske eksploatacije (ovakvih ima najviše u užem Kosovu).

Prigradska ruralna naselja javljaju se u blizini većih uže kosovskih i me-tohijskih gradova prve kategorije (regionalnih centara) služeći njihovim stanovcima više za odmor, naročito noćni, pa je u literaturi za njih usvojen termin „spavaća naselja“ („dortoir“).

Osim čisto rudarskih naseobina stvoreni nakon drugog svetskog rata na mestima eksploatacije rude, na Kosovu nemamo primera novih čisto ruralnih naselja neagrarnog tipa. U stvari, ranija prigradska agrarna naselja su delom preobražena u „dortoirska“ zbog mogućnosti zaposlenja njihovog stanovništva u gradovima. Ovakva naselja se sreću na udaljenosti od grada do 7 km. S obzirom da je u periodu između dva svetska rata izgrađeno više naselja kolonista u blizini gradova, iz kategorije oviju agrarnih naseobina došlo je do najveće regrutacije zaposlenih u bližim gradovima. Budući da se radilo o stanovništvu koje nikad nije bilo toliko privrženo zemljoradnji, time je bilo i lakše njihovo uključivanje u gradsku ekonomiju i društvene službe.

⁴) Č. Leši, Obilić — Rudarsko-industrijsko naselja na Kosovu, Geografski horizont, 1—2, 1965, XI, str. 32.

Razume se da je na Kosovu teško naići na čista „dortoirska“ naselja. Najčešća su mešovitog tipa, tj. nastanjena pravim zemljoradnicima i onima koji svoju egzistenciju obezbeđuju zaradom iz radnog odnosa. Ovakvog tipa su, recimo, K. Polje (kod Prištine), Dušanovo (kod Prizrena), Piskote, Ljugbunar (kod Đakovice), Vitimirica (kod Peći) i dr.

Druga vrsta ruralnih naselja neagrarnog tipa nastala je u blizini novootvorenih rudokopa, aglomeracijom radništva i drugog osoblja zaposlenog u raznim uslužnim delatnostima. Ovaj tip ruralnih naselja nastao je uglavnom u užem Kosovu gde je u stvari i došlo do eksploatacije njenog rudnog blaga u posleratnom periodu, osim u okolini K. Mitrovice gde je ova aktivnost postojala i pre rata. Na ovoj osnovi se razvio gradić Zvečan koji je u današnje vreme ne samo rudarsko naselje, već pre svega skromni centar sa čisto urbanim funkcijama.

Ruralna naselja *rudarskog tipa* u mitrovičkom industrijsko-rudarskom reviru su: Rudarsko Naselje, Prvi Tunel, Stari Trg, Sento, Malo Rudare, Mali Zvečan, Belo Brdo kod Leška (leposavička opština) i dr.

U širem reonu Prištine ovom tipu naselja pripadaju Kišnica, Ajvalija, Magura (u lipljanskoj opštini), Novo Brdo, Bostane. Mešovitog (rudarsko-zemljoradničkog) tipa su: Belačevac, Crkvena Vodica, Ade, Dobro Selo i td.

Treća vrsta ruralnih naselja (neagrarna) razvila se u blizini lekovitih izvora i banja, kao što su Banjska kod K. Mitrovice; Ilidža-Banja kod Peći, Klokot Banja na relaciji Uroševac-Gnjilane.

Četvrta vrsta je nastala u prirodno atraktivnim predelima, u vidu vazdušnih banji: deo Dečana (krug odmarališta više Manastira — oko 2 km od centra), Brezovica na Šari; na rečnim kupalištima, kao što je Našec kod Prizrena (ovo je naselje tipično sekundarno naselje Prizrenaca i jedinstveno je takve vrste u Pokrajini).

Peta grupa nastala je na važnim željezničkim i putnim raskršćima u vidu *naselja-punktova*. Ovog tipa je Grlica u južnom Kosovu, Zrze u Metohiji.

* * *

Agrarna naselja u užem smislu čine najrasprostraniji tip naseobina uopšte na Kosovu. Ona su u funkcionalnom pogledu jedinstvena, ali se mogu diferencirati prema ekološkim uslovima njihovog smeštaja, gustini kuća unutar naselja, obliku ulica i njihovom rasporedu itd.

Elementi prirodne sredine u kojima su smeštena agrarna naselja i drugi faktori ekonomsko-društvene prirode su odlučujući u nastanku tipova agrarnih naselja.

U pogledu gustine kuća u agrarnim naseljima Kosova skoro je pravilo da je ono čisto reljefna funkcija, i to ne samo kao ekološki faktor, već kao posledica uslova za vrstu privređivanja koju pružaju morfološki oblici tla. Naime, ravničarski predeli su uglavnom ratarski po načinu privređivanja, dok brdjanski i planinski uopšte mešovitog ili isključivo stočarskog tipa. Za prve oblike tla vezana su naselja sa kućama bliže jedna drugoj, tj. *sela su*

zbijenog tipa i njihovih prelaznih varijanti, dok su za druge oblike vezana naselja sa udaljenim kućama odnosno naselja su *razbijenog tipa* i njihovih varijanti.

Jedna trećina naselja užeg Kosova (oblasti između K. Mitrovice - Kačanika) leži u ravnici, druga trećina na kotlinskom rubu, a treći deo smešten je na planipskom podnožju⁵⁾. Veći deo ravničarskih naselja (oko 70%) su *zbijenog tipa*; u ostalim dvema navedenim sredinama sela su jednog i drugog tipa.

Za niže delove Metohijsko-prizrenske kotline vezana su uglavnom naselja *zbijenog tipa*. To su ujedno i populaciono najveća naselja ovog kraja, vezana za ratarsko iskorišćavanje ravnog i u većini slučajeva navodnjenoga tla. Ovakvog tipa, kao i prelaznih varijanti su i sela na zapadnom—kotlinskom obodu u podnožju Prokletija. Njihova polja su pod intenzivnim ratarskim kulturama, odnosno livadama i voćnjacima.

Razbijeni tip mahalske varijante sreće se u Metohiji u njenim brdovitim krajevima kao što su Prizrenski podgor, Metohijski podgor, Drenica, Has, Prekoruplje. Delovi sela su izdvojeni po mahalama koje se osnivaju na krvnoj i rodbinskoj osnovi.

Mahalske varijante su i sela u planinskim oblastima., kao što su župe Gora i Opolje, gde su mahale udaljene jedna od druge 100 do 300 metara⁶⁾. Ali, za razliku od naselja u niskim predelima Metohijsko-prizrenske kotline, ova poslednja su po tipu na sredini između *zbijenih* i *disperznih*. Zato ih možemo tretirati kao naselja *poluzbijenog tipa*. Na njihov postanak i oblikovanje, pored reljefa, uticali su i društveno-ekonomski uslovi u širem značenju.

Naselja *razbijenog tipa* u brdovito-planinskoj oblasti Kolašina u predelu gornjer Ibra pripadaju *džematskom tipu* -ibarske vrste⁷⁾. Kao što se moglo zapaziti iz prvog dela ovog rada, ova su naselja populaciono najsićušnije naseobine uopšte na Kosovu. Mahalskog i disperznog tipa su i naselja u planinskoj oblasti Kačaničke klisure⁸⁾.

*

Po svome obliku, ogromna masa naselja, koju čine stara sela autohtonog stanovništva su nepravilnog oblika. Raspored kuća i ulica nije u njima pravolinijski. Od ovih se razlikuju u agrarnom pejzažu novija — kolonistička naselja koja su po obliku pravolinijska, tj. kuće su na podjednakom otstojanje jedna od druge i poredane s obe strane glavne ulice ili puta. Najkarakterističnija su u ravni Kosova između Svračka (kod Vučitrna) i Rake (kod Kačanika)

⁵⁾ A. Urošević, K o s o v o, SANU, SEZ, knj. LXXVIII, Od. drššt. nauka, Naselja i por. st., knj. 39, Beograd, 1965, 59.

⁶⁾ M. Lutovac, G o r a i O p o l j e, SAN, ODN, SEZ, knj. LXIX, Naselja i poreklo st., knj. 35, Beograd, 1965, 266.

⁷⁾ J. Cvijić, Balkansko Poluostrvo i Južnoslovenske zemlje, knj. I, Beograd, 1922, str. 335.

⁸⁾ J. F. Trifunski, Kačanička Klisura, SAN, ODN, SEZ, Knj. LX, Naselja i poreklo st., knj. 32, Beograd, 1950, 488.

Ukupno se na ovome prostoru nižu 18 naselja⁹⁾. Naselja kolonista drumskog tipa postoje i u Metohiji, najčešće u blizini njenih urbanih centara Peći, Đakovice i Prizrena.

* * *

Poseban, čisto ekonomski tip naselja predstavljaju nastambe smeštene u visoko-planinskom regionu okolnih, najčešće zapadnih pojaseva prokletjsko-šarskih. One su nastanjene u letnjoj polovini godine, za vreme ispaše stoke. To su letni *stanovi* na istočnim Prokletijama i *bačila* na Šar-planini. Po vertikalnoj položenosti, ova kategorija naselja predstavlja najviši tip naseljenosti uopšte u Pokrajini Kosovo. Slične, ali mnogo niže ploštene su barake za smeštaj radnika — drvoseča, takođe u šumskim predelima Prokletija, kao i stanovi radnika u hidrocentralama (Kožnjer, Dikance).

Posebni, neprivredni tip visokih naselja namenjeni sportu (planinarenju) predstavljaju planinarski domovi rasuti na Prokletijama i Šari.

TCHASIM LLECHI,

CLASSIFICATION ET TYPISATION DES HABITATS DU PROVINCE SOCIALISTE AUTONOME DE COSOVO

R é s u m é

Le travail comporte deux grandes chapitres: l'analyse quantitative et qualitative des agglomérations de cette région.

Dans le premier chapitre on a élaboré les questions suivantes: la densité des habitants par superficie (hn/1 km²), le nombre des localités par l'unité de superficie (1/100 km²), le nombre moyen des gens par un habitation. Toutes ces données sont comparées avec les autres républiques de la Yougoslavie, afin qu'on voit les différences entre cette région et les autres contrées du pays.

La province de Cossovo est une contrée la plus épaisse habitée de la Yougoslavie (114 habitants par 1 km². en 1970; la densité moyenne est actuellement 80 hn./1 km²). Aussi le Cossovo a le plus grand nombre des localités par 1 km² (13,4) en excluant la République socialiste de Slovenie. Le dernier paramètre de comparaison est le nombre moyen des gens par 1 habitation. En cette sens, avec 859 habitants par une localité, le Cossovo est parmi les contrées moyennes. Enfin on présente le table général de tout les données si desus en partageant le Cossovo en 8 régions et 20 subregions.

Le sous-chapitre suivant est dédié à des relations entre les habitat urbains et rurales de Cossovo, en comparant avec les autres républiques du Yougoslavie. On a dégagé dans ce sens le niveaux très faible de taux d'urbanisation de contrée (25,2% en 1970), malgré le fait que le Cossovo a été forcé au point vue de developement économique et social après la guerre, notamment à partir de 1957.

Le deuxième grand chapitre comporte les caractéristiques qualitatives des habitat de Cossovo. Premièrement ils ont élaborés les habitat urbains: leurs caractéristiques socio-économiques, la classification étroite selon la participation des activités tertiaires et quaternaires et, enfin, la typisation des habitat urbains et urbanisés.

La classification générale au point vue socio-économique a decouvert les différences des centres urbaines selon les trois activités principales (primaire, secondaire et tertiaire). Le souschapitre suivant est la classification étroite des habitat urbains, en partageant les villes et les autres localités urbanisées en 6 categories.

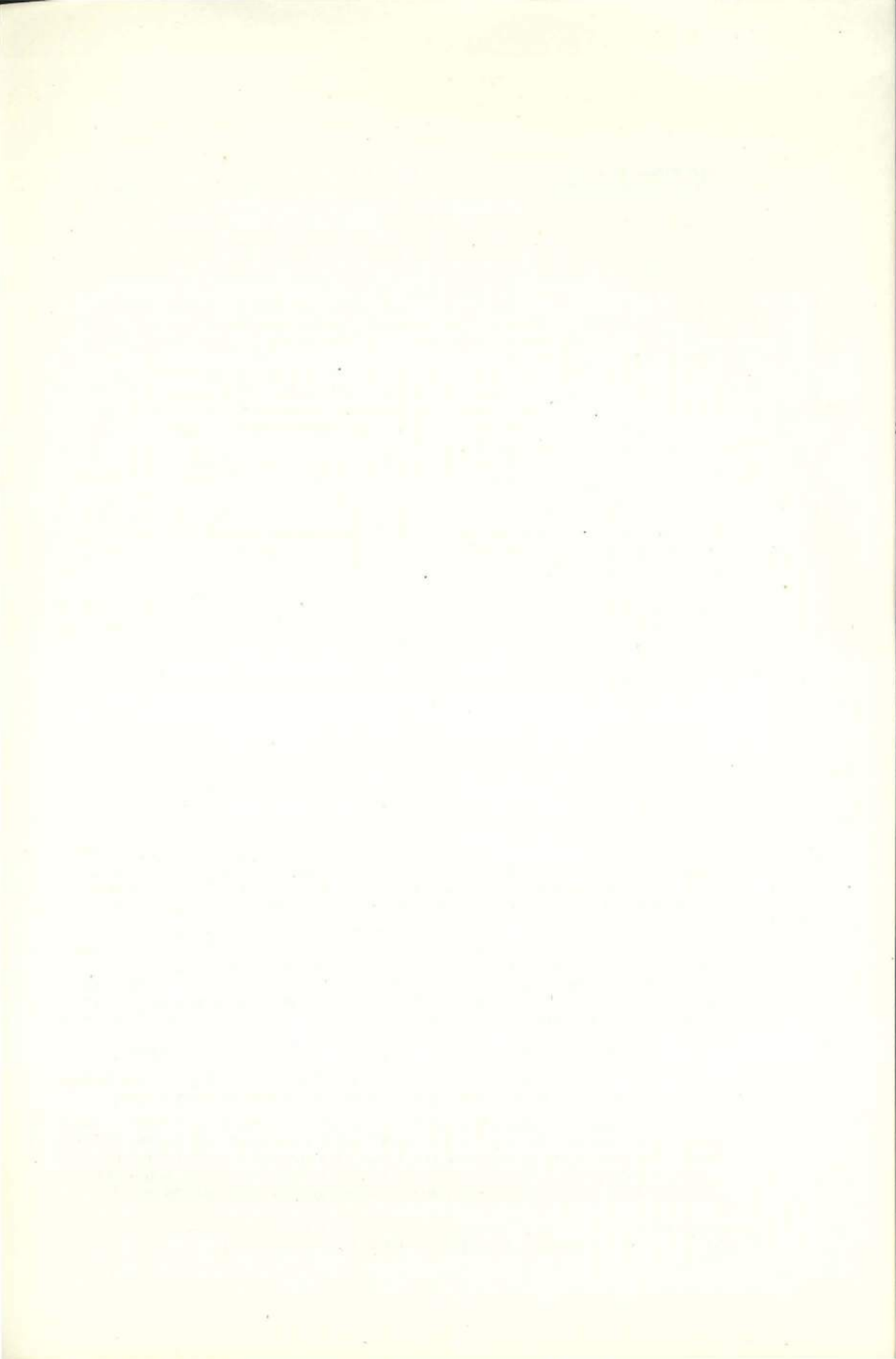
⁹⁾ K. Riistić, Kolonizacija i kolonistička naselja u ravni Kosova, Gl. SGD, Sv. 38 br. 2, (Beograd), 1958, 133.

Le dernier, troisième sous-chapitre comporte les types des habitat urbains et urbanisé (au total 30) en partageant en six: I.-centres régionaux (au total 7), II-centres subrégionaux avec subdivision en trois variantes (tout compris 10 localités), les centres administratifs (6), les point importants — localités en carrefours des routes (3), les centres industriels et mineurs (2) et les agglomérations rudimentaires avec 2/3 de population nonagricol (2).

Dans le chapitre suivant, „*les habitats rural (nonagraire et agraire)*”, les habitat rural de type nonagricol ont catégorise en cinq ordre.

Premièrement est envisagé le phénomène d'aparation des habitat periurbain caractérisé par une économie mélange: agricole et les membres particulier qui occupe un poste de travail en ville proche — soit en industrie ou les services. Ce phénomène est exclusivement d'après guerre et lié avec les villes plus grandes et avancé (7 centres regionaux). Deuxième ordre d'habitat rural nonagricol est crée en contre d'exploitation minière, notamment en Cossovo au sens du mot plus étroit; troisième et quatrième ordre d'habitat est né des eaux minérales et les bains aériens ainsi que les habitats-baignoirs, et, enfin, le cinquième ordre d'habitat rural en point-carrefours importants des routes et voies de chemin de fer.

Les habitat agraires ont partage selon les types en dispersée et concentrée. On a constaté que la dispersion d'habitat en Cossovo, que est la forme très répandue lié avec les façons morphologiques de relief, en conditionnant celui-ci d'une économie extensif, assez présente dans des régions montagneuse notamment.



KOVILJKA STANKOVIĆ-TOMIĆ

PRIOLOG POZNAVANJU LIVADSKE VEGETACIJE MOKRE PLANINE II (Kosovo)

Padine Mokre planine strmo se spuštaju prema dolini rijeke Ibra. Na njima se nalazi veći broj manjih livada (proplanci), koje se mozaički smjenjuju sa sastojinama šumske vegetacije. To je pojas montane bukove šume, koja se prostire od Vraže glave preko Kapka, Berima i Mededaka, a prema Crnoj rijeci prelazi u miješanu šumu bukve, smreke i jele. U ovom pojasa šumske vegetacije na nadmorskoj visini od 1200 do 1600 m razvila se vegetacija livada, koja je na osnovu florističkog sastava i ekoloških uslova izdvojena u novu zajednicu *Festuco-Pančićietum* čije je rasprostranjenje označeno na priloženoj karti.

Floristički sastav zajednice

Floristička građa zajednice *Festuco-Pančićietum* prikazana je na tabeli sa 20 fitocenoloških snimaka uzetih sa ovih mjesta ispitivanog područja:

1. Mijačića dolovi iznad sela Velika Kaludra, snimke 1—3. Livade se nalaze na 1400—1600 m nadmorske visine u gustim sastojinama bukove šume. Tlo je duboko, vlažno i kiselo, 8. VIII 1967; 18. VII 1968.

2. Banjski dolovi iznad Velike Kaludre, snimke 4—7. Sastojine zajednice nalaze se na 1200—1400 m nadmorske visine, takođe, u gustom bukovoju šumi. Tlo je kao u gore navedenim sastojinama, 18. VII 1968.

3. Žar livada prema selu Čečevu, snimke 8—9. U jako degradiranoj, bukovoju šumi livade su veće, na nadmorskoj visini oko 1300 m. Tlo je jače isprano, plitko i kiselo, nagiba oko 20°, 18. VII 1968.

4. Štit livada u Čečevu, snimke 10—11. Livade se nalaze u degradiranoj bukovoju šumi na nadmorskoj visini oko 1300 m. Tlo je plitko, suvo i kiselo, nagiba oko 20°, 17. VII 1968,

5. Klekovac livada iznad sela Čečevo, snimke 12—14. Livade se nalaze u niskoj bukvoj šumi na nadmorskoj visini 1200—1500 m. Tlo je kiselo, duboko i srednje vlažno, 13. VI 1966; 17. VII 1968.

6. Previja čečevska (brdo između sela Čečeva i Brnjaka), snimke 15—16. Sastojine zajednice se nalaze u niskim šumarcima bukve na nadmorskoj visini oko 1200 m. Tlo je srednje duboko, kiselo, nagiba oko 20°, 11. VI 1967.

7. Preseka iznad sela Brnjaka, snimke 17—18. Sastojine zajednice se nalaze u vrlo degradiranoj šumi bukve na nadmorskoj visini od 1200 do 1500 m. Tlo je plitko, kiselo, nagiba oko 25°, 16. VII 1968.

8. Jelje iznad Crne rijeke, snimke 19—20. Livade se nalaze u miješanoj šumi bukve, jele i smreke na nadmorskoj visini oko 1400 m. Tlo je duboko, vlažno i kiselo, 15. VII 1968.

Zajednica *Festuco-Pančićietum* karakterizirana je ovim vrstama: *Astrantia elatior*, *Trifolium velenovskyi*, *Knautia midžorensis*, *Trifolium panonicum* i *Campanula cervicaria*. Navedene karakteristične vrste u zajednici su stalne ali im je pokrovnost neznatna. Izuzetak je jedino vrsta *Astrantia elatior*, koja u velikom broju sastojina gradi facijese.

Komparacijom zajednice sa livadskom vegetacijom ostalih krajeva naše zemlje utvrđeno je da asocijacija *Festuco-Pančićietum* na Mokroj planini pripada endemičnoj svezi *Pančićion* Lakušić 1944, srednjeevropskom redu *Arrhenatheretalia* Pawl. 1928. i razredu *Arrhenatheretea* Br.-Bl. 1947. Sveza *Pančićion* i red *Arrhenatheretalia* u ovoj zajednici su karakterizirani sa većim brojem vrsta (21) od kojih asocijaciju grade vrste: Tercijerni endemorelikt *Pančićia serbica*, zaštim *Festuca fallax*, *Agrostis capillaris*, *Rhinanthus rumelicus* i *Polygala maior* f. *azurea*.

Razred *Arrhenatheretea* u zajednici *Festuco-Pančićietum* karakteriziran je sa 23 vrste, uključujući i transgresivne karakteristične vrste zajednica podređenih razredu, od kojih su najstalnije vrste: *Leucanthemum vulgare*, *Vicia cracca*, *Anthoxanthum odoratum*, *Plantago lanceolata* i *Briza media*. U suvljim sastojinama zajednice nalaze se često elementi razreda *Festuco-Brometea*, među kojima su najupadljivije i najstalnije vrste: *Anthyllis vulneraria*, *Sanguisorba minor*, *Danthonia calycina* i *Plantago media*.

U asocijaciji se nalazi i veliki broj pratilica od kojih su stalnije vrste: *Genista sagittalis*, *Nardus stricta*, *Helianthemum mummularium* var. *discolor*, *Primula columnae* i *Veratrum lobelianum*. Sastojine zajednice na kojima se trpaju sijena, ili se zimi polaže stoci, imaju vrlo heterogen floristički sastav, jer se u njima nalaze razne korovne i ruderalne vrste. Oko izvora, kojih ima skoro na svakoj livadi, tlo je barovito i tu se nalaze razne močvarne i tresetne biljke, od kojih su najčešće: *Holcus lanatus*, *Equisetum palustre*, *Orchis* sp., *Carex* sp., *Pinguicula leptoceras* i dr.

Asocijacija *Festuco-Pančićietum* vrlo je srodna sa livadskom zajednicom Bjelasice, *Ranunculo-Pančićietum montenegrinum* (Lakušić 1964). Zajednice su srodne floristički, po ekologiji staništa, rasprostranjene su približno

na jednakim nadmorskim visinama u zoni montane bukove šume, odnosno miješane šume bukve, jele i smreke. Pored navedene srodnosti zajednice se razlikuju i velikim brojem diferencijalnih vrsta.

Diferencijalne vrste asoc.

Festuco-Pančićietum:*Trifolium velenovsky**Campanula cervicaria**Knautia midžorensis**Rhinanthus rumelicus**Tragopogon orientalis**Colchicum autumnale**Malva moschata*

Diferencijalne vrste asoc.

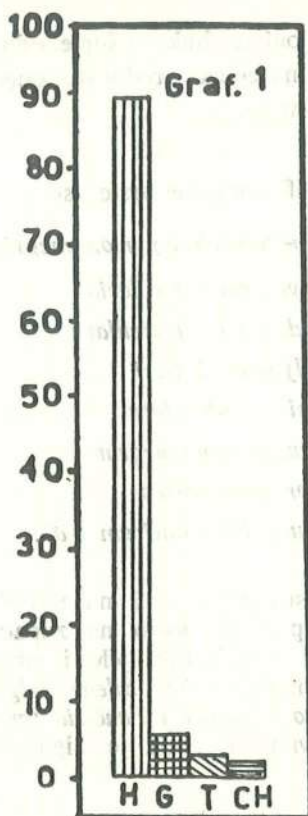
Ranunculo-Pančićietum montenegrinum:*Phyteuma orbicularia**Pedicularis verticillata**Polygala dörfleri**Jasione orbiculata**Knautia montenegrina**Scorzonera rosea**Meum athamanticum* i dr.

Zajednica *Festuco-Pančićietum* rasprostranjena je i na susjednim područjima Mokre planine. Rudski je ovaj tip livade uočio na zapadnim padinama Oklačkih glava (1932). u miješanoj šumi bukve, jele i smreke. Kao najčešće vrste u livadama ovoga tipa pominje vrste: *Silene vulgaris*, *Silene sendtneri*, *Trifolium montanum*, *Sanguisorba minor* i *Pančićia serbica*, za koju kaže da jako dominira nad ostalim vrstama i da je nigdje nije vidio u većoj količini i bujnije razvijenu.

Životne prilike i razvitak zajednice

Geološku podlogu zajednice *Festuco-Pančićietum* na Mokroj planini čine trijaski krečnjaci. To su pretežno brdske livade zaklonjene od jakih vjetrova. Tipične zastojine sajednice nalaze se na vlažnom i dubokom šumskom tlu, kao što su livade iznad Velike Kaludre. Tlo je kiselo jer ga ispiraju padavine i mnogobrojni izvori kojima je planina bogata. Ovo je hladniji tip livade, čije su sastojine većinom eksponirane prema sjeveru i sjeverozapadu, što potvrđuje i spektar životnih oblika zajednice (H—89%, G—6%, T—3%, Ch—2%, graf. 1). To je hemikriptofitska zajednica čije su vrste prilagođene na hladno i vlažno stanište, dok je ostalih životnih oblika neznatan broj.

U vrijeme jakih padavina, naročito u proljeće kada se topi snijeg, voda spira humns iz okolnih šuma i nanosi ga na livade. Da bi se na ovaj način livade što bolje gnojile, stanovnici ovoga područja često kopaju plitke kanale kojima dovode vodu iz šuma na livade. Tamo gdje zbog reljefa ovaj prirodni proces gnojenja nije moguć, tlo je isprano, plitko i



jako kiselo. U takve sastojine zajednice obilno prodira tipač (*Nardus stricta*), koji istovremeno ukazuje na regresivni razvitak zajednice. Livade se kose jedanput godišnje, u julu ili avgustu što zavisi od toga da li je ljeto suvo ili kišovito. Doprinos livada bi zadovoljio kada bi se gnojile bilo vještački ili prirodno šumskim humusom, jer bi se na taj način spriječila degradacija tla i zajednice.

Asocijacija *Festuco-Pančićietum* je antropogena zajednica koja je nastala sječom bukove šume i miješane šume bukve, jele i smreke. Po površini sastojine livada su male, ali su floristički potpuno izdiferencirane jer se većina njih kose više od 100 godina. Ukoliko se šuma sasvim iskrči, prirodni proces gnojenja livada će prestati, padavine će isprati tlo i asocijacija će se degradirati u suvlji tip livade sa vrstom *Nardus stricta*, što se može već uočiti u nekim sastojinama zajednice.

KOVILJKA STANKOVIČ-TOMIĆ

BEITRAG ZUR KENNTNIS DER WIESENVEGETATION VON
MOKRA PLANINA II

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die Abhänge von Mokra planina um Medvedak, Berim, Kapak und Vražja Glava sind von dichtem, montanem Buchenwald bewachsen. In dieser Zone an Übermeereshöhe, von 1200—1600 m hat sich eine wiesenvegetation entwickelt, die auf Grund ökologischer Faktoren und floristischer Zusammensetzung in eine neue Gesellschaft *Festuco-Pančičietum* ausgesondert wurde.

Floristischer Bau der Gesellschaft wurde auf der beigelegten Tabelle mit 20 phytözönologischen Aufnahmen dargestellt. Die charakteristischen Arten der Gesellschaft *Festuco-Pančičietum* sind: *Astrantia elatior*, *Trifolium velenovskyi*, *Knautia midžorensis*, *Trifolium pannonicum* und *Campanula cervicaria*. Die Gesellschaft ist dem endemischen Verband *Pančičion* Lakušić 1964, der mitteleuropäischen Ordnung *Arrhenatheretalia* Pawl. 1928, und der Klasse *Arrhenatheretea* Br. Bl. 1947, unterordnet.

Das geologische Substrat der Gesellschaft *Festuco-Pančičietum* bilden Trias-Kalksteine. Dies sind vorwiegend Talwiesen geschützt vor starken Winden. Die Gesellschaft bedeckt den tieferen, feuchteren und saueren Waldboden.

Zur Zeit starker Regen, insbesondere im Frühling bei der Schneeschmelze spült das Wasser den Humus aus den Wäldern ab und lagert ihn auf die Wiesen an. An stellen, wo wegen des Reliefs dieser Prozess von natürlicher Oungung nicht möglich ist, ist der Boden ausgewaschen und sehr sauer. In solchen Beständen dringt reichlich die Art *Nardus stricta* ein, die auf einen regresiven Prozess der Gesellschafts entwicklung hinweist.

Die Assoziation *Festuco-Pančičietum* ist eine antropogene Gesellschaft, die auf Mokra planina durch das Fällen von Buchen wäldern entstand. Die Wiesen sind klein, doch sind sie floristisch völlig ausdifferenziert, da sie seit mehr als 100 Jahre lang abgemäht werden. Die Gesellschaft wird neben der regelmässiger Mähd noch durch den natürlichen Humusdunger erhalten. Werden aber die die Wälder ausgerodet, so wird die Assoziation in einen trockeneren Wiesentypus mit der Art *Nardus stricta* degradieren, was bereits an einigen Beständen der Gesellschaft ersichtlich ist.

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

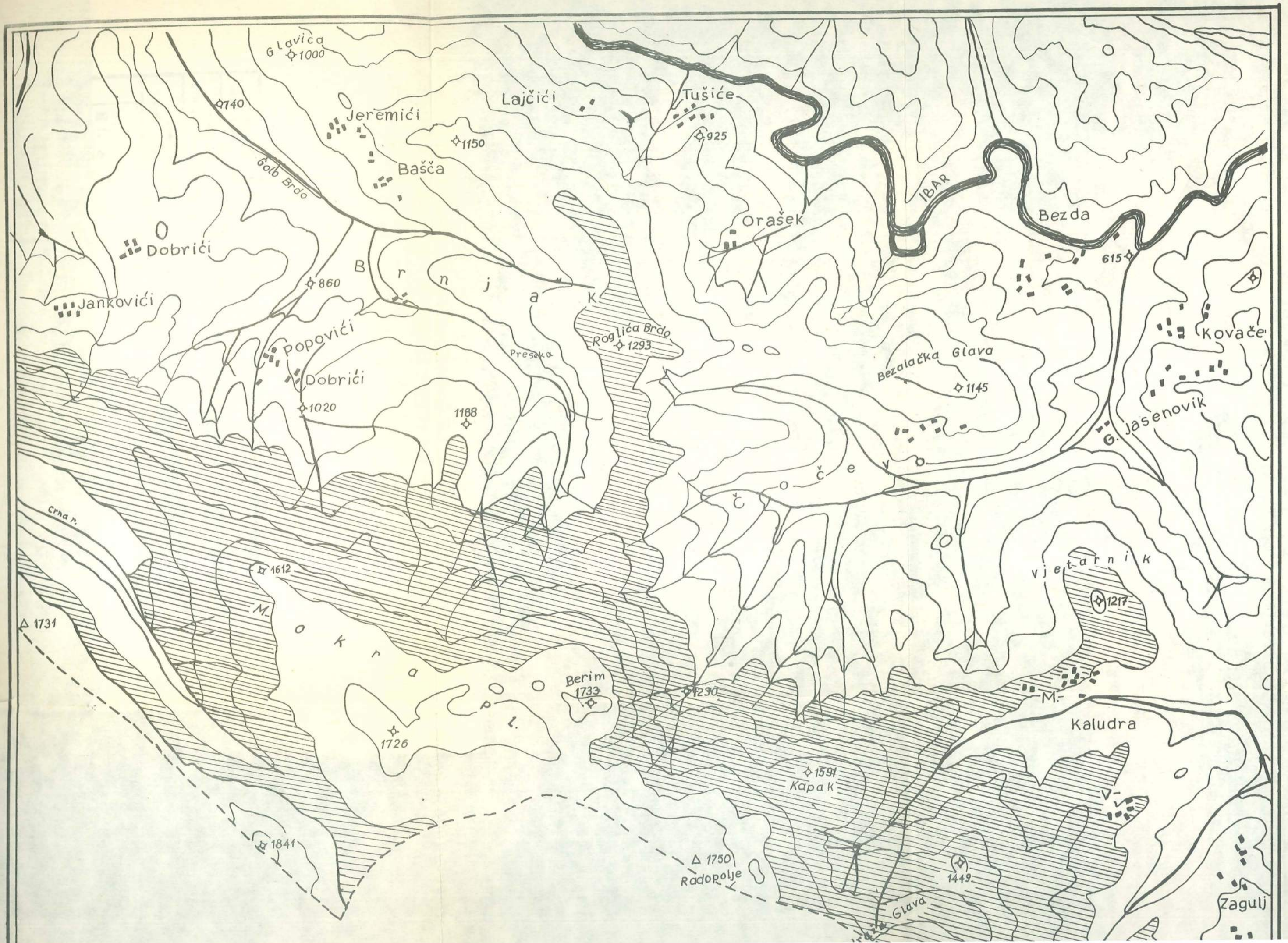
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...



[illegible]