



УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ

УНИВЕРЗИТЕТСКА
мисао

ПРИРОДНЕ НАУКЕ

VOL. 1, Nº 1, 1994.

ИЗДАЈЕ УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ, СРБИЈА, ЈУГОСЛАВИЈА

ISSN 0354 - 3951

УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ

УНИВЕРЗИТЕТСКА МИСАО

Часопис за природне науке
година I, број 1, 1994.

Главни и одговорни уредник

Проф. др Миодраг Јаблановић

Заменик главног и одговорног уредника

Проф. др Љубомир Ристић

Чланови уређивачког одбора

Проф. др Радивоје Пајовић

Проф. др Сиван Баљошевић

Проф. др Момчило Којић

Проф. др Слободан Ковачевић

Проф. др Слободан Живковић

Проф. др Љубомир Шћејановић

Проф. др Слободан Глигоријевић

Проф. др Томислав Ђокић

Проф. др Миомир Ристић

Доцент др Ивица Перић

Мр Лидија Ђорђевић

Секретар

Проф. др Камилица Косановић

Ликовно-технички уредник

Проф. др Брајислав Мирић

Компјутерска обрада текста

Електротехнички факултет у Приштини

Штампа

НИЈП "Панорама", Штампарија "Грачаница", Приштина

Тираж

200 примерака

Издаје

Универзитет у Приштини

Видовданска б.б.

38000 Приштина, Југославија

Ex Libris
Dr Predrag Jakšić

САДРЖАЈ

- 1 **Екологија неких врста рода CROCUS L. као биоиндикатор мезо и микроклиматских услова у Грбајској долини**
Лидија Амиџић, С. Белиј
- 9 **Утицај акутне интоксикације оловом на активност каталазе и трансминазе, садржај холестерола и време коагулације крви код пацова**
Катица.Максимовић - Косановић и С. Милошевић
- 13 **Periphyton algae glacial Livadicko lake of Sara mountain**
Violeta Urošević
- 21 **The Method of Pejović and double transformations**
M. Vučković, N. Rosić
- 29 **Reflector-absorber system with rays that fall perpendicularly to absorber**
R. Nikolić
- 33 **Одређивање фокусирајућег огледала заштићеног провидном план-паралелном плочом**
Р. Николић
- 39 **Матричное представление циклов плоскости H_z**
Ћ. Долићанин, Гордана Николић, М.Стефановић
- 43 **Мерење концентрације радона у становима**
Б.Јакупи, П. Васић, Ф. Адровић
- 47 **A note on the Frank model for chiral stereoselection**
I. Gutman

Екологија неких врста рода *Crocus* L. као биоиндикатор мезо и микроклиматских услова у Грбајској долини

Лидија Амиџић, С. Белиј

Одсек за биологију и одсек за географију природно-математичког факултета
Универзитета у Приштини, 38000 Приштина, Југославија

Захваљујући генетичком наслеђу које одражава релативну константност грађе и функције, али омогућава и знатну фенотипску пластичност ради што боље адаптираности, биљне врсте и њихове заједнице настају у веома варијабилним условима окружујуће средине. Њихове животне манифестације у великој мери осликавају пре свега, климатске утицаје који су веома променљиви у простору и времену. Проучавајући неке еколошке специфичности врста *Crocus vernus* Hill., *C. albiflorus* и *C. tommasinianus* Herb. у Грбајској долини, покушали смо да установимо у којој мери мезо и микроклиматски услови утичу на њих и у ком обиму њихови адаптивни одговори осликавају климатске прилике на станишту.

Увод

Већина структуралних и функционалних адаптација биљака је у највећој мери детерминисана генетским наслеђем које помоћу сложених механизма одржава њихову релативну стабилност упркос варијабилним условима средине. Међутим, организми се не могу посматрати ван њихове средине. Под дејством комплексних спољашњих утицаја делују и механизми који омогућавају биљкама и њиховим заједницама промене које су у већем или мањем степену у складу с променама средине. Фенотипска пластичност као способност генотипа да буде промењен под дејством различитих срединских утицаја, посебно је изражена код биљака. Код њих због потребе да остану прилагођене на врло специфичне услове свог окружења не постоји "фиксиран детаљан план" развића, већ нека врста "општег плана игре" - скуп оперативних инструкција чије коришћење зависи од срединских сензитивних хормонских сигнала (Туџић, 1987).

Климатски фактори као веома нестабилни у простору и времену, имају посебно велики утицај на биљке и њихове заједнице. Испољавајући велику међуусловљеност и комплексност деловања они су врло варијабилни чак и у оквиру истог биотопа производећи различите микроклиматске варијанте. Реагујући на микроклиматске разлике у оквиру истог биотопа, биљке испољавају структуралне и функционалне адаптивне одговоре који могу бити прецизни биоиндикатори микроклиматских утицаја.

Полазећи од ове чињенице, проучавали смо извесне еколошке карактеристике врста *Crocus vernus* Hill., *Crocus albiflorus* Kit. *Crocus tommasinianus* Herb. у Грбајској долини у време изразитих и наглих промена мезо и микроклиматских услова. Интересовала нас је у којој мери ова група сферида својим животним манифестацијама осликава тренутно стање комплексног деловања врло променљивих микроклиматских утицаја.

Материјал и методика

За одређивање општих климатских прилика на ширем подручју Грбајске долине прикупљени су сви постојећи подаци из најближих метеоролошких станица и урађено је њихово математичко моделовање на вертикалним профилима Рожаје-Русолија, Ивањград-Хајла, Гуспње-Бјелч и Плав-Крш Богичевице.

Микроклиматска мерења су обављена 24., 25., 26. и 27. априла 1992. године од 8 до 18^h, и за тај период су утврђене средње вредности. Интензитет осветљености је читаван lux-метром, температура ваздуха дигиталним термометром, релативна влажност ваздуха дигиталним хигрометром, температура замљништа коленастим геотермометрима, влажност земљништа стандардном методом његовог сушења. Величина појединих биљних делова је мерена шублером. Из сваке популације је измерено по 50 биљака.

Количина укупне воде у листовима, водни дефицит и транспирација су одређивани током истих дана у истим временским интервалима као и микроклиматски фактори. Процентуална заступљеност укупне воде је израчунавана из разлике у тежини свежих листова и листова осушених до константно суве тежине. Водни дефицит је одређиван из разлике у тежини одсечених листова и листова који су 24^h третирани дестилованом водом. Интензитет транспирације је мерен моментном Штокеровом методом (Stocker, 1929).

Резултати рада и дискусија

Једна од дубоких долина која рашчлањује проклетички масив је Грбајска долина. Она се наставља на јужно залеђе Плавско-Гусњске долине. Грбајска долина лежи између цинковских Каранфила (2480 м) и нешто питомије Вољушнице с Караулом (1915 м). У давној геолошкој прошлости плитка речна долина, током леденог доба продубљена је грбајским ледником и морфолошки веома измењена. Ледник дебљине 150-200 м кретао се из циркова (данас на Албанској територији) долином ка северу продубљујући је и ширећи је. Дуж планинских гребена који уоквирују Грбајску долину формирали су се бројни циркови и висећи ледници који су се уливали у главни Грбајски ледник, кретали даље ка излазу из долине и главној маси Плавског ледника. Због тога је данас Грбајска долина знатно проширена, заравњеног дна и стрмих страна.

Иако у ближој околини не постоји метеорошка станица која би указала на опште климатске одлике, вишегодишња теренска истраживања и осматрања, као и математичко моделовање главних климатских показатеља, омогућили су нам да сагледамо главне одлике климе Грбајске долине, посебно у пролећном периоду. Расположиви подаци, али и надморска висина (1100-1200 м), општа експонираност ка северу и присуство екосистема антропогенно деградираних листопадних шума букве и јавора (*Aceri visianii-Fagetum moesiaca subalpinum* Лакушић ет ал. 1983), указују да у Грбајској долини доминирају елементи континенталне климе који су под знатним утицајем планинског залеђа. Средња годишња температура је 7 °C, минимална до -30 °C, максимална до +30 °C, средња годишња количина падавина износи 1700 мм, средња годишња релативна влажност ваздуха је око 70% а сумарно испаравање близу 500 мм/год., што условљава високу приступачну влагу и биопродукцију.

Зимски климатски услови се у долини протежу до друге половине или до краја априла. Почетак вегетационе периоде се одликује наглим порастом температуре ваздуха која условљава брзо отапање дебелог снежног покривача. Микроклиматска мерења која смо обавили у априлу 1992. год илустративно говоре о наглим променама временске ситуације у долини крајем априла, и о брзом прелазу зимских у повољне пролећне услове (таб.1., граф. 1., 2., 3., 4., и 5).

Од 24. априла, када је снег још увек покривао добар део долине, па до 27. априла, када је у долини владало право пролеће, максимална осветљеност се повећала за 15370 lux-a, температура ваздуха на висини од 10 цм за 7.39 °C, а на висини од 100 цм за 8.97 °C, температура земљишта на дубини од 10 цм опала за 10.28 °C. У исто време релативна влажност ваздуха је на висини од 10 цм опала за 7.92%, а влажност земљишта на дубини од 10 цм за чак 52.80%, што указује на велику водопропустљивост кречњачке геолошке подлоге.

Наша вишегодишња посматрања су показала да при оваквим наглим променама временске ситуације долази до цветања биљака из рода **Crocus L.** чиме отпочиње вегетациона периода.

У Грбајској долини су присутне три врсте из рода **Crocus**: **C. vernus Hill.**, **C. albiflorus Kit.** и **C. tommasinianus Herb.** (сл.1). По литерарним подацима **C. vernus** се најчешће срећеу буковим, буково - јеловим и боровим шумама, на алпјским ливадама, шумским сечинама. Припада централно-европском флорном елементу (Ранђеловић, 1990). **C. albiflorus** који припада источно-пиринејско-алпско апенинско-илирском флорном елементу, углавном насељава влажне ливаде, долине, увале и вртаче у предалпјском и алпјском појасу (Braian, 1982). **C. tommasinianus** који представља илирски флорни елемент (Гајић, 1980), се углавном среће по светлим проређеним шумским чистинама и сечинама (Ранђеловић, 1990).

У Грбајској долини популације врста **C. vernus** и **C. albiflorus** су доминантне крајем априла густо прекривајући велике долине површине. Популација врсте **C. tommasinianus** је најмалобројнија и најређа. **C. albiflorus** заузима закошене делове долине где се снег најбрже топи и где је влажност земљишта најмања. **C. vernus** а посебно, **C. tommasinianus** се углавном налазе у долинским депресијама где се снег дуже задржава и где иза његовог отапања има више влаге. Овакав распоред популација **Crocus-a** указује да дужина задржавања снежног покривача и влажност земљишта имају важну уло-

гу у дистрибуцији сваке од врста у долини. Према распореду популација може се закључити да **C.albiflorus** има највећи степен толеранције према условима влажности, али да је и вероватно термо филнији у односу на две друге врсте пошто заузима падине које се на крају зиме најбрже загревају услед брзог отапања снега на њима.

Таб.1. Дневна динамика осветљености, температуре ваздуха, релативне влажности ваздуха, температуре и влажности земљишта у Грбајској долини од 24. до 27. априла 1992. год.

ОСВЕТЉЕНОСТ (LUX)	24.04.1992.	25.04.1992.	26.04.1992.	27.04.1992.
0 cm	48963	38150	59670	59000
10 cm	48230	37333	59580	62166
50 cm	47259	38000	61750	62333
100 cm	57130	49000	74083	73500
ТЕМПЕРАТУРА ВАЗДУХА (°C)				
5 cm	10.32	13.67	18.43	19.12
10 cm	11.46	13.50	18.33	18.85
50 cm	10.13	12.50	17.72	18.55
100 cm	9.81	11.77	17.10	18.78
РЕЛАТИВНА ВЛАЖНОСТ ВАЗДУХА (%)				
5 %	46.62	38.28	42.62	40.33
10 %	45.94	36.90	41.67	38.02
50 %	41.76	35.43	38.43	35.13
ТЕМПЕРАТУРА ЗЕМЉИШТА (°C)				
0 cm	0.47	16.17	20.70	23.42
- 2 cm	3.05	8.57	15.95	16.05
- 5 cm	0.70	8.28	13.32	13.92
- 10 cm	0.95	4.38	10.48	11.23
ВЛАЖНОСТ ЗЕМЉИШТА (%)				
0 cm	97.25	73.77	71.96	64.49
- 10 cm	96.45	64.65	46.11	43.65
- 20 cm	95.60	47.13	31.24	28.62

Таб.2. Екстремне вредности величине појединих биљних органа врста **C. albiflorus**, **C. vernus** и **C. tommasinianus**

	C. albiflorus	C. vernus	C. tommasinianus
ВИСИНА БИЈАКА (цм)	83.0 - 110.4	86.3 - 151.3	95.5 - 172.0
ДУЖИНА ПЕРИГОНА (цм)	67.4 - 123.8	77.7 - 133.1	87.0 - 143.4
ДУЖИНА ЛИСТОВА (цм)	59.4 - 104.9	47.6 - 109.5	71.5 - 115.5
ВИСИНА ЛУКОВИЦА (цм)	3.4 - 8.6	5.2 - 13.7	5.9 - 15.9
ШИРИНА ЛУКОВИЦА (цм)	7.9 - 10.6	5.1 - 12.3	8.0 - 17.7



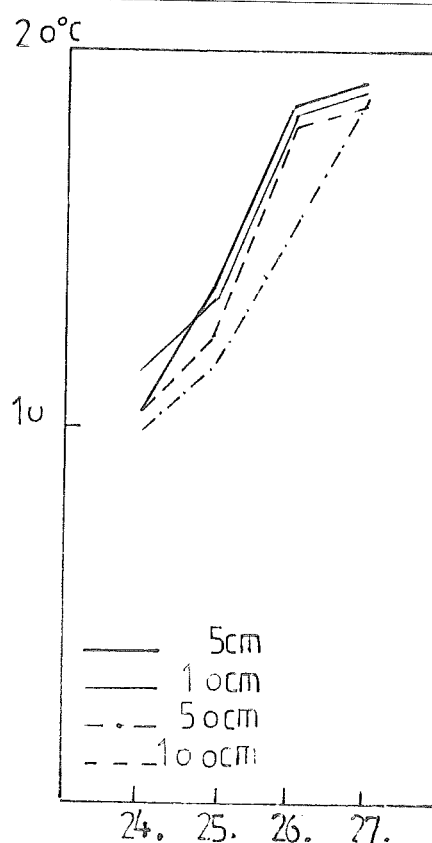
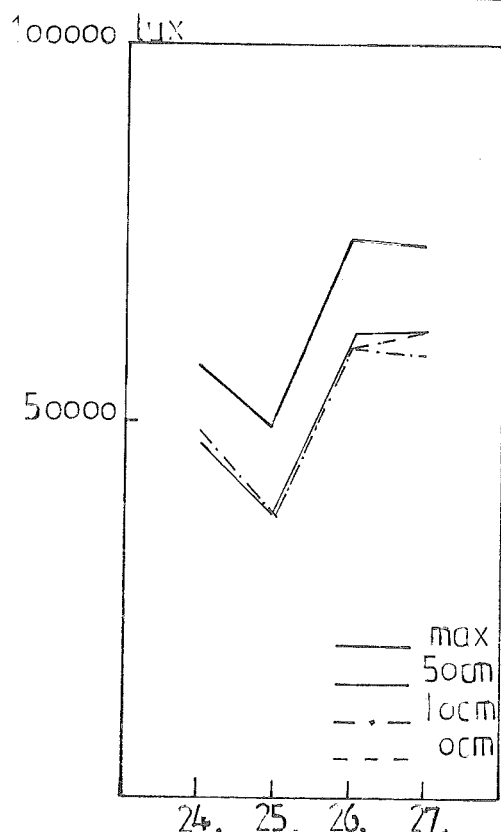
Сл. 1. *Crocus tommasinianus* Herb., *Crocus vernus* Hill. и *Crocus albiflorus* Kit.

Таб. 3. Просечне величине појединих биљних органа врста **C. albiflorus**, **C. vernus** и **C. tommasinianus**

	C. albiflorus	C. vernus	C. tommasinianus
ВИСИНА БИЉАКА (cm)	97.35	102.10	132.77
ДУЖИНА ПЕРИГОНА (cm)	80.54	90.73	121.17
ДУЖИНА ЛИСТОВА (cm)	83.20	65.60	88.13
ВИСИНА ЛУКОВИЦА (cm)	6.94	8.80	9.37
ШИРИНА ЛУКОВИЦА (cm)	9.23	9.58	11.17

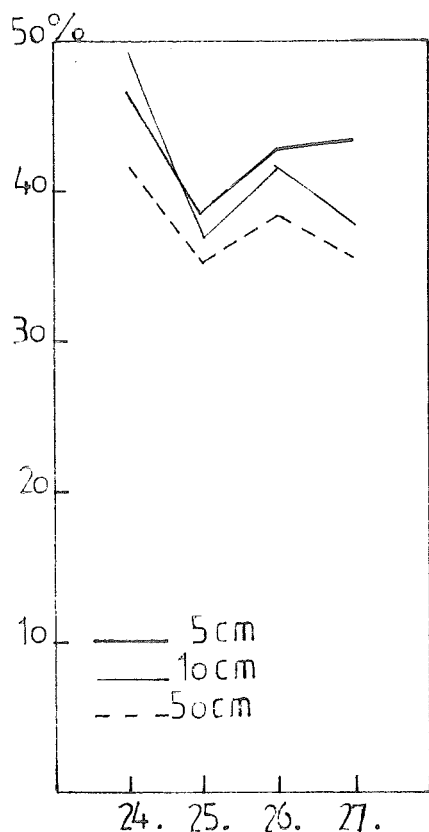
Таб.4. Средње дневне вредности количине укупне воде у листовима, водног дефицита и транспирације код врсте **C. vernus**

	24.04.1992.	25.04.1992.	26.04.1992.	27.04.1992.
УКУПНА ВОДА (%)	86.23	80.73	77.31	64.06
ВОДНИ ДЕФИЦИТ (%)	2.67	8.36	12.31	16.85
ТРАНСПИРАЦИЈА мг/г мин	23.69	22.98	25.31	22.40

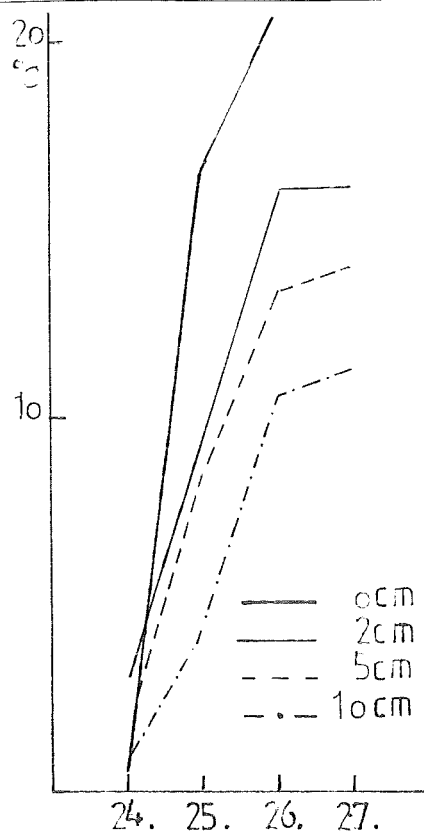


Граф.1. Средње дневне вредности освешљености од 24. до 27. априла 1992. Граф.2. Средње дневне вредности шемирашуре ваздуха од 24. до 27. априла 1992.

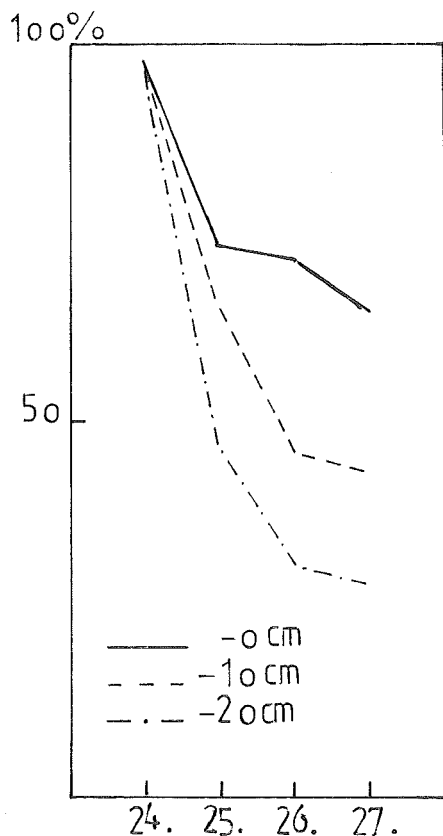
24. априла, када је у долишким депресијама било још снега, око 80% биљака из популација све све три врсте је било у пуном цвату. Највеће биљке, са најкрупнијим цветовима у оквиру сваке популације су се налазиле на местима где се најдуже задржао снег и где је у земљишту остало највише влаге иза њаговог отапања. Истовремено, у највећем броју случајева, најкрупније цвеве у ок



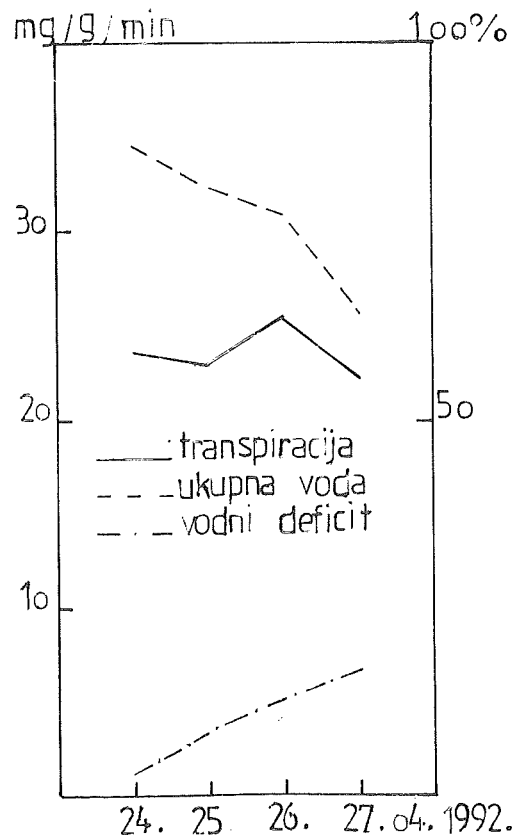
Граф.3. Средње дневне вредности релативне влажности ваздуха од 24. до 27. априла 1992.



Граф.4. Средње дневне вредности температуре земљишта од 24. до 27. априла 1992.



Граф.5. Средње дневне вредности влажности земљишта од 24. до 27. априла 1992.



Граф.6. Средње дневне вредности транспирације, укупне воде у листовима и водног дефицита од 24. до 27. априла 1992. год.

виру сваке од популација су имале оне биљке) које су (Таб.2), оформиле пупољке под снежним покривачем. Снег штити ове биљке од ниских температура у јувенилним фазама њиховог развића када се формирају пупољци и омогућава им да избегну температурне стресове који иначе ремете нормално одвијање физиолошког процеса.

Упоређење просечних вредности димензија појединих делова биљака (таб. 3), показује да су најкрупније биљке из популације врста **C. tommasinianus**. Заузимајуће највлажније долирске депресије оне достижу највећу просечну висину, дужину стуба перигона и листова и имају најкрупније лукавице. Супротно њима, најниже биљке с најситнијим цветовима и луковницама припадају популацији врсте **C. albiflorus** које прекривају најсувље делове долине. Пронистиче да су дистрибуције и неке влажне фенотипске карактеристике у знатно ј мери детерминисане микроклиматским условима, и то превасходно дужином задржавања снежног покривача који има заштитну улогу, влажношћу земљишта и температурним режимом на станишту.

Као важан биондикатор мезо и микроклиматских услова у Грбајској долини послужио нам је водни режим врсте **C. vernus** која по својим морфолошким одлика и захтевима за влагом заузима интермедијерни положај у односу на две друге врсте **Crocus-a**. Регистровали смо да са наглим побољшањем термичких услова које је праћено смањењем влаге у земљишту и ваздуху, укупна вода у листовима ове врсте опада са 86.23%, колико је било 24. априла, на 64.06% (27. априла). Истовремено расте водни дефицит у ткивима листова. Он је 24. априла износио свега 2.67%, а 27. априла већ 16.85% (таб.4., граф.6), што указује на све мању засићеност листова водом. Међутим, и поред рапидног опадања количине укупне воде у листовима које је било праћено растућим водним дефицитом, транспирација је током сва четири дана била веома висока. Ако се погледају резултати микроклиматских мерења, очигледно је да су јака транспирацијска струјања била условљена пре свега интензитетом осветљености које изазива фотоактивно отварање стома (Stalfelt, 1932), и колебањем релативне влажности ваздуха при чијем опадању расту сисајуће силе атмосфере које појачавају дифузију молекула воде. Очигледна недовољна способност ових биљака у регулисању отворености стоминог апарата је резултат њихове адаптираности на услове нешто нижих температура и велике доступне влажности у земљишту у при којој се не мора економисати водним залихама у ткивима. Зато свој биолошки оптимум популације врста **Crocus vernus**, **Crocus albiflorus** и **Crocus tommasinianus** постижу у време непосредно пре наглих климатских промена на током којим долази до погоршања водних односа на станишту.

Пронистиче да захваљујући генетичком наслеђу које одржава релативну константност грађе и функције, али омогућава и знатну фенотипску пластичност у циљу што боље адаптираности на услове средине, популације рода **Crocus** у Грбајској долини у великој мери осликавају услове окружујуће средине. Њихова фенологија, дистрибуција, морфолошки карактери и неки физиолошки процеси могу послужити као прецизни биондикатори мезо и микроклиматских утицаја у долини.

ЛИТЕРАТУРА

- Brian, M. (1982): The crocus. The Crocus. The revision of the Genus Crocus (Iridaceae). B.T. Batsford Ltd. London.
- Гајић, М. (1980): Преглед врста флоре СР Србије са биљногеографским ознакама. Гласник Шумарског факултета. Серија А "Шумарство", бр.54, 11-141. Београд.
- Јанковић, М.М. (1979): Фитологија са основама фитогеографије и прегледом типова вегетације на земљи. Научна књига. Београд.
- Лакушић, Р. (1985): Специфичности Проклетија. Зборник радова Научног скупа "Заштита и унапређење Плавског дијела Проклетија". Плав.
- Randjelovic, N. et al. (1990): The Genus Crocus L. in Serbia. The Serbian Academy of Sciences and Arts. Volume DCI. The Department of Natural and Mathematical Sciences. Vol.66. Beograd.
- Stalfelt, M.G. (1932): Der Stomatare regulator in der pflanzlichen transpiration. Planta 17(1).
- Stocker, O. (1929): Eine Feldmethode zur Bestimmung der momentanen Transpiration und Evaporationsgrösse. Ber. Dtsch. bot. Ges.
- Туцић, Н. (1987): Увод у теорију еволуције. Завод за уџбенике и наставна средства. Београд.
- Wraber, T. (1989): Botanicki izlet v gusinjske Prokletije. 291-297. Proteus. Mladinska knjiga. Ljubljana.

SUMMARY**EKOLOGY OF SOME SPECIES FROM THE GENUS OF *CROCUS* L.
AS A BIOINDICATOR OF THE MESO AND MICROCLIMATIC
CONDITION IN THE GRBAJA VALLY**

Lidija Amidzic and S.Belij

Department of Biology and Department of Geography, Faculty of Sciences, University
of Pristina, 38000 Pristina, Yugoslavia

Grbaja Vally (1100-1200 a.s.l) lies between gigantic Karanfil (2480 m a.s.l) and Volusnica with Karaula (1915 m a.s.l) mountains. The influence of continental climate prevails in the Vally. Winter period ends around mid-april. During that time three types from the Genus of *Crocus* (*C.vernus* Hill., *C.albiflorus* Kit. and *C.tommasianus* Herb.), blossom in the Vally. The biggest and biological the most vital plants from three populations of Genus *Crocus*, are those which has developed under snow melting presented in the dampest part Vally. Some physiological parameters of these plants is also to a great extent determined by Microclimatic conditions. Their distribution, phenology, morphology and water regime serves as an accurate bioindicator of the Meso and Microclimatic conditions at the beginning of the vegetation period.

Утицај акутне интоксинације оловом на активност каталазе и трансаминазе, садржај холестерола и време коагулације крви код пацова

Катица Максимовић - Косановић и С. Милошевић

Одсек за биологију, Природно-математички факултет, Приштина

У овом раду праћене су измене неких биохемијских параметара у крви и серуму адултних лабораторијских пацова, соја Wistar (активност каталазе и трансаминазе, садржај холестерола и време коагулације крви) 45 минута после једнократне интоксикације оловоацетатом у дози од 100 мг/кг тел. теж. интраперитонеално. Контролне групе пацова третиране су физиолошким раствором у истом временском интервалу, као и претходне и у истој запремини течности. Ова истраживања показују да је активност каталазе у крви и серуму трансаминазе (AST и ALT) 45 минута после једнократне примене сублеталне дозе метала у облику соли, сигнификантно већа у односу на контролу, док је концентрација укупног холестерола у серуму сигнификантно мања. Уз то, време коагулације крви код интоксичираних пацова је значајно краће.

Увод

Познато је да постојећа количина олова у животној средини, која је резултат масовног и неконтролисаног загађивања нис проишходима индустрије и технологије може изазивати, поред осталог, и биохемијска оштећења у организмима различитих ступњева организације и доба старости. Тако, установљено је да олово спречава пораст гама-глобулина после активне имунизације зечева (Момчиловић, 1973), у пацова озбиљно ремети равнотежу метаболизма масти, угљених хидрата и беланчевина (Максимовић и сар., 1992), а у разним ткивима и органима паса повећава активност цитохромоксидазе (Макашев, 1976), проузрукује слабије везивање J^{131} у тиреоидеји (Sandstead, 1967) и значајно прокужује Р - R интервал у ЕКГ-у пацова (Вуловић, 1982). Међутим, код радника који су професионално изложени олову запажен је пад активности ензима АПТ-азе (Hernberg, 1967).

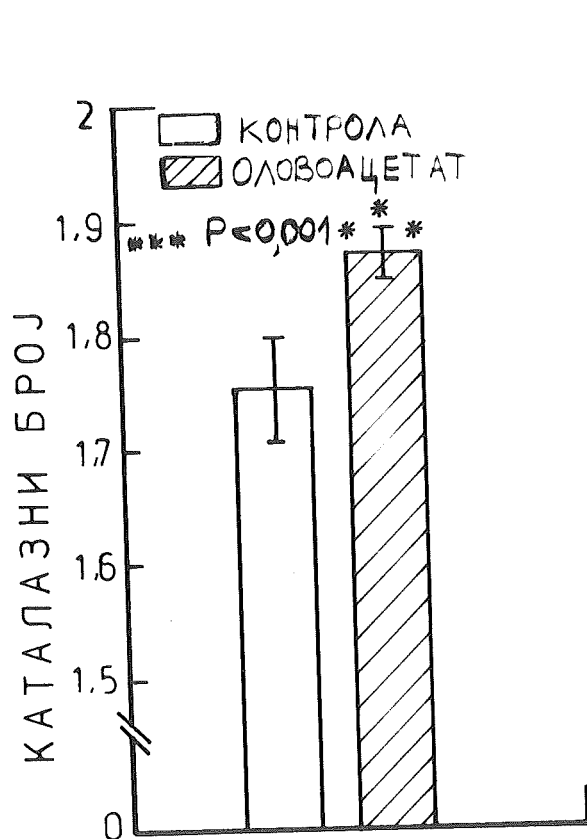
Имајући на уму значај биохемијских истраживања, не само у индикацији, него и у покушајима откривања механизма токсичног деловања олова, ми смо одлучили да у овом раду испитамо ефекат оловоацетата на активност ензима типа каталазе и трансаминазе, садржај холестерола и време коагулације крви после акутне интоксикације пацова.

Материјал и методе

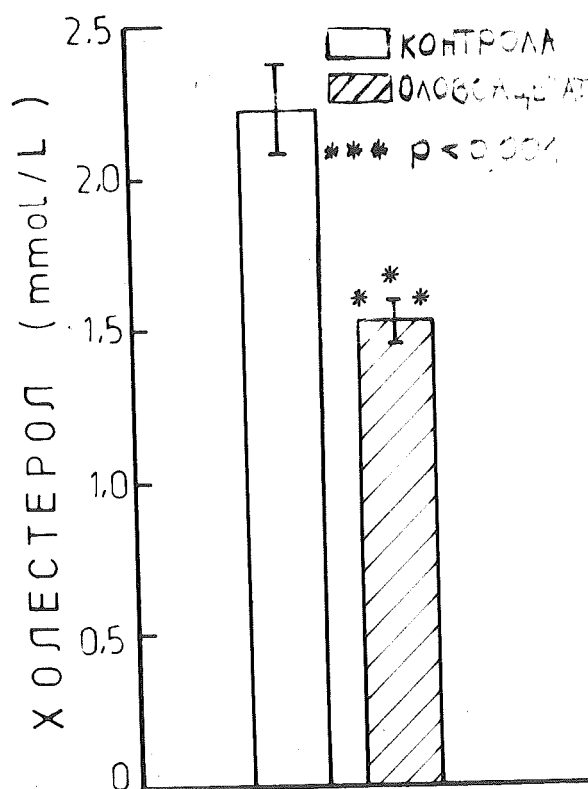
За лабораторијска истраживања коришћени су адултни албино пацови, оба пола, телесне тежине 220-340 грама, подељени у експерименталне групе од седам до десет животиња. Све животиње су храњене стандардном лабораторијском храном *ad libitum*. Квантитативно одређивање активности каталазе у крви вршено је методом Баха и Зупкове у модификацији Коста и Смирнове (1964), док је у чистом пехомолизираном серуму колориметријским методама одређивана концентрација укупног холестерола (Watson, 1960) и активност трансаминазе (Reitman i Frankel, 1957), готовим реагенсима клиничко-лабораторијског комплекта "Радоња" Сисак, 45 минута после једнократне примене оловоацетата у дози од 100 мг/кг телесне тежине, интраперитонеално. Контролне групе животиња третиране су физиолошким раствором NaCl. Резултати експеримента су представљени као средње вредности, а студент "т-тест" је коришћен за одређивање статистичке значајности добијених разлика.

Резултат и дискусија

Мерење активности крвне каталазе (слика 1) ензима који учествује у оксидоредукционим процесима код пацова интоксигираних оловоацетатом (100 мг/кг тел.теж.и.п.) 45 минута после примене овог метала, показало је, у односу на вредности контролне групе животиња, статистички значајно повећање каталазног броја ($p < 0.001$). Резултати ових експеримената могу се повезати са налазима Макашева (1976) који је, проучавајући активност ензима цитохромоксидазе у неким унутрашњим органима пацова (јетра, бубрег, мозак) у првом периоду интоксикације оловом открио повећање активности овог ензима и са подацима Солдатовића и Петровића (1953) који су, такође, приметили повишену активност каталазе у крви оваца хронично трованих оловом. На основу података из литературе и резултата наших истраживања сматрамо да је каталаза укључена у заштитне механизме одбране, вероватно путем оксидативне деградације токсиканата.



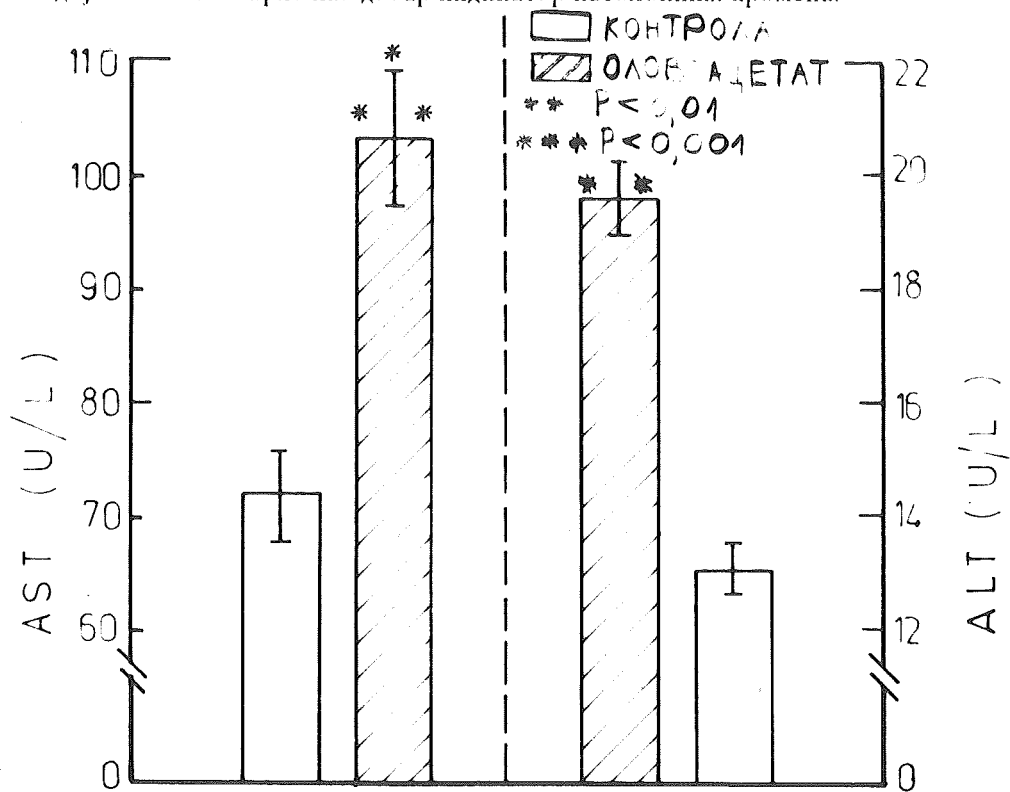
Слика 1. Ефекат оловоацетата (100 мг/кг тел.теж.и.п.) на активност каталазе 45 минута после примене метала



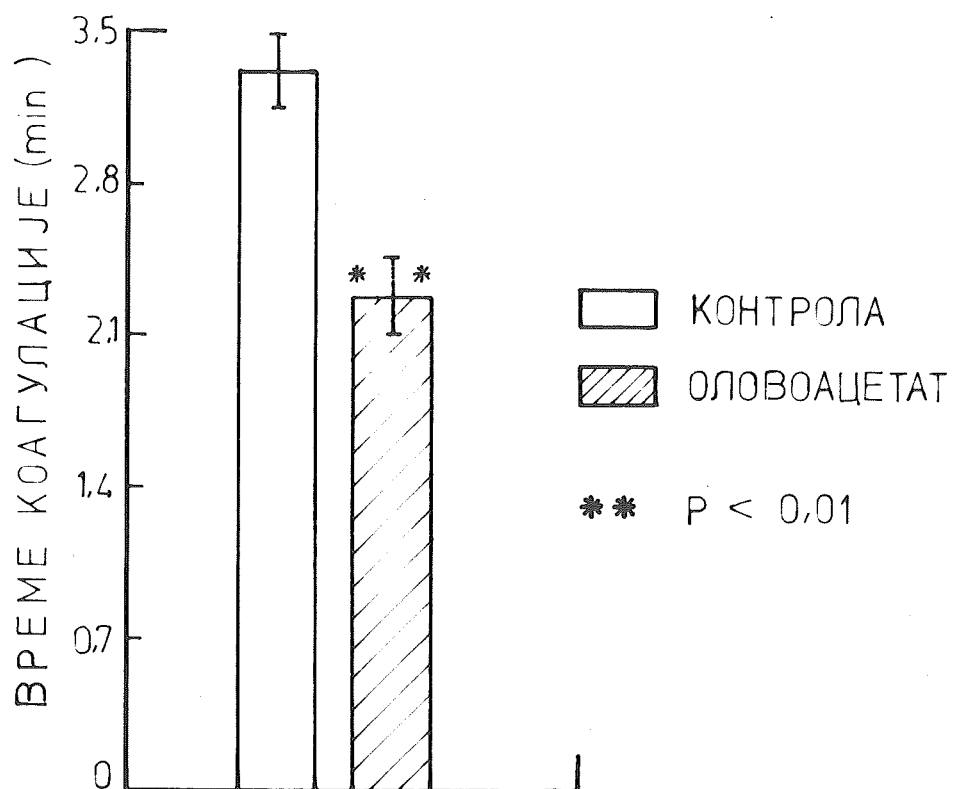
Слика 3. Промене садржаја холестерола у серуму пацова, после примене оловоацетата

У следећој етапи наших истраживања одређивана је активност аспартат аминотрансферазе (AST) и аланин аминотрансферазе (ALT) у серуму пацова. Регистровано је сигнификантно повећање активности ових ензима при чему је, у поређењу са контролом, активност AST-а била више изражена (слика 2). Сличне резултате у повећању активности трансаминазе налазимо у литератури. Вуловић примећује (1982) да је активност ензима у серуму (SGOT) била значајно већа у групи пацова третираних у току четири месеца 1% раствором оловоацетатом у пијаћој води у односу на контроле. Познато је да се повећана активност трансаминазе јавља и при разним обољењима јетре, срца и других органа када се оне као интрацелуларни ензими појачано мобилишу у екстрацелуларну течност. С обзиром на то, повећана активност трансаминазе не може се узети као специфичан тест тровања организма оловом. Међутим, степен њихове активности можда послужи у експери-

менталне и дијагностичке сврхе као добар индикатор патолошких промена.



Слика 2. Ефекат оловоацетата (100 мг/кг тел.теж.п.п.) на активност трансаминазе 45 минута после примене метала.



Слика 4. Утицај оловоацетата на време коагулације крви пацова

Промене концентрације укупног холестерола у серуму интоксичираних и контролних пацова, 45 минута после убризгавања оловоацетата и физиолошког раствора, приказане су графички на слици 3. Анализа добијених вредности показује да је у серуму пацова третираних оловоацетатом концентрација укупног холестерола сигнификантно мања ($p < 0.001$), вероватно услед смањене синтезе, од концентрације холестерола контролне групе. Смањење концентрације холестерола у серуму пацова, као резултат наших истраживања, поклања се са открићима Штајна и Жикића (1986) да се концентрација холестерола у плазми значајно смањује код слатководних врста риба (сребрни каракаш и шаран) излаганих високој концентрацији мангана (40 мг/л) у периоду од 4,7 и 15 дана.

Резултат наших експеримената су показали и то да се биохемијски процес коагулације крви у присуству оловоацетата убрзавају, при чему се врем е коагулације (слика 4), у поређењу са контролом, значајно скраћује ($p < 0.01$).

ЛИТЕРАТУРА

- Hernberg, S., Vihko, V., Hasan, J. (1967) : Red cell membrane ATPases in workers exposed to inorganic lead, Arch. Environ. Health, 14, 319.
- Кост, Е.А. и Смирнова, Л.Г. (1964): Руководство по клиническим лабораторным исследованиям, "Медицина", Москва, стр.30 и 257.
- Maksimovic-Kosanovic K., Milosevic, S., Radovic, D., Ilic, K., and Pavlovic, M. (1992) : Influence of Lead Acetate on some Metabolic Processes in Albino Rats. Acta Biol. et Med. exper. volume 17, No 1-2., p 31-34.
- Макашев, К.К. (1976): Обменне процеси при сатурнизме, "Казахстан", Алма-Ата, с.40-47.
- Момчиловић, Б. (1973): Метаболизам олова с посебним освртом на проблем изложености становништва. Архив за хигијену рада и токсикологију. Вол.24.п.131-187.
- Reitman, S., Frankel, S. (1957): Am. J. Clin. Path. 28, 56.
- Солдатовић, Д. и Петровић, Ч. (1953): Утицај олова на активност фермената - холинестеразу и каталазу код животиња трованих малим количинама олова. Архив фармац., 13, 253.
- Sandstead, H.H. (1967): Effect of chronic lead intoxication on in vivo J^{131} uptake by the rat thyroid. Proc. Soc. Expt. Biol. Med., 124, 18.
- Штајн, А. и Жикић, Р. (1986) : Утицај мангана на метаболичке процесе код врста *Cyprinus carpio* Linne I *Carassius auratus gibelio* (Bloch). Изводи саопштења. VII Конгрес биолога Југославије, Будва, 29.09 - 3.10.1986. Стр.318.
- Watson, D. (1960): Clin. Chim. Acta, 15, 637.
- Vulovic, D. (1982): The influence of chronic low - level lead poisoning on cardiovascular system of a rat. Abstrakt. 12 congress of federation of Yugoslav societies of physiologists, p.9-49.

SUMMARY

THE INFLUENCE OF ACUTE LEAD INTOXICATION ON CATALASE AND TRANSAMINASE, CHOLESTEROL CONTENT AND TIME OF BLOOD COAGULATION IN RATS

Katica Maksimovic - Kosanovic and S. Milosevic

Department of Biology, Faculty of Sciences, University of Pristina, 38000 Pristina, Yugoslavia

The changes of some biochemical variables (catalase and transaminase activities, cholesterol content and time of blood coagulation) in blood and serum of adult laboratory rats, race Wistar, 45 minutes after one experimental intoxication with lead acetate (in a dose of 100 mg/kg of the body weight given intraperitoneally) have been investigated. The control groups of rats were treated by the physiological solution at the same time intervals as the previous and of the same liquid volume. These researches shows that activities of catalase in blood and transaminase in serum (AST and ALT) were significantly increased in comparison with controls, while the concentration of total cholesterol is significantly decreased. Besides, the time of coagulation in intoxicated rats is significantly shorter.

Periphyton algae of glacial livadicko lake of Sara mountain

Violeta Urosevic

Department of Biology, Faculty of Science, University of Pristina, 38000 Pristina, Yugoslavia

Abstract

Comparing lakes of plain regions flora with vegetation of high mountains lakes is not so well explored. In order to improve it we carried out an exploration of algae in glacial niveous lake s on Sirinic side of Sara mountain. One of these glacial lakes is Livadicko, third in size on this mountain.

There were established 76 taxons in periphyton gathered in 2.08.19 92. The best presented were **Bacillariophyta** - 55 taxons and **Chlorophyta** - 19 taxons. **Cyanophyta** and **Euglenophyta** had small abundance. They were presented with one taxon each.

Saprobity index was estimated on the base of inc... value of algae species and it was 1.45. That shows that water of this lake in 1992.. belonged to oligo-beta mesosaprobic level or to the I-II class bonity.

Introduction

There are about 90 glacial and niveous lakes on Sara mountain (Cukic, 1983), so that it is, beside Rila in Bulgaria and Durmitor in Montenegro, one of the mountain with biggest number of lakes in the Balkans.

Lakes of Sara mountain are on big heights above sea level and they are inaccessible. That is the reason they are not better explored.

Composition of algae was explored during 1984/85. in glacial and niveous lakes of Sara mountain (Urosevic, 1988), while the composition of periphyton algae of glacial. Livadicko lake was established for the first time in 2.08.1992.

Livadicko lake (Figure 1.) is located on the northwest side of Sara mountain 40° 11' 25" north latitude and 21° 04' 35" east longitude near Ljuboten, hidden in deep and on 2173 m heigh above sea level. It is 230 m long, 120 m wide with surface area of 20,750 m³. It is biggest depth is 7.30 (Stankovic, 1989). Bank is jagged and rocky, lake's basin rocky with big stone block covered with slime. Colour of the water is green-blue. The main water supply comes from a brook which is formed by melted snow carrying also a lot of mud. Significant supply of water and nutritions comes from ground waters that are in hinterland of canyon where are 11 springs.

Water is lost by Jezerski brook, the highest spring branch of Kaludjerska river.

Material and methods

For this exploration was used periphyton gathered from all around the lake in 2.08.1993. Sample is obtained by grinding surface of coastal submerged stone, and material is in 250 ml plastic bottles fixed with 4% formaline in laboratory.

Preparation of **Bacillariophyta** for analysis is performed by standard metods (Hustedt, 1930). The other algae groups are determined immediatly by keyes: Bourrelly (1968-1972), Patrick-Reimer (1966) Vodenicarov et al., (1972), Zabelina et al., (1951), West (1904-1920).

Saprobity indicators are established by Sladeczek (1973). Index of saprobity is established by Pantle and Buck (1955). Physical and chemical factors are not examined.

Results and discussion

Flora of Livadicko lake was not explored untill now. Analising summer sample we established big community of 76 taxons: **Cyanophyta** 1(1.3%), **Bacillariophyta** 55(72.4%), **Euglenophyta** 1(1.3%) and **Chlorophyta** 19(25%). Bacillariophyta were the most represented were halophobic genus (Gollerbach, 1977) Pinnularia with 11 taxons and Cymbella with 10 taxons. Within the genus **Cymbella species**, **Cymbella aqualis** and **Cymbella affinis** were very well represented and **Basillariophyta** predominant vegetation. Another genus, showed in Table 1, are presented with 5-1 taxons. Although **Bacillariophyta** have their maximum development

during colder period. their abundance (55 taxons) in Livadicko lake during the summer could be explained by specific ecological conditions on these heights and by supplying this lake with water from 11 springs.

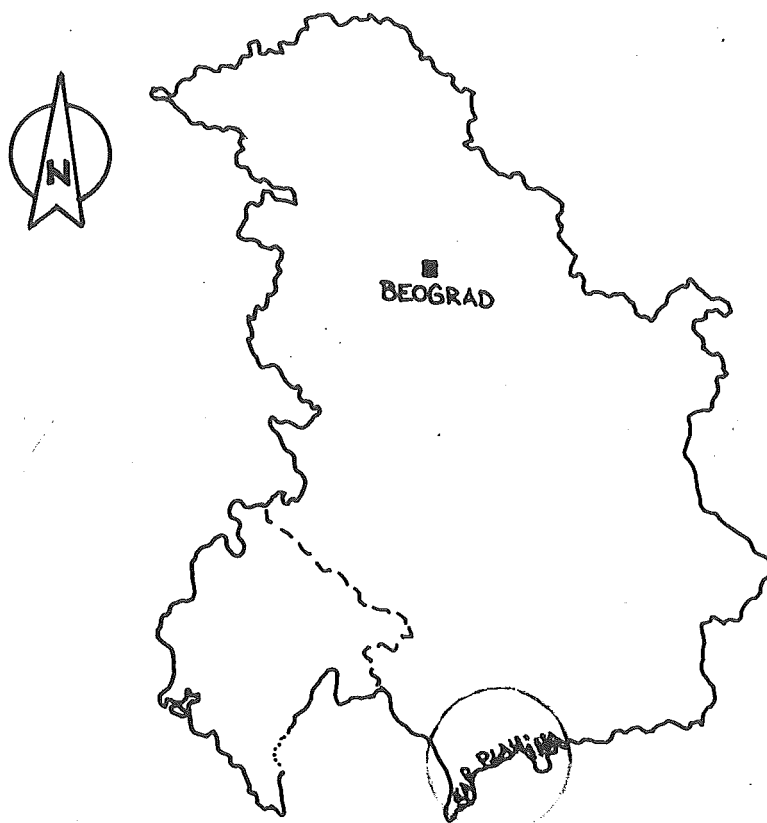


Figure 1. Geografical location of Livadicko lake of Sara mountain

Tab. 1 Taxonomic register and frequency of periphyton algae in the glacial Livadicko lake

S P E C I E S	Frequency	Saprobity indicator
CYANOPHYTA		
<i>Gloeocapsa turgida</i> (KUTZ.) HOLL.	3	0
BACILLARIOPHYTA		
<i>Caloneis silicula</i> (EHR.) CL.	1	0-b
<i>Caloneis silicula</i> var. <i>major</i> SKV.	1	-
<i>Cocconeis pediculus</i> EHR.	1	b
<i>Coscinodiscus</i> sp.	1	-
<i>Cyclotella bodanica</i> EULENST	1	0
<i>Cymbella aequalis</i> W.SM.	3	-
<i>Cymbella affinis</i> KUTZ.	3	0-b
<i>Cymbella aspera</i> (EHR.) CL.	1	b
<i>Cymbella helvetica</i> var. <i>curta</i> CL.	1	-
<i>Cymbella naviculiformis</i> AUERSW.	1	b
<i>Cymbella parva</i> (W.SM.) CL.	1	-
<i>Cymbella prostrata</i> var. <i>auerswaldii</i> (RABH.) REIN.	1	-
<i>Cymbella sinuata</i> GREG.	1	-
<i>Cymbella tumidula</i> FRUN.	1	-
<i>Cymbella ventricosa</i> KUTZ.	1	b
<i>Denticula tenuis</i> var. <i>crassula</i> (NAG.) HUST.	1	-
<i>Diatoma hiemale</i> (LYNGB.) HEIB.	1	x
<i>Diploneis elliptica</i> (KUTZ.) CL.	1	-
<i>Epithemia sorex</i> var. <i>saxonica</i> KUTZ.	1	0-b
<i>Eunotia arcus</i> var. <i>binodis</i> GRUN.	1	-
<i>Eunotia bigibba</i> KUTZ.	1	-
<i>Eunotia bigibba</i> var. <i>pumila</i> GRUN.	1	-
<i>Eunotia mesolepta</i> var. <i>binodis</i> (EHR.) GRUN.	1	-
<i>Fragilaria construens</i> var. <i>binodis</i> (EHR.) GRUN.	1	-
<i>Gomphonema construens</i> EHR.	1	b
<i>Gomphonema intricatum</i> KUTZ.	1	0
<i>Gomphonema intricatum</i> var. <i>pumilum</i> GRUN.	1	0
<i>Gomphonema intricatum</i> var. <i>vibrio</i> (EHR.) CL.	1	-
<i>Gomphonema longiceps</i> var. <i>subclavatum</i> GRUN.	1	-
<i>Gyrosigma</i> sp	1	-
<i>Hantzschia major</i> GRUN.	1	-
<i>Hantzschia virgata</i> (ROPER.) GRUN.	1	-
<i>Melosira islandica</i> O.MULL.	1	-
<i>Naviculla cuspidata</i> KUTZ.	1	b-0

SPECIES	Frequency	Saprobity indicator
<i>Navicula cuspidata</i> f. <i>primigena</i> DIPP.	1	0
<i>Navicula dicephala</i> (EHR.) W.SM.	1	0-b
<i>Navicula radiosa</i> KUTZ.	1	0-b
<i>Neidium iridis</i> (EHR.) CL.	1	-
<i>Neidium iridis</i> var. <i>ampliatum</i> (EHR.) CL.	1	-
<i>Pinnularia borealis</i> EHR.	1	x-0
<i>Pinnularia distiguenda</i> CL.	1	-
<i>Pinnularia lata</i> var. <i>thueringiaca</i> (RABENH.) A.MAYEN	1	-
<i>Pinnularia major</i> (KUTZ.) CL.	1	b
<i>Pinnularia mesolepta</i> (EHR.) W. SM.	1	0
<i>Pinnularia nobilis</i> EHR.	1	0
<i>Pinnularia viridis</i> (NITZSCH) EHR.	1	b
<i>Pinnularia viridis</i> var. <i>sudetica</i> (HILSE.) HUST.	1	x-0
<i>Pinnularia viridis</i> var. <i>intermedia</i> CL	1	-
<i>Pinnularia</i> sp.	1	-
<i>Stauroneis phoenicenteron</i> EHR.	1	b
<i>Surirella biserata</i> BREB.	1	b
<i>Surirella robusta</i> var. <i>splendida</i> EHR.	1	b
<i>Surirella</i> sp.	1	-
<i>Synedra ulna</i> (NITZSCH.) EHR.	1	b
<i>Synedra</i> sp.	1	-
EUGLENOPHYTA	1	
<i>Trachelomonas</i> sp.	3	-
CHLOROPHYTA	1	
<i>Boulbochaete setigera</i> (ROTH.) C.A.AG.	3	-
<i>Closterium lunula</i> (MULL.) NITZSCH.	1	0
<i>Cosmarium impressulum</i> ELFV.	1	-
<i>Cosmarium magnificum</i> NORDST.	1	-
<i>Cosmarium subprotumidum</i> NORDST.	1	-
<i>Dyctiosphaerium pulchellum</i> WOOD.	1	b
<i>Gonatozygon monotaenium</i> DE BARY	1	-
<i>Geminella</i> sp.	1	-
<i>Oedogonium</i> sp.	1	-
<i>Oocystis</i> sp.	1	-
<i>Pediastrum boryanum</i> (TURP.) MENEGH.	3	b
<i>Penium margaritaceum</i> (EHRB.) BREB.	1	-
<i>Pleurotaenium trabecula</i> (EHRENB.) NAG.	1	-
<i>Scenedesmus</i> sp.	1	-
<i>Sphaerocystis schroeterii</i> CHOD.	1	0

SPECIES	frequency	Saprobity indicator
<i>Spirogyra</i> sp.	5	-
<i>Staurastrum punctulatum</i> BREB.	1	0
<i>Staurastrum</i> sp.	1	-
<i>Ulothrix</i> sp.	1	-

1 - individual sample; 3 - well represented; 5 - very abundant

Sample of **Chlorophyta** taken in 2.08.1992. had less abundance in regard to **Bacillariophyta**. They were presented with 19 taxons and their species made 25.0% of total species composition. Various presence was characteristic of 16 genus from which only genus **Cosmarium** (3 taxons) were presented with several taxons. We can also notice on Table 1 that all taxons are established in single specimen except well presented taxons of **Boulbochaete setigera** and **Pediastrum boryanum**. The most frequent taxon *Spirogyra* sp. gas overgrown rocky bottom of coastal part.

Cyanophyta and **Euglenophyta** are presented with one taxon or with 1.3% in total species composition but they are significant component considering that their taxons *Glorocapsa turgida* and *Trachelomonas* sp. have well abundance (Table 1).

From total number of established taxons (76) in periphyton of Livadicko lake 31 species are indicators of water saprobity. From that number 14 species are oligosaprobic or betamesosaprobic indicators (table 1). Estimated value of saprobity index 1.45 what shows I-II class of water bonity or oligo-betamesosaprobic level.

In order to establish similarity of flora between periphyton of Livadicko lake and microphytobentos of 8 explored glacial lakes of Sirinic side on Sara mountain (Big and Small Jazinicko lake, lake Mali vir I and II, Upper, Middle and Lower Blatesticko lake and lake Veliki vir) we made some comparisons. From total number of established taxons in Livadicko lake (76) and 8 glacial lakes (256) only 36 taxons are common, while 41 taxons: *Caloneis silicula* var. *major*, *Cocconeis pediculus*, *Coscinodiscus* sp., *Cyclotella bodanica*, *Cymbella helvetica* var. *curta*, *Cymbella parva*, *Cymbella prostrata* var. *auerswaldii*, *Cymbella tumidula*, *Denticula tenuis* var. *crassula*, *Diploneis elliptica*, *Epithemia sores* var. *saxonica*, *Eunotia arcus* var. *binodis*, *Eunotia mesolepta* var. *binodis*, *Gyrosigma* sp., *Hantzschia major*, *Hantzschia virgata*, *Melosira islandica*, *Navicula cuspidata* f. *primigena*, *Navicula dicephala*, *Pinnularia nobilis*, *Pinnularia viridis* var. *intermedia*, *Pinnularia* sp., *Surirella biserata*, *Closterium lunula*, *Cosmarium subprotumidum*, *Dictiosphaerium pulchellum*, *Gonatozygon monotaenium*, *Geminella* sp., *Oedogonium* sp., *Oocystis* sp., *Pleurotaenium trabecula*, *Scenedesmus* sp., *Spirogyra* sp., *Staurastrum* sp. and *Ulothrix* sp. are autochthonous for Livadicko lake.

Comparing close height above sea level of Livadicko lake (2.173 m) to height of Big Jazinacko lake (2.128 m) and species (91) we established 14 common taxons of **Bacillariophyta**. It is characteristic that Livadicko lake, that is on similar height above sea level (2.173 m) as lake Mali vir II (2160 m: 141 taxons), has with it the highest flora similarity with 21 taxons. From that number 4 species: *Glorocapsa turgida*, *Pinnularia viridis* var. *sudetica*, *Pediastrum boryanum* and *Sphaerocystis schroeterii*, are established only in these two lakes.

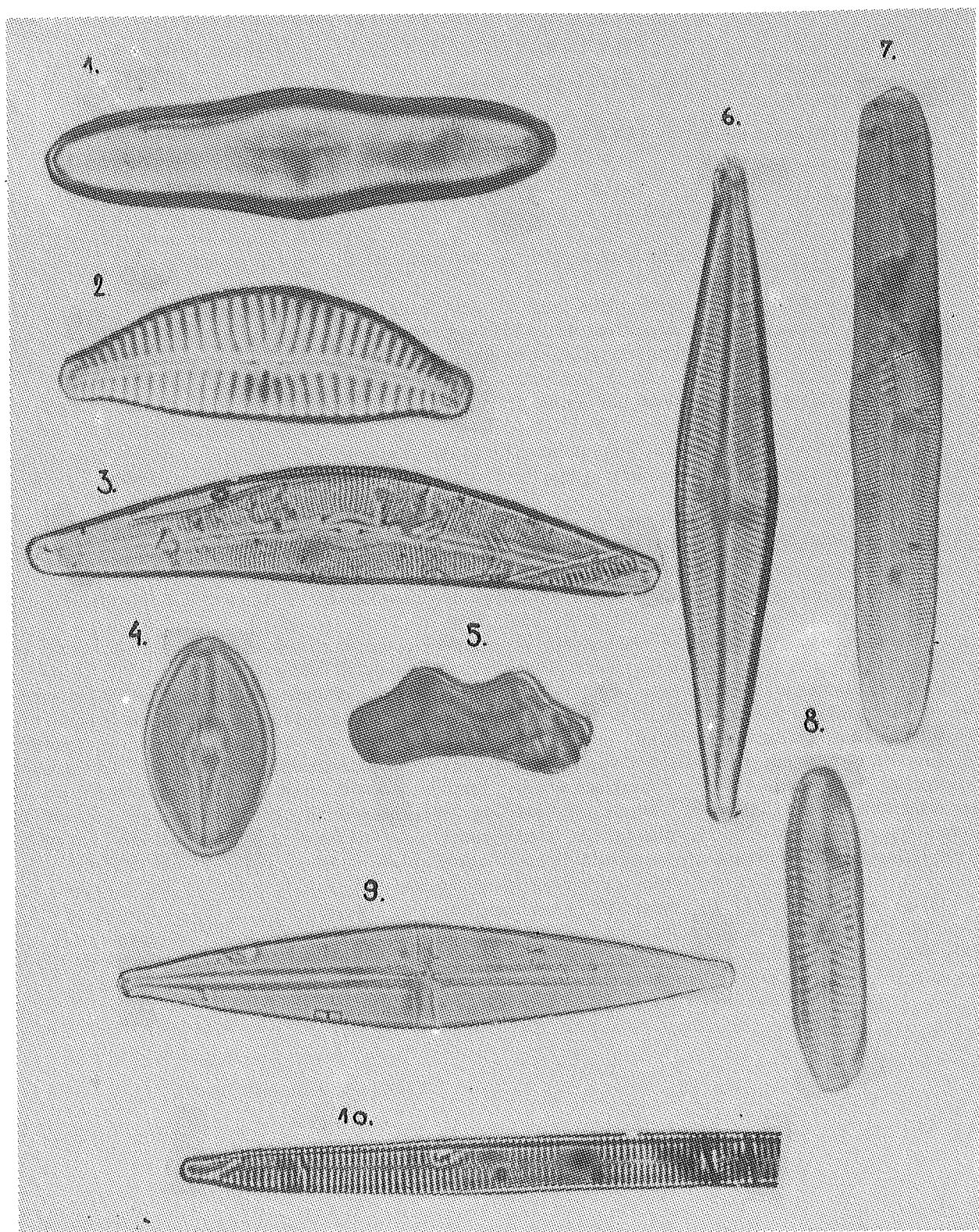


Fig. 2 *Bacillariophyta* in the glaciola Livadičko lake 1. *Caloneis silicula* (EHR.) CL. 2. *Cymbella affinis* KUTZ. 3. *Cymbella aspera* (EHR.) CL. 4. *Diploneis elliptica* (KUTZ.) CL. 5. *Eunotia bigibba* KUTZ. 6. *Navicula radiosa* KUTZ. 7. *Pinnularia major* (KUTZ.) CL. 8. *Pinnularia lata* var. *thuringiaca* (RABENH.) A.MAYER. 9. *Stauroneis phoenicenteron* EHR. 10. *Synedra ulna* (NITZSCH.) EHR.

References

- Bourrelly, P. (1968-1972): Les algues d' eau douce. Tome I-III. Edition N. Boubée et Cie. Paris.
- Чукух, Д. (1983): Глацијална и пивацијона језера Шар-планине (рукопис).
- Gollerbach, M.M. (1977): Ziznj rastenij. Vodorosli lisajinki. Tom III. "Prosvescenie" Moskva.
- Hustedt, F. (1930): Bacillariophyta. Subwasserflora Deutschland. Helf 10.2. Aufl. 23.
- Hustedt, F. (1961-1965): Rabenhorst Krypt. - Fl. Die kieselalgen. 3 Tiel.
- Palmer-Mordvinceva, G.M. (1982) Opredelitelj presnovodnih vodoroslei SSSR. Vyp. 11(2). L., Nauka, Leningrad
- Patrick, R., W.C. Reimer, (1966): The Diatoms of the United States. - Acce. Nat. Scien. of Philadelphia. Monograph., No 13, Philadelphia.
- Pantle, R., H. Buck, (1955): Die biologische Uberwahrung der Gewasser und Darstellung der Ergebnisse. Besondere Mitteilung im Deutschen Gewasserkundlichen 12. 135-143.
- Sladecck, V. (1973): System of water Quality from the Biological Point of View. Archiv f. Hydrobiologie. Beih. 4, Ergebnisse der Limnologie. E. Schweizerbartische Verlagsbuchhandlung (Nagele u Obermiller) Stuttgart.
- Станковић, С. (1989): Језера Југославије. "Стручна књига". Београд.
- Урошевић В. (1988): Фитопланктон и микрофитобентос у глацијалним и пивацијоним језерима Сиринићке стране Шар-планине. Докторска дисертација. Приштина.
- Воденичаров, Д., С.Т. Драганов, Д. Темнијева. (1971): Флора на Балгарија. "Народна просвета" Софија.
- West, W. (1904-1912): A Monograf of the British Desmidaceae. Vol. I-IV. London.
- Zebelina, M.M., I.A. Kiselev, A.I. Proskina-Lavrenko. (1951): Opred. pres. vodorosli. Akademija nauka SSSR. Leningrad.

Извод

ПЕРИФИТОНСКЕ АЛГЕ ГЛАЦИЈАЛНОГ ЛИВАДИЧКОГ ЈЕЗЕРА НА ШАР-ПЛАНИНИ

Вполета Урошевић

Одсек за биологију, Природно-математички факултет, Универзитет у Приштини,
38000 Приштина, Југославија

У односу на језера смештена у равничарским пределима истраживања флоре и вегетације алги високопланинских језера због објективних тешкоћа знатно заостају. Да би се ова неуједначеност поправила, а изворна природа боље упознала, последњих година истраживање су алге у глацијалним и пивацијоним језерима Сиринићке стране Шар-планине. Једно од глацијалних језера је и Ливадичко, треће по величини на овој планини.

У перифитонском материјалу сакупљеном 2.08.1992. године утврђено је укупно 76 таксона алги. Најзаступљеније су **Bacillariophyta** - 55 таксона, и **Chlorophyta** - 19 таксона, док су слабу заступљеност имале **Cyanophyta** и **Euglenophyta** са по 1 таксомом.

Индекс сапробности израчунат на основу индикаторских вредности врста алги износио је 1.45, што показује да је у лето 1992. године вода овог језера припадала олиго-бетамезосапробном ступњу или I-II класе боњитета.

Упоређена флорна сличност с 8 истражених глацијалних језера на Шар-планини показује да је Ливадичко језеро с језером Мали вир имало највећу флорну сличност с 21 заједничком врстом од које су 4 врсте: **Gloecapsa turgida**, **Pinnularia viridis** var. **sudetica**, **Pediastrum boryanum** и **Sphaerocystis schroeteri** утврђене само у ова два језера.

Будући да су ова истраживања обављена само у летњем периоду, потребно је наставити проучавање флоре алги овог занимљивог подручја.

The method of Pejović and double transformations

M. Vučković and N. Rosić

Faculty of Science Kragujevac, Institute of Mathematics

The double transformations in the form (0.2) and (0.8) are discussed in this paper and conditions are defined under which the solution of the differential equation (0.5) can be reduced to the solution of the differential equation (0.4), i.e. (0.4.1) with constant coefficients by applying the method that Pejović had used in [4].

0. Introduction

The transformations of the differential equation

$$(0.1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

with variable coefficients $a_i(x) \in C$ ($i=1,2$) into a differential equation with constant coefficients, after introducing in it a new unknown function or a new independent variable have been theoretically examined in detail. In that sense the results of Erugin [2] and those of Pejović [4] should be specially pointed out.

As it is, however, known the application of the double transformation defined by

$$(0.2) \quad u = \int h(x) dx$$

$$(0.3) \quad y = g(x)v, \quad v = v(u)$$

to the reduction of the equation (0.1) to the equation

$$(0.4) \quad \frac{d^2 u}{dv^2} + b_1 \frac{du}{dv} + b_2 v = 0$$

with constant coefficients b_i ($i = 1,2$), with the exception of the results of Berkovic [1] and Samodurov [5] has not nearly been theoretically examined.

This paper appeared with the ambition to fill, to a certain extent, theoretical gap. Its main intention is to answer the question:

Under which conditions the double transformation, defined by (0.2) and (0.3), makes possible to reduce the solution of the differential equation.

$$(0.5) \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

with variable coefficients $a_i(x) \in C$ ($i = 0,1,2$), which is more general than the equation (0.1) and gives, therefore, greater possibilities for the application of this transformation, to the solution of the differential equation (0.4)?

1. Solution of the problem

In order to answer the question asked, it is necessary to introduce into the equation (0.5), instead of the variables x and y , new variables u and v , which are connected with x and y with the relations (0.2) and (0.3), where $g(x)$ and $h(x)$ are arbitrary functions. After this operation the equation (0.5) can be written in the form

$$(1.1) \quad \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{(2g'h + gh')a_0 + a_1gh}{a_0gh^2} \frac{dv}{du} + \frac{a_0g'' + a_1g' + a_2g}{a_0gh^2} v = 0$$

$$, \quad a_0gh \neq 0$$

so that the answer to the question asked is defined as the aim to reduce the solution of the equation (1.1) to the solution of the equation (0.4).

It is obviously true that equation (1.1) will be the equation with constant coefficients if the functions $h(x)$ and $g(x)$ are chosen in a such way to satisfy the conditions

$$(1.2) \quad \frac{(2g'h + gh')a_0 + a_1gh}{a_0gh^2} = \text{const.}$$

and

$$(1.3) \quad \frac{a_0g'' + a_1g' + a_2g}{a_0gh^2} = \text{const.}$$

But, with regard to the fact that the two arbitrary function $h(x)$ i $g(x)$ are simultaneously introduced it is necessary, for their precision, to know the two mutually independent conditions, some suppositions concerning the coefficients of the equation (1.1) will be introduced. As the coefficient next to v is analogous to the left side of the equation (0.5), the procedure is possible only the coefficient next to dv/du .

The method of Pejović

According to the methodology used by Pejović [4], two suppositions can be taken into consideration.

I

Let the arbitrary functions $h(x)$ and $g(x)$ satisfy the equation

$$(1.4) \quad 2g'h + gh' = 0$$

It follows that they satisfy the condition

$$(1.5) \quad g^2h = c$$

where C is the arbitrary constant.

With regard to the fact only condition satisfied by the functions $h(x)$ i $g(x)$ is known, the relation (1.5), that is, the second condition can be arbitrarily chosen. It will be, therefore, defined in a such way to be, on one hand, is the function of the problem being solved and, on the other hand, to be the simplest one for the definition of the functions $h(x)$ i $g(x)$.

For that reason, the following cases will be differenciated:

1^o Let be the coefficient $a_1(x) \neq 0$. In that case it will be the most natural to choose as the second condition the relation

$$(1.6) \quad a_1/(a_0h) = \text{const.}$$

in which the condition (1.2) degenerates, because of (1.4).

The function will be

$$(1.7) \quad h(x) = k(a_1/a_0) = k, \quad k = \text{const.}$$

so that, with regard to (1.5) and (1.7) the function will be

$$g(x) = K\sqrt{a_0/a_1}, \quad K = \text{const.}$$

On the basis of the previously said it follows that it is possible to formulate

Criterion 1.1. The equation (0.5), the coefficients of which are $a_0a_1 > 0$ and $a_i \in C^2$, is reduced to the equation (0.4) by means of the double transformations by the relations

$$u = k \int (a_1/a_0) dx, \quad y = (K\sqrt{a_0/a_1})v$$

if the condition

$$(1.1.1) \quad \left[\left(\sqrt{a_0/a_1} \right)'' + \frac{a_1}{a_0} \left(\sqrt{a_0/a_1} \right)' + \frac{a_2}{a_0} \sqrt{a_0/a_1} \right] / (a_1/a_0)^{3/2} = \text{const.}$$

Example 1.1. For the equation, Kamke [3].

$$(2.346) \quad x^4y'' - (a+b)x^2y' + (a+b)x + aby = 0$$

$$a_0 = x^4, a_1 = -(a+b)x^2, a_2 = (a+b)x + ab \text{ and } a_0/a_1 = -x^2/(a+b)$$

as

$$\sqrt{a_0/a_1} = x\sqrt{-1/(a+b)}, \sqrt{(a_0/a_1)'} = \sqrt{-1/(a+b)} \text{ and } \left(\sqrt{a_0/a_1}\right)'' = 0$$

the condition will be (1.1.1)

$$\left[\left(\sqrt{a_0/a_1}\right)'' + \frac{a_1}{a_0}\left(\sqrt{a_0/a_1}\right)' + \frac{a_2}{a_0}\sqrt{a_0/a_1}\right]/(a_1/a_0)^{3/2} = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

satisfied and with the substitution

$$u = 1/x, \quad y = xv$$

it will be transformed into the equation

$$v'' + (a+b)v' + abv = 0$$

with constant coefficients.

²⁰ Let the coefficient $a_1(x)$ be the arbitrary one. Then, by using the methodology of Erugin [2], one of the simplest variants would be to define the second condition with the equality

$$(1.8) \quad h(x) = ka_0^m, \quad k = \text{const.}$$

hence, owing to (1.5) and (1.8), the function will be

$$g(x) = Ka_0^{-m/2}, \quad K = \text{const.}$$

where m is, at present, an undefined rational number which should be defined to satisfy the conditions

$$a_1/a_0^{m+1} = \text{const.}$$

(1.2.1) and

$$\frac{a_0\left(a_0^{-m/2}\right)'' + a_1\left(a_0^{-m/2}\right)' + a_2a_0^{-m/2}}{a_0^{2m/2+1}} = \text{const.}$$

That means that is possible to define

Criterion 1.2. The equation (0.5), the coefficient of which are $a_0 > 0$ and $a_0 \in C^2$, is reduced to the equation (0.4) by means of the double transformation which is defined with the relations

$$u = k \int a_0^m dx, \quad y = \left(Ka_0^{-m/2}\right)v$$

if the conditions (1.2.1) are satisfied.

Example 1.2.1. For the equation, Kamke [3],

$$(2.365) \quad (x^2 + 1)^2 y'' + ay = 0$$

the conditions (1.2) are satisfied, for $m = -1/2$.

Example 1.2.2. For the equation, Kamke [3],

$$(2.288) \quad 16x^2 y'' + (4x + 3)y = 0$$

the conditions (1.2.1) will be satisfied, for $m = -1/4$.

II

Suppose that the arbitrary functions $h(x)$ and $g(x)$ satisfy the equation

$$(1.9) \quad (2g'h + gh')a_0 + a_1gh = 0$$

from which follows that they connected with the relation

$$(1.10) \quad g^2 h = C e^{-\int (a_1/a_0) dx},$$

where C is arbitrary constant.

It is evident that because of (1.9), the equation (1.1) will be

$$(1.11) \quad \frac{d^2 v}{d^2 u} + \frac{a_0 g'' + a_1 g' + a_2 g}{a_0 g h^2} v = 0, \quad a_0 g h \neq 0$$

and that the equation (1.11) will be to equation with constant coefficients

$$(0.4.1) \quad \frac{d^2 v}{du^2} + b_2 v = 0, \quad b_2 = \text{const.}$$

if the condition

$$(1.12) \quad \frac{a_0 g'' + a_1 g' + a_2 g}{a_0 g h^2} = \text{const.}$$

is satisfied.

In order to precise the functions $h(x)$ and $g(x)$ it is necessary, besides the relation (1.10), to exist another relation between them which would be independent on the relation (1.10).

3⁰ Let this relation be defined by the equality

$$(1.13) \quad h(x) = k a_0^m, \quad k = \text{const.}$$

so that, because of (1.10) and (1.13), the function will be

$$g(x) = K \sqrt{a_0^{-m} e^{-\int (a_1/a_0) dx}}, \quad K = \text{const.}$$

where m is for the present an undefined rational number which should be defined in a such way to satisfy the condition (1.12).

It follows that it is possible to formulate

Criterion 1.3. The equation (0.5) the coefficients of which are $a_i \in C^2$ ($i = 0, 1$) and $a_0 > 0$ is reduced to the equation (0.4.1) by means of the double transformation defined with the relations

$$u = k \int a_0^m dx, \quad y = K \sqrt{a_0^{-m} e^{-\int (a_1/a_0) dx}} v$$

if the condition (1.12) is satisfied.

Example 1.3.1. For the equation, Kamke [3],

$$(2.247) \quad (x^2 - 1)y'' + 2axy' + a(a - 1)y = 0$$

the condition (1.12) is satisfied, for $m = -1$.

Example 1.3.2. For the equation, Kamke [3],

$$(2.142) \quad 5(ax + b)y'' + 8ay' + c(ax + b)^{1/5}y = 0$$

the condition (1.12) is satisfied for $m=-2/5$.

The general case

Suppose that the arbitrary function $h(x)$ and $g(x)$ satisfy the equation

$$(1.14) \quad \frac{(2g'h + gh')a_0 + a_1gh}{a_0gh^2} = k, \quad k = \text{const.}$$

which can be written in the form

$$2\frac{g'}{g} + \frac{h'}{h} = kh - a_1/a_0$$

from which it follows that they connected with the relation

$$(1.15) \quad g^2h = Ce^{\int (kh - a_1/a_0)dx}$$

where C is the arbitrary constant.

It is evident that eith regard to (1.14) the equation (1.1) will be

$$(1.16) \quad \frac{d^2v}{du^2} + k\frac{dv}{du} + \frac{a_0g'' + a_1g' + a_2g}{a_0gh^2}v = 0$$

and that the equation (1.16) will be the equation with constant coefficients

$$(0.4.2) \quad \frac{d^2v}{du^2} + k\frac{dv}{du} + b_2v = 0, \quad b_2 = \text{const.}$$

if the condition (1.12) is satisfied.

In order to precise the arbitrary functions $h(x)$ and $g(x)$ it is necessary, besides the relation (1.15), to exist another relation between them which would be independent on the relation (1.15).

In that case, it is the most natural to choose as second relation

$$(1.17) \quad a_0h^2 = k_1, \quad k_1 = \text{const.}$$

and because of (1.15) and (1.17) the function will be

$$g(x) = K\sqrt{\sqrt{a_0}} e^{\int \left(\frac{k}{\sqrt{a_0}} - a_1/a_0 \right) dx}, \quad K = \text{const.}$$

Consequently, on the basis of the above said it is possible to formulate

Criterion 1.4. The equation (0.5) the coefficients of which are $a_i \in C^2$ ($i=0, 1$) and $a_0 > 0$, is reduced to the equation (0.4.2) by means of the double transformation defined with relations

$$u = k_1 \int (1/\sqrt{a_0}) dx, \quad y = K\sqrt{\sqrt{a_0}} e^{\int (k/\sqrt{a_0} - a_1/a_0) dx} v$$

if the condition

$$(a_0g'' + a_1g' + a_2g)/g = \text{const.}$$

is satisfied.

Example 1.4. The differential equation, Kamke [3],

$$(2.382) \quad (x-a)^2(x-b)^2 y'' = cy, \quad a \neq b$$

by substitution

$$u = \ln \frac{x-a}{x-b}, \quad y = (x-b)v$$

is transformed into the equation

$$(a-b)(v'' - v') = cv$$

with constant coefficients because in that case the function will be

$$h(x) = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)} \quad \text{and} \quad g(x) = x-b.$$

2. THE CONNECTED BETWEEN THE PARTICULAR SOLUTIONS AND FUNCTIONS $h(x)$ AND $g(x)$

It will be shown that is possible to establish the relation between the functions $h(x)$ and $g(x)$ and particular solutions of the differential equation (0.5).

It is known that the basic system of particular solutions of the differential equation (0.5) and its coefficients are connected with the relation

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0) dx}}{y_1^2} dx$$

which can be written in the form

$$(2.1) \quad y_1^2 \frac{d}{dx} (y_2/y_1) = e^{-a_1/a_0 dx}.$$

If the relation (2.1) is compared to the relation (1.10) it follows that between the function $h(x)$ and $g(x)$ and particular solutions y_1 and y_2 of the differential equation (0.5) the relation can be established

$$(2.2) \quad g(x) = y_1 \quad \text{and} \quad h(x) = \frac{d}{dx} (y_2/y_1).$$

On the basis of the above said, it follows that, by using the double transformation defined the relations

$$u = y_2/y_1, \quad y = y_1 v$$

the equation (0.5) can be always reduced to the equation

$$\frac{d^2 v}{du^2} = 0$$

because the condition (1.12) is satisfied.

Besides, this result can, in some cases, be used to determine a particular solution of the differential equation (0.5).

For example, for the equation, Kamke [3],

$$(2.322a) \quad x^2(x-1)y'' + x(x'+1)y' - y = 0$$

$$(a) \quad g^2 h = \frac{Cx}{(x-1)^2} = \frac{C}{x} \left(\frac{x}{x-1} \right)^2$$

therefore, because of (a), it can have the particular solution

$$y_1 = 1/(x-1) \quad \text{or} \quad y_1 = x/(x-1).$$

It is easy to find out that the second function is the particular solution of the differential equation (2.322a).

3. CONCLUSION

The obtained results, expressed by the criteria 1.1 - 1.4 have, on one hand, a great applicable value as they make possible to form an unlimited number of integrable differential equations in the form (0.5) and, on the other hand, they can be of some interest because they fill, to a certain extent, the theoretical gap in this field.

These results, furthermore, demonstrate a wide range of applications of the double transformation, defined by (0.2) and (0.3), to the solutions described by Erugin and Pejovic which are, in fact, the special cases of the transformation defined by (0.2) and (0.3).

Further, from the relation (1.10), for $h(x)=1$, $a_0(x)=1$ and $C=1$, the transformation of Pejović is obtained

$$y = g(x)v = v e^{-\frac{1}{2} \int a_1 dx}.$$

From the relation (1.10), for $g(x)=a_0(x)=C=1$, the transformation of Pejovic is also obtained

$$h(x) = \frac{du}{dx} = e^{-\int a_1 dx}, \quad y = v$$

Because, for $g(x)=a_0(x)=1$, the equation (1.1) will be

$$\frac{d^2 v}{du^2} + \frac{h' + a_1 h}{h^2} \frac{dv}{du} + \frac{a_2}{h^2} v = 0,$$

hence, for

$$a_2/h^2 = \text{const.}$$

in accordance with (0.2) and (0.3), the transformation of Erugin is obtained

$$u = k \int \sqrt{a_2} dx, \quad y = v, \quad k = \text{const.}$$

REFERENCES

- [1] Berkovic, L.M. (1978): Preobrazovanie obyknovennykh linejnykh differencial'nykh uravnenij. - Kujbisevski Gosud. Univ., Kujbisev.
- [2] Erugin, N.P. (1946): Privodimye sistemy. - Trudy Fiz. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, 12, 72-72.
- [3] Kamke, E. (1959): Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen - Leipzig.
- [4] Pejovic, T. (1925): Sur les semi-invariants des equations differentielles lineaires. - Bull. Soc. math. France 53, 208-225.
- [5] Samodurov, A.A. (1989): Construction of general forms of second order ordinary differential equations with known solutions. - Reprint Series. Inst. Math. Univ. Oslo 7, 1-31.

ИЗВОД

МЕТОД ПЕЈОВИЋА И ДВОСТРУКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Разматрају се двоструке трансформације облика (0.2) и (0.3) и дефинишу услови под којима се решавање диференцијалне једначине (0.5) може да сведе на решавање диференцијалне једначине (0.4), односно (0.4.1) са сталним коефицијентима применом методе коју је Пејовић користио у [4].

Добијени резултати, које изражавају критеријуми 1.1 - 1.4, имају значајну апликативну вредност, јер омогућавају да се формира неограничен број интеграбилних диференцијалних једначина облика (0.5), са једне стране, а са друге су од интереса, пошто у извесној мери употпуњују теоријску празнину у овој области.

Осим тога, добијени резултати демонстрирају широк дијапазон примене двоструке трансформације, дефинисане са (0.2) и (0.3), на решавање једначине (0.5), док то није случај са трансформацијама типа Пејовића и Еругина, које нису ништа друго до специјални случајеви трансформације дефинисане са (0.2) и (0.3).

Reflector-absorber system with rays that fall perpendicularly to absorber

Radovan Nikolić

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Pristina, 38000 Pristina, Yugoslavia

In this paper the given problem is solved by the complete integrals of partial equations that figure in the system.

0. Introduction

From the mathematical point of view, the Sun collectors are systems made of two smooth surfaces. The bigger is the reflector (concentrator), and the smaller is the absorber (receiver). The fundamental problem, from the mathematical point of view, for the Sun collectors is the determination of the equations of reflector and absorber surfaces.

The authors [1] have solved this problem using the system of ordinary differential equations, and in [2] the same problem was solved by general integrals of partial equations of the obtained system.

In this work the given problem will be solved by the complete integrals of the partial equations, that figure in the system on which the solutions of the problem is reduced.

1. Problem

Let $M(x,y,z)$ be an arbitrary point of the reflector $\zeta = f(\xi, \eta)$; then by p and q we denote the expression $\frac{\partial f}{\partial \xi}|_M$ and $\frac{\partial f}{\partial \eta}|_M$ respectively.

Analogously, if $A(X,Y,Z)$ is an arbitrary point of the absorber $\zeta = F(\xi, \eta)$ than P and Q denote the expression $\frac{\partial F}{\partial \xi}|_M$ and $\frac{\partial F}{\partial \eta}|_M$ respectively.

Let assume that the Sun rays fall on the reflector parallel to the $O\zeta$ axis of the coordinate system $Ox \eta \zeta$. In that case the equation of the ray reflected from the reflector in the point $M(x,y,z)$ is [2]:

$$\frac{\xi - x}{2p} = \frac{\eta - y}{2q} = \frac{\zeta - z}{p^2 + q^2 - 1}$$

If this ray is falling in the point $A(X,Y,Z)$ of the absorber, then

$$(1) \quad \frac{X - x}{2p} = \frac{Y - y}{2q} = \frac{Z - z}{p^2 + q^2 - 1}$$

and if that ray is also normal in the absorber surface, then

$$(2) \quad \frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{-1}$$

It follows, the problem of determination of the reflector surface equations (the reflector equations) and absorber surface equations (the absorber equations) is reduced to the solution of the system (1)-(2)

2. Solution

Before we start to solve the given problem (1)-(2), we can observe that the equations meridian plane, passing through the point $M(x,y,z)$, is $\eta = \frac{y}{x}\xi$. The point $A(X,Y,Z)$ lies on the meridian plane, so that it has to be:

$$Y = \frac{y}{x}X \text{ or } \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}.$$

Without loss the generality, we may assume that the ray MA intercept $O\xi$ axis in the point $O(0,0,0)$, otherwise, we move the coordinate system, by translation, so that the origin comes in the point of interception. Therefore, the above proportions can be amended with another one, $\frac{Z}{z} \left[= \frac{1}{n} \right]$, so that we obtain:

$$(3) \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{1}{n}.$$

If we have sequence of equal fractions

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}$$

and the sequence of numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ of which at last one is not equal zero, than the next equality holds:

$$(4) \quad \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}.$$

The equation, considered of the first and second fraction in (1), can be written in the form

$$\frac{p}{q} = \frac{X-x}{Y-y}$$

or, if we consider (3) and (4),

$$(5) \quad \frac{p}{q} = \frac{x}{y} \quad \text{or} \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y}$$

The last equations may be solved using the Lagrange-Charpit's method, for that it is sufficient to put

$$\frac{p}{x} = 2a = \frac{q}{y}$$

from which it follows $p=2ax$ and $q=2ay$.

The general integral of the completely integrable Pfaff's equation

$$dz = 2axdx + 2aydy,$$

is

$$(6) \quad z = a(x^2 + y^2) + b,$$

where a and b are arbitrary and different constants, (6) is also the aimed complete integral of equation (5).

The function (6) must be also the solution of the equation formed by the first and third fractions in (1), and which may be written in the form

$$\frac{p^2 + q^2 - 1}{2p} = \frac{Z-z}{X-x},$$

or, if we consider (3) and (4)

$$\frac{p^2 + q^2 - 1}{2p} = \frac{z}{x}.$$

Inserting the function (6) in the last equation, and rearranging it, we obtain $b = -\frac{1}{4a}$. Therefore, the desired solution of the system (1) is

$$(7) \quad z = a(x^2 + y^2) - \frac{1}{4a},$$

and the aimed reflector equation is

$$(7') \quad \zeta = a(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{4a}.$$

The equations composed of the first and third fractions, i.e. the second and third fractions in (2), may be written in the form

$$P = -\frac{X-x}{Z-z} \quad \text{and} \quad Q = -\frac{Y-y}{Z-z}$$

or, if we take into account (3) and (4)

$$(8) \quad P = -\frac{X}{Z}, \quad Q = -\frac{Y-y}{Z-z}$$

or, if we take into account (3) and (4)

$$(8) \quad P = -\frac{X}{Z}, \quad Q = -\frac{Y}{Z}.$$

By the direct check we conclude that

$$\frac{\partial P}{\partial Y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial X}.$$

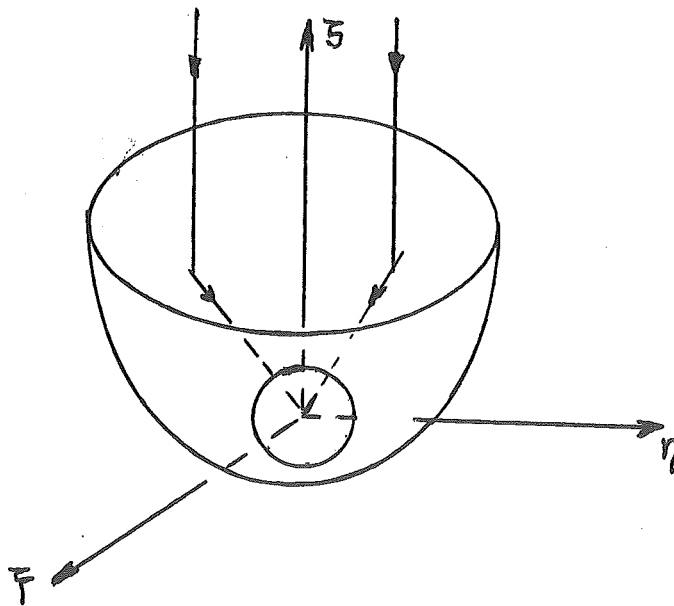


Fig.1

This means that the system (8) is completely integrable, i.e. that the Pfaff's equation

$$dZ = -\frac{X}{Z}dX - \frac{Y}{Z}dY$$

also integrable, and it can be written in the form

$$XdX + YdY + ZdZ = 0,$$

which solution is

$$(9) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = C^2,$$

where C is an arbitrary constant, (9) is also the solution of the system (2). The equation of the aimed absorber is

$$(9') \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = C^2.$$

Let express C as a function of a, using the condition (3). The point $M\left[0, 0, -\frac{1}{4a}\right]$ of the surface (7') corresponds to the point $A\left[0, 0, -\frac{1}{4an}\right]$ of the surface (9'). Therefore from (9'), we have $C = \frac{1}{4cn}$, and this means that, according to (8),

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16a^2n^2}$$

Fig.1 shows the reflector and absorber surfaces which present the solutions of given problem.

References

- [1] D.Dimitrovski, M.Mijatović, V.Veličkova: Les proprietes specifiques des systems ineterminees des equations differentielles des collecteurs du Soleil, Punimi matematike No 1, Pristina, 1986.
- [2] Р.Николић: Уравнења в частних производних солнечних коллекторов, "Математички Билтен", Скопје, to appear.

ИЗВОД

СИСТЕМ РЕФЛЕКТОР-АПСОРБЕР СА ЗРАЦИМА КОЈИ ПАДАЈУ НОРМАЛНО НА АПСОРБЕР

Оређивање једначина рефлектора и апсорбера хелнотехничког система се своди на решавање система парцијалних једначина

$$(1) \quad \frac{X-x}{2p} = \frac{Y-y}{2q} = \frac{Z-z}{p^2+q^2-1}$$

$$(2) \quad \frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{-1}.$$

За разлику од рада [1], где су одређивани меријански пресеци тражених површи, помоћу система обичних диференцијалних једначина, овде су једначине тражених површи одређиване непосредно решавањем система (1)-(2). При томе су једначине рефлектора

$$(9') \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = C^2$$

и једначина одговарајућег апсорбера

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16a^2n^2}$$

одређене помоћу потпуних решења (интеграла) горњих једначина, за разлику од [2] где су исте површи одређене помоћу општих решења поменутих једначина.

Одређивање једначине фокусирајућег огледала заштићеног провидном план-паралелном плочом

Радован Николић

Одсек за Математику, Природно-математички факултет, Приштина

In this paper a differential equation of focusing mirror protected by transparent plane-parallel plate has been composed and then solved.

Увод

Највећи проблем при коришћењу Сунчаних колектора није, како би се то могло помислити на први поглед, мала густина соларне енергије (око $1kW/m^2$), већ мала трајност његових појединих компоненти, на пример огледала. Огледала Сунчаних колектора пропадају из разноразних разлога: због утицаја загађене атмосфере, због дејства микрометеорита, због неравномерног загревања у току дана итд. Из тих разлога се приступа њиховој заштити. Један од начина заштите огледала је прекривање огледала провидном план-паралелном плочом од стакла или пластике. При томе, наравно, долази до погоршања оптике система а тај проблем се решава моделирањем, тј. састављањем и решавањем одговарајућих диференцијалних једначина.

У [1] је постављен проблем и решен и том приликом добијена фокусирајућа крива четвртог степена. У [2] решаван је исти проблем, а добијена фокусирајућа крива другог степена. У овом раду ћемо проблем решавати следећи [2].

Формулисање проблема

Ако фокусирајуће огледало прекријемо провидном план-паралелном плочом од стакла или пластике, онда оно после прекривања више не фокусира. Стога треба одредити једначину (облик) тако заштићеног огледала да оно и после заштите фокусира. Пошто ћемо проблем решавати помоћу обичних диференцијалних једначина то ћемо одређивати меридијански или попречни пресек заштићеног огледала.

Претпоставимо да се светлосни зрак, који пада на заштитну плочу под углом α , прелама се на граничној површи под углом β ; тада од пада на другу граничну површ под углом β , на њој се поново прелама под углом α и пада на огледало у тачку $M(x,y)$ (сл.1). Дакле, при пролазу кроз план-паралелну плочу светлосни зрак бива смакнут (паралелно померен) за величину $htg\alpha\cos\beta$, где је h дебљина заштитне плоче. (Веза између углова α и β одређује се на основу Декарт-Снеловог закона.

Узмимо да једначина траженог меридијанског пресека фокусирајућег огледала $y=f(x)$. Светлосни зрак, који пада на заштитну плочу под углом α , после проласка кроз њу пада у тачку $M(x,y)$ огледала под углом γ (сл.1). У том случају је нагибни угао тангенте криве $y=f(x)$, у њеној тачки $M(x,y)$, према осн Ox , једнак $\alpha+\gamma$. Стога је

$$(1) \quad tg(\alpha + \beta) = f'(x) = y';$$

одавде добијамо

$$(2) \quad \gamma = \arctg y' - \alpha.$$

На основу Фермаовог закона, одбијени зрак од огледала у тачки $M(x,y)$ заклапа са нормалом у истој тачки угао γ , што значи да је нагибни угао одбијеног зрака, према оси Ox (сл.1) једнак $\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, а његов коефицијент правца

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\gamma\right) &= -\operatorname{ctg}(\alpha + 2\gamma) \\ &= -\operatorname{ctg}[(\alpha + \gamma) + \gamma] \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \gamma)\operatorname{tg}\gamma - 1}{\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) + \operatorname{tg}\gamma} \\ (\text{према}(1)) \quad &= \frac{y'\operatorname{tg}\gamma - 1}{y' + \operatorname{tg}\gamma} \\ &= \text{на основу (2) је} \\ &\quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\arctg y' - \alpha) \\ &= \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 - y'\operatorname{tg}\alpha} \\ &= \frac{y' \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 - y'\operatorname{tg}\alpha} - 1}{y' + \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 - y'\operatorname{tg}\alpha}} \\ &= \frac{y'^2 - 2y'\operatorname{tg}\alpha - 1}{y'^2\operatorname{tg}\alpha + 2y' - \operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}$$

Према томе, једначина зрака који се одбија од огледала у тачки $M(x,y)$ и пада на апсорбер у тачку $A(X,Y)$ гласи

$$(3) \quad Y - y = \frac{y'^2 - 2y'\operatorname{tg}\alpha - 1}{y'^2\operatorname{tg}\alpha + 2y' - \operatorname{tg}\alpha}(X - x)$$

По претпоставци, тражено огледало фокусира, тј. сви зраци одбијени од огледала пролазе кроз једну те исту тачку-фокус. Не умањујући општост, претпоставимо да се фокус поклапа са координатним почетком (у супротном случају померимо трансляторно координатни систем тако да координатни почетак дође у фокус).

Пошто зрак (3) пролази кроз тачку $O(0,0)$, мора бити

$$(4) \quad y = \frac{y'^2 - 2y'\operatorname{tg}\alpha - 1}{y'^2\operatorname{tg}\alpha + 2y' - \operatorname{tg}\alpha}x.$$

Једначина (4) је диференцијална једначина траженог меридијанског пресека фокусирајућег огледала.

Решење проблема

Препишимо једначину (4) у облику

$$y'^2 - 2 \frac{\frac{y}{x} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \alpha} y' - 1 = 0.$$

односно

$$y'^2 - 2y' \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \alpha \right) - 1 = 0.$$

а затим решимо последњу једначину по y'

$$(5) \quad y' = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \alpha \right) \pm \frac{1}{\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \alpha \right)}.$$

За решавање једначине (5) треба ставити (при решавању користимо знак +; други случај се разматра аналогно и не даје ново решење):

$$(6) \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = z, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} z, \quad y' = \operatorname{tg} z + \frac{xz'}{\cos^2 z}$$

па ћемо добити

$$\operatorname{tg} z + \frac{xz'}{\cos^2 z} = \operatorname{tg}(z + \alpha) + \frac{1}{\cos(z + \alpha)}$$

односно када средимо

$$\frac{xz'}{\cos z} = \frac{\sin \alpha + \cos z}{\cos(z + \alpha)}.$$

Последњу једначину можемо да препишемо у облику

$$(7) \quad \frac{\cos \alpha dz}{\cos z + \sin \alpha} + \left(\frac{1}{\cos z} + \frac{1}{\cos z + \sin \alpha} \right) d(\cos z) = \frac{dx}{x};$$

одавде интеграцијом добијамо

$$(7) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2} + k}{\operatorname{tg} \frac{z}{2} - k \cos z + \sin \alpha} \frac{\cos z}{\cos z} = \frac{x}{C},$$

где је C интеграциона константа и $k = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$. Користењем идентитета $\sin \alpha = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)$, налазимо да је $k = \operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha/2)$ па (7) можемо преписати у облику

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{z}{2} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos z - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} \frac{\cos z}{\cos z} = \frac{x}{C}$$

или када извршимо одговарајуће идентичке трансформације и добијени резултат средимо

$$\frac{\cos z}{1 - \sin(z - \alpha)} = \frac{x}{C}.$$

Последњу једнакост можемо преписати у облику

$$1 = \frac{x}{C} \left(\frac{1}{\cos z} - \operatorname{tg} z \cos \alpha + \sin \alpha \right),$$

односно

$$C = x \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} - \operatorname{tg} z \cos \alpha + \sin \alpha \right).$$

или ако узмемо у обзир (6)

$$(8) \quad C = \sqrt{x^2 + y^2} - y \cos \alpha + x \sin \alpha.$$

Да бисмо утврдили какву криву другог реда представља добијена једначина (8) пређимо на поларне координате помоћу формула $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$ па ћемо добити

$$(8') \quad \rho = \frac{C}{1 - \sin(\alpha - \theta)}$$

а то је једначина параболе, тј. меридијански пресек фокусирајућег огледала је парабола.

Приметимо да је у [1] уместо једначине (8) добијена једначина четвртог степена да се из ње, преласком на поларне координате, добија и једначина (8').

Одредимо какав положај има парабола (8) у координатном систему. Препишимо једначину (8) у облику

$$(8'') \quad x^2 \cos^2 \alpha + xy \sin 2\alpha + y^2 \sin^2 \alpha + 2Cx \sin \alpha - 2Cy \cos \alpha - C^2 = 0$$

а затим је сведимо на канонски облик. Инваријантне криве (8''), у односу на трансформацију једног Декартовог правоуглог координатног система у други, гласе

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & C \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -C \cos \alpha \\ C \sin \alpha & -C \cos \alpha & -C^2 \end{vmatrix} = -C^2$$

Пошто је $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$ следи да је крива (8) парабола (што се слаже са претходно добијеним резултатом), па њена канонска једначина у "новом" правоуглом координатном систему $O_1 \xi \eta$ гласи

$$I_1 \xi^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \eta = 0.$$

односно

$$\xi^2 \pm 2C\eta = 0$$

или

$$(9) \quad \eta = \frac{\xi^2}{2C}.$$

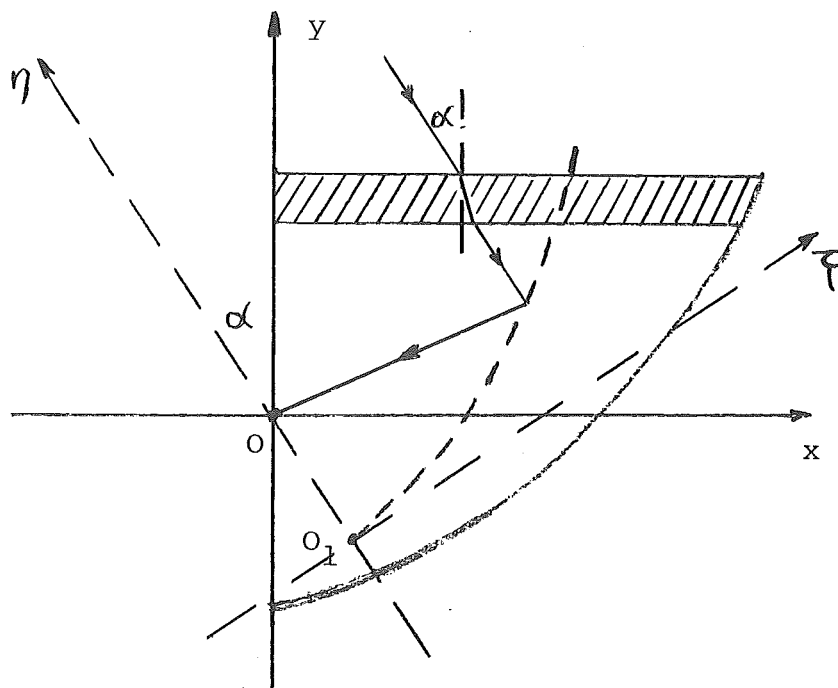
Испред корена смо узели знак минус, јер $C > 0$ а посматрана крива је конвексна.

Одредимо сада једначину осе симетрије криве (9), тј. једначину осе $O_1\eta$. Једначина поменуте осе у "старом" координатном систему Oxy гласи

$$a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{33}}{I_1} = 0.$$

односно

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0.$$



Сл.2

Решавајући систем који сачињавају једначина (6) и последња једначина налазимо координате тачке O_1 , тј. добијамо да је $O_1\left(\frac{C \sin \alpha}{2}, -\frac{C \cos \alpha}{2}\right)$. На сл.2 приказали су меридијански пресеци незаштићеног огледала (пуна линија) и заштићеног огледала (испрекидана линија).

Литература

- [1] Д.Димитровски, М.Мијатовић: Диференцијалне једначине проблема заштите Сунчаних колектора (предавање одржано на VI конференцији примењене математике), Тара 1986.
- [2] Р.Николић: Диференцијалне једначине Сунчаних колектора (магистарски рад), Приштина 1993.

Summary

Determination a equation of the focusing mirror protected by by transparent plane-parallel plate

In this paper, first of all, the equation

$$(4) \quad y = \frac{y'^2 - 2y'tg\alpha - 1}{y'^2 tg\alpha + 2y' - tg\alpha} x$$

of the meridian cross-section of the focusing mirror transparent by plane-parallel plate has been composed and solved.

The obtained result, i.e. the equation of the meridian cross-section of the focusing mirror

$$(8) \quad C = \sqrt{x^2 + y^2} - y \cos \alpha + x \sin \alpha$$

is parabola, and its canonical equation is

$$(9) \quad \eta = \frac{\xi^2}{2C}$$

This result is simpler than one obtained in [1]. The curve obtained in [1] is a curve of the fourth order.

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ПЛОСКОСТИ H_2

Ч. Доличанин , Г. Николич и М. Стефанович

Введение : Окружности и плоскости E_2 представлялись комплексными матрицами второго порядка [1], [2], [3], [4]. Здесь получены аналогичные результаты для циклов плоскости H_2 сформулированы в теореме 1.

Для изучения циклов плоскости H_2 , т.е. окружностей, эквидистант и орициклов этой плоскости, рассмотрим интерпретацию Пуанкаре плоскости H_2 на плоскости E_2 , при которой абсолют плоскости H_2 изображается единичной окружностью

$$z\bar{z} = 1 \quad (1)$$

плоскости E_2 . В этой интерпретации окружности плоскости H_2 изображаются окружностями, целиком лежащими внутри круга, ограниченными окружностью (1), орициклы - окружностями, лежащими внутри этого круга и касающимися окружности (1), а две другие эквидистанты изображаются той дугой окружности, пересекающейся с окружностью (1) которая находится внутри круга, ограниченного этой окружностью и той другой, которая получается из второй дуги окружности, пересекающейся с окружностью (1), инверсией относительно последней окружности. При этом прямые плоскости H_2 изображаются дугами окружностей ортогональными к окружности (1), а углы между циклами изображаются в натуральную величину, что относится также к мнимым углам.

1. Угол между циклами

Так угол между двумя циклами, изображающимися окружностями

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0 \quad (2)$$

$$A'z\bar{z} + B'z + C' = 0 \quad (3)$$

равни углу между этими окружностями, выражается по формуле

$$\cos \varphi = \frac{S_p(MM')}{2\sqrt{\text{Det}(MM')}} \quad (4)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{B} & -A \\ C & B \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M' = \begin{bmatrix} -\bar{B}' & -A' \\ C' & B' \end{bmatrix}$$

Матрицы составленные из коэффициентов уравнений (2) и (3), а $S_p X$ и $\text{Det } X$ следы определитель матрицы X .

Теорема 1. Условие того, что цикл плоскости H_2 изображаемый окружностью (2), является прямой линией этой плоскости имеет вид

$$A = C' \quad (5)$$

В самом деле прямые плоскости H_2 изображаются на плоскости E_2 окружностями ортогональными окружности (1), а условие ортогональности окружностей (2) и (1) плоскости E_2 имеет вид

$$\cos \varphi = 0$$

для угла φ между этими окружностями.

Так как для окружности (1)

$$A = -C' = 1, \quad B = 0$$

в силу формулы (4) это условие может быть записано в виде

$$S_p(MM') = C' - A = 0$$

т.е. в виде (5). Теорема доказана.

РЕЗИМЕ

Кругови равни E_2 представљени су у [1], [2], [3], [4] комплексним матрицама другог реда. У овом раду су добијени аналогни резултати за циклус равни H_2 . Један од добијених резултата формулисан је и доказан у теорему 1.

ABSTRACT

Circles in the plane E_2 are represented in [1], [2], [3] and [4] by complex second order matrices. In this paper are also given analogons results related to circles in the plane H_2 , one of which is formulated and proven through a theorem.

Литература

- [1] Розенфельд Б. А. : Многомерные пространства , Москва 1966.
- [2] Доличанин Ч. : Матричная теория кругов плоскости E_2 , "Мат. радови" , Приштина 1988.
- [3] G. Schwerdtfeger : Geometry of complex numbers , New York 1979.
- [4] Розенфельд Б. А. : Неевклидовы пространства , Москва 1969.

Мерење концентрације радона у становима

Б.Јакупи, П.Васић, Ф.Адровић
Природно-Математички факултет, Приштина

Мерење концентрације радона у становима на територији Приштине и њене ближе околине вршено је методом чврстих детектора трагова населектрисаних честица. Концентрација радона у становима града Приштине је испод 150 Bq/m^3 , док је у становима неких насељених места у њеној околини вредност концентрације радона између 150 Bq/m^3 и 750 Bq/m^3 .

Увод

Радон је радиоактиван гас који настаје у процесу распадања радиоактивних елемената урановог низа. Као гас у извесним количинама је увек присутан у атмосферском ваздуху. Његово присуство у ваздуху је различитог порекла али се сматра да највећим делом долази из дубине Земље. Због великог коефицијента дифузије и релативно великог времена полураспада од 3.8 дана продире кроз горње слојеве Земље и са дубине од неколико стотина метара. Овакав продор радона је интензивнији при повећаној сеизмичкој активности Земље. Концентрација радона у ваздуху зависи од низа геолошких и климатских фактора и различита је за различите регионе. Концентрација радона у урбаним срединама зависи од низа грађевинских фактора (начин градње, грађевински материјали и др.), па је различита за различите грађевинске објекте.

Мерење концентрације радона у објектима где људи бораве, а посебно у објектима становања, је у последње време веома актуелно јер је научно установљено да повећана концентрација радона у ваздуху повећава ризик од обољења рака на плућима.

Материјал и методе

Мерење концентрације радона вршено је методом чврстих детектора трагова населектрисаних честица. Ова метода мерења се заснива на мерењу густине трагова α -честица емитованих распадом радона. Концентрација радона преко густине трагова одређује се по формули:

$$C = \frac{\rho - \rho_0}{Kt}$$

где је ρ - густина трагова (број трагова на cm^2 детектора), ρ_0 - фон на детектору (број трагова на cm^2 детектора пре експонирања, K - одзив дозиметра на радон, тј. коефицијент чија вредност зависи од карактеристика дозиметра и детектора трагова α -честица и t -време експонирања детектора.

Мерење смо вршили са дозиметрима IJS из Љубљане у којима је био постављен пластични детектор трагова типа CP - 39.⁽¹⁾ Трагове α -честица на детектору трагова изазвали смо методом хемијског нагризања у 6.25 N (25%) раствору NaOH при температури од 70°C у трајању од 2-3 сата. На тај начин трагови α -честица на детектору се учине видљивим у оптичком микроскопу, помоћу кога се затим мери њихова густина са погодним увећањем. При наведеном режиму изазивања трагова коефицијент K за коришћени дозиметар је имао вредност $6.19 \text{ Tr;cm}^{-2}/\text{kBq;m}^{-3}\text{h}$.⁽²⁾

Резултати и дискусија

Резултати мерења су наведени у таб.1,2 и 3. Анализу и упоређивање наших резултата вршили смо на основу података које је објавила Америчка агенција за заштиту човекове околине (ЕРА), а према којима је средња годишња концентрација радона измерена у становима у Немачкој 40 Bq/m^3 . Измерене вредности концентрације радона у становима Приштина (таб.1) у просеку су приближне тој вредности. Међутим концентрација радона у становима Грачанице, Косова поља, Добротина и Ливића је знатно повећана и износи између 150 и 759 Bq/m^3 .

Табела 1. Концентрација радона у становима Приштина

Приштина				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr/cm}^2)$	C(Bq/m ³)
1.	63	102	683	73 ± 16
2.	61	70	468	52 ± 12
3.	59	62	412	47 ± 11
4.	62	75	506	55 ± 13
5.	62	38	257	28 ± 7
6.	62	59	396	43 ± 10
7.	62	63	423	46 ± 11
8.	63	47	318	34 ± 8
9.	67	92	617	62 ± 13
10.	62	130	870	93 ± 20
11.	67	104	694	70 ± 16
12.	60	40	267	30 ± 8
13.	60	33	233	25 ± 7
14.	61	32	213	24 ± 6
15.	60	159	1060	119 ± 26
16.	128	239	1590	84 ± 17
17.	128	34	228	12 ± 3
18.	65	98	653	68 ± 15
19.	65	50	336	35 ± 9

У таб. је : t-време експонирања детектора изражено у данима, N-број измерених трагова, ρ – густина трагова (број трагова по квадратном центиметру) и C - концентрација радона изражена у Бекерелима по кубном метру.

Ово истраживање, поред мерења концентрације, има за циљ и утврђивање узрока повећаној концентрацији радона. Предпостављамо да је основни узрок повећаној концентрацији радона у становима Грачанице тај што се у њеној непосредној близини налазе рудници Кишница и Ајвалија (рудници оловне и цинкане руде са јамском експлоатацијом).

Узрок повећаној концентрацији радона у становима Косова Поља могао би бити косовски лингит. Наиме, у неким нашим ранијим истраживањима установили смо да је у косовском лингиту повећан садржај урана. Станови у којима је вршено мерење концентрације радона налазе се близу површинског копа косовског лингита, а у непосредној близини насеља се налази и место где се

одлаже пенео сагорелог лигнита из термо електрана у Обилићу. Када се уз све то узме у обзир и велика количина чађи коју из својих димњака избацују термоелектране у Обилићу основано се може предпоставити да је узрок повећаној концентрацији радона у становима Косова Поља косовски лигнит.

Табела 2. Концентрација радона у становима Грачанице и Косова Поља

Грачаница				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr}/\text{cm}^2)$	C(Bq/m ³)
1.	30	102	681	153 ± 34
2.	63	376	2508	268 ± 54
3.	30	161	1096	246 ± 52
4.	79	368	2453	209 ± 42
5.	63	629	4193	448 ± 88
6.	30	226	1506	338 ± 70
7.	79	472	3145	268 ± 53
8.	63	662	4417	472 ± 92
9.	63	588	3921	419 ± 83
10.	63	220	1469	157 ± 33
11.	63	265	1769	189 ± 39
12.	63	214	1432	153 ± 32
Косово Поље				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr}/\text{cm}^2)$	C(Bq/m ³)
1.	62	196	1307	142 ± 30
2.	63	223	1486	159 ± 33
3.	64	631	4212	443 ± 87
4.	64	289	1930	203 ± 41
5.	64	219	1462	154 ± 32
6.	71	438	3186	302 ± 60
7.	71	793	5286	501 ± 97
8.	71	694	4626	438 ± 86

У таб. је : t-време експонирања детектора изражено у дашима, N-број измерених трагова, ρ – густина трагова (број трагова по квадратном центиметру) и C - концентрација радона изражена у Бекерелима по кубном метру.

Косовски лигнит би требао да буде основни узрок повећаној концентрацији радона и у селима Добротину и Ливађу.

Да би се избегле или барем ублажиле последице повећане концентрације радона треба предузети све мере како би се концентрација радона смањила на најмању могућу вредност. Према препорукама Америчке агенције за заштиту човекове околине треба настојати да се концентрација радона смањи на вредност до испод 150 Bq/m³.

У случајевима када је концентрација радона у становима између 750 и 7500 Bq/m³ треба обавестити надлежне органе како би се предузеле одговарајуће мере заштите од радиоактивног зрачења. У нашим досадашњим мерењима таквих случајева није било.

Таблица 3.

Гуштерица				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr}/\text{cm}^2)$	$C(\text{Bq}/\text{m}^3)$
1.	73	294	1960	180 ± 37
2.	73	123	820	85 ± 18
3.	73	275	1833	169 ± 34
4.	73	185	1233	114 ± 24
Доброти				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr}/\text{cm}^2)$	$C(\text{Bq}/\text{m}^3)$
1.	73	615	4100	378 ± 74
2.	73	708	4720	435 ± 85
3.	73	523	3486	321 ± 63
Ливађе				
Дет.бр.	t(D)	N	$\rho(\text{Tr}/\text{cm}^2)$	$C(\text{Bq}/\text{m}^3)$
1.	73	1527	10180	652 ± 126
2.	73	613	4086	261 ± 51

У таб. је : t-време експонирања детектора изражено у данима, N-број измерених трагова, ρ – густина трагова (број трагова по квадратном центиметру) и C - концентрација радона изражена у Бекерелима по кубном метру.

Аутори рада изражавају дубоку захвалност Др Радомиру Илићу и његовим сарадницима са Института "Ј.Стефан" у Љубљани, што су нам омогућили да користимо њихове дозиметре за мерење концентрације радона.

Summary

The measurment of the radon concentrartion in apartments on the teritory of Pristina and surroundings

B.Jakupi, P.Vasic, F.Adrovic

Faculty of Natural Sciences, Dpt. of Physics, Pristina

The measurment of the radon concentration in apartments on the teritory of Pristina and near surroundigs has been performed by the method of solid track detectors. The concentracton of radon in apartments in the town of Pristina has been below $150 \text{ Bq}/\text{m}^3$ while the value of radon concentrations in apartments in surrounding localities is between $150 \text{ Bq}/\text{m}^3$ and $750 \text{ Bq}/\text{m}^3$.

Литература

1. Sutej T., Krizman M. and Ilic R. *Passive Radon with Charcoal Collector and Etched Track Detector*. Slovenian Patent registret No. 25434/81, 1981.
2. Sutej T., Krizman M., and Ilic R. *A New Technique for Radon Measurments Based on Combination of Track - Etch Detector and Activited Chacoal*. Nucl. Tracks Radiat. Meas. 19(1-4). 423-424, (1991).

A note on the Frank model for chiral stereoselection

Ivan Gutman

*Faculty of Science, University of Kragujevac, P.O. Box 60,
Yu-34000 Kragujevac, Yugoslavia*

A problem considered in this paper is the possibility of spontaneous transition of racemic mixture (composed of equal amounts of two enantiomeric species, say L and D) into a monochiral state (in which only one enantiomer, say L, is present). Such transitions must have occurred within the physico-chemical processes by which life was formed on Earth. A plausible approach to this phenomenon is a model put forward by Frank, based on simple laws of chemical kinetics. In order to be able to solve the underlying system of differential equations, Frank made a drastic assumption, namely that the amount of achiral substrate from which the enantiomers L and D are formed is time-independent. In this paper we demonstrate that the basic features of the Frank model are maintained also if the amount of achiral substrate is allowed to be time-dependent.

Introduction

The chemical processes which could lead to the (spontaneous) formation of life in our planet are nowadays understood to a great extent [4,5,13,14]. One detail of these processes remains, however, not completely resolved. Namely, when complex chiral organic (bio)molecules are formed under conditions that existed on the surface of the prebiotic Earth, from simple substances such as H_2O , CO_2 , CH_4 , N_2 , NH_3 , HCN and similar, they necessarily appear as racemic mixtures. On the other hand, in the existing terrestrial living organisms one of the two possible enantiomeric forms of chiral biomolecules is present almost exclusively (in particular: D-carbohydrates and L-amino acids). These facts imply that within the physico-chemical processes by which life evolved on the Earth, there had to be a (spontaneous) transition of some racemic (or almost racemic) mixture into a monochiral (or almost monochiral) state. Numerous researches, both experimental and theoretical, are concerned with this problem (see [3,7,11,15] and the references quoted therein).

In 1953 Frank demonstrated [6] that the required transition could be a consequence of the basic law of classical chemical kinetics, namely the law of mass action. Frank designed a simple kinetic scheme by which an almost racemic mixture evolves into a completely monochiral terminal state. The present paper offers some observations on the Frank model and shows that it is more general than originally anticipated.

The Frank model

The model proposed by Frank [6] is based on the application of the law of mass action to the following elementary chemical reactions:



L and D are enantiomers capable of self-replications (reactions (α') and (α'')); A stands for an achiral substrate. The two enantiomers are supposed to eliminate each other from the system via the formation of an insoluble complex (reaction (β)). Observe that all the three elementary steps in the Frank model are assumed to be irreversible.

Applying the law of mass action to the reactions (α) and (β) and denoting by $n_x = n_x(t)$ the (time - dependent) concentration of the substance X, $X=L,D,A$, we readily arrive at the system of differential equations

$$dn_L/dt = k_1 n_A n_L - k_2 n_L n_D \quad (1')$$

$$dn_D/dt = k_1 n_A n_D - k_2 n_L n_D \quad (1'')$$

Here k_1 and k_2 are the rate constants of the reactions (α) and (β), respectively; the reactions (α') and (α'') are, of course, supposed to have equal rate constants. The initial conditions are $n_L = n_{LO}$; and $n_D = n_{DO}$; for $t = 0$. Without loss of generality, throughout this paper it will be assumed that $n_{LO} \geq n_{DO}$.

In order to be able to solve the differential equations (1) Frank made the assumption that the concentration n_A of the substrate A is time-independent. Needless to say that this assumption is not chemically sound, especially if one takes into account that n_L exponentially increase with time and becomes unboundedly large as $t \rightarrow \infty$.

If n_A is time-independent, then the system (1) can be solved as follows [6]. First subtract (1'') from (1') which results in

$$d(n_L - n_D)/dt = k_1 n_A (n_L - n_D)$$

Streightforward integration yields

$$n_L - n_D = (n_{LO} - n_{DO}) e^{k_1 n_A t}$$

Dividing (1') with (1'') one obtains

$$dn_L/dn_D = [n_L(k_1 n_A - k_2 n_D)]/[n_D(k_1 n_A - k_2 n_L)]$$

which makes possible to separate the variables n_L and n_D :

$$[(k_1 n_A - k_2 n_L)/n_L] dn_L = [(k_1 n_A - k_2 n_D)/n_D] dn_D$$

and then by direct integration:

$$k_1 n_A \ln(n_L/n_{LO}) - k_2 (n_L - n_{LO}) = k_1 n_A \ln(n_D/n_{DO}) - k_2 (n_D - n_{DO}) \quad (3)$$

Combining (2) and (3) one easily finds explicit analytical expressions for the functions $n_L(t)$ and $n_D(t)$:

$$n_L = n_{LO} (n_{LO} - n_{DO}) (n_{LO} - n_{DO} F)^{-1} e^{k_1 n_A t}$$

$$n_D = n_{DO} (n_{LO} - n_{DO}) F (n_{LO} - n_{DO} F)^{-1} e^{k_1 n_A t}$$

where

$$F = \exp \left[-(k_1 n_A / k_2)^{-1} (n_{LO} - n_{DO}) [\exp(k_1 n_A t) - 1] \right]$$

Simple analysis of eqs. (4) reveals that if at the initial moment the system is racemic, i.e. $n_{LO} = n_{DO}$, then it will remain racemic all the time. If, however, the initial state of the system deviates from racemity (containing an excess of, say, L over D, $n_L - n_D > 0$), then the system will reach a monochiral terminal state (in which only the L form is present whereas the D species have completely vanished). Such a time-evolution of the Frank system will take place no matter how small is the initial excess of one enantiomer.

A systematic and non-stochastic (yet very small) deviation from racemity must occur in the case of all chiral molecules as a consequence of the action of the so-called weak nuclear forces (in particular, of the so-called weak neutral currents): details on this matter can be found elsewhere [2,7,8,9,12,15,16]. Model calculations show that for typical biomolecules, $(n_{LO} - n_{DO})/n_{LO} \sim 10^{-17}$.

The Frank model with variable n_A

In the case when n_A is not a constant, the finding of the solution of the system (1) does not seem to be feasible. Nevertheless, it is possible to deduce the basic properties of this solution without knowing the actual forms of the functions $n_L(t)$ and $n_D(t)$.

First of all, instead of (2) we evidently have

$$n_L - n_D = (n_{LO} - n_{DO}) \exp \left[k_1 \int_0^t n_A dt \right] \quad (5)$$

Eq. (5) enables us to conclude about the behavior of the Frank model with variable n_A in the limit $t \rightarrow \infty$. Really, from the fact that for all values of t , the concentration $n_A(t)$ is necessarily non-negative, we see that for $t \rightarrow \infty$ the difference $n_L - n_D$ either (i) becomes unboundedly large or (ii) has a finite limit value. Evidently, case (ii) will occur only if the concentration of A vanishes for $t \rightarrow \infty$ or more precisely, if $\int_0^\infty n_A dt < \infty$.

In case (ii) $n_L - n_D \rightarrow \infty$ and consequently, $n_L \rightarrow \infty$. In view of the reaction (β) it must be $n_D \rightarrow 0$. Thus we arrive at the following result

Theorem 1. If $n_A(t)$ is an arbitrary function such that $n_A(t) \geq 0$ for $t > 0$, and if the integral $I_\infty = \int_0^\infty n_A dt$ exists, then the Frank model has (i) a strictly monochiral terminal state, provided $I_\infty = \infty$, or (ii) a terminal state in which the two enantiomers are both present, but in unequal amounts, provided $I_\infty < \infty$. These excess of the dominant enantiomer exponentially increases with I_∞ .

On the chiral polarization if the Frank model

The chiral polarization of a system containing enantiomeric species L and D is defined as [1,10]

$$\eta = (n_L - n_D) / (n_L + n_D).$$

The dimensionless quantity has the convenient property that its value is zero for racemic, and unity for monochiral states of the system considered. In systems in which chemical reactions take place, η is time-dependent. Its derivate with respect to t satisfies

$$d\eta/dt = 2(n_D dn_L/dt - n_L dn_D/dt) / (n_L + n_D)^2 \quad (6)$$

Substituting eqs. (1) back into (6) we obtain

$$d\eta/dt = 2k_2 n_L n_D (n_L - n_D) / (n_L + n_D)^2$$

and by taking into account eq. (5),

$$d\eta/dt = 2k_2 n_L n_D (n_{LO} - n_{DO}) \exp \left[k_1 \int_0^t n_A dt \right] / (n_L + n_D)^2 \quad (7)$$

If $n_{LO} - n_{DO} > 0$, then the right hand side of eq. (7) is necessarily positive for all $t > 0$. We thus obtain the following result.

Theorem 2. If $n_A(t)$ is an arbitrary function such that $n_A(t) \geq 0$ for $t > 0$, and if $n_{LO} - n_{DO} > 0$, then the chiral polarization monotonously increases for all $t > 0$.

Observe that the statement of Theorem 2 is independent of the actual numerical values of the parameters k_1, k_2, n_{LO} ; and n_{DO} . Also observe that Theorem 1 implies that for $t \rightarrow \infty$, the limit value of η is either unity (if $I_\infty = \infty$), or less than unity (if $I_\infty < \infty$).

Concluding remarks

In this paper we showed that the basic properties of the Frank model are maintained for a very general class of functions $n_A(t)$. Namely, a completely monochiral terminal state is achieved if and only if the integral $\int_0^\infty n_A dt$ unboundedly increases for $t \rightarrow \infty$. This, in particular, happens when n_A is a constant - as in the original

formulation of the Frank model. However, for the success of the Frank model the choice of constant n_A is not at all necessary.

In the case of time-dependent n_A it is no more easy to find explicit expressions for the function $n_L(t)$ and $n_D(t)$. In this paper we show how this obstacle can be overcome and how the basic features of the Frank model can be established without knowing the form of the solution of the respective system of differential equations.

References

- [1] V.A.Avetisov, V.V.Kuz'min, S.A.Anikin, *Sensitivity of chemical chiral systems to weak asymmetric factors*, *Chem.Phys.* 112 (1987) 179-187.
- [2] V.Babovic, I.Gutman, S.Jokic, *Origin of biomolecular chirality. Analysis of Frank's model*, *Z.Naturforsch.* 42a (1987) 1024-1026.
- [3] M.de Min, G.Levy, J.C.Micheau, *Chiral resolutions, asymmetric synthesis and amplification of enantiometric excess*, *J.Chim.Phys.* 85 (1988) 603-619.
- [4] A.Eschenmoser, E.Loewenthal, *Chemistry of potentially prebiological natural products*, *Chem.Soc.Rev.* 21 (1992) 1-16.
- [5] J.P.Ferris, W.J.Hagan, *HCN and chemical evolution. The possible role of cyano compounds in prebiotic synthesis*, *Tetrahedron* 40 (1984) 1093-1120.
- [6] F.C.Frank, *On spontaneous asymmetric synthesis*, *Biochim. Biophys. Acta* 11 (1953) 459-463.
- [7] V.I.Goldanskii, V.V.Kuz'min, *Spontaneous mirror symmetry breaking in nature and the origin of life*, *Z.Phys.Chem. (Leipzig)* 269 (1988) 216-274.
- [8] I.Gutman, *Factors determining the direction of the stereoselection process in the generalized Frank model*, *J.Math.Chem* 3 (1989) 343-355.
- [9] I.Gutman, V.Babovic, S.Jokic, *The origin of biomolecular chirality; the generalized Frank model with arbitrary initial conditions*, *Chem.Phys.Letters* 144 (1988) 187-190.
- [10] I.Gutman, D.Todorovic, *The critical time in Frank's chiral amplification model*, *Chem.Phys.Letters* 195 (1992) 62-66.
- [11] S.F.Mason, *Molecular Optical Activity and the Chiral Discrimination*, Cambridge Univ.Press, Cambridge 1982.
- [12] S.F.Mason, *Biomolecular homochirality*, *Chem.Soc.Rev.* 17 (1988) 347-359.
- [13] S.F.Mason, *Chemical Evolution*, Clarendon Press, Oxford 1991.
- [14] S.L.Miller, *Production of some organic compounds under possible primitive Earth conditions*, *J.Am.Chem.Soc.* 77 (1955) 2351-2361.
- [15] M.Quack, *Structure and dynamics of chiral molecules*, *Angew. Chem. Int.Ed.Engl.* 28 (1989) 571-586.
- [16] K.Tennakone, *Biochemical L-D stereoselection by weak neutral currents. A mathematical model*, *Chem. Phys. Letters* 105 (1984) 444-446.

Извод

Белешка о Франковом моделу за хиралну стереоселекцију

Иван Гутман

Природно-математички факултет у Крагујевцу

У раду се разматра проблем спонтаног прелаза једног физичко-хемијског система из стања рацемске смеше (која се састоји из једнаких количина двају енантиомерних једињења, рецимо Л и Д) у монохирално стање (где је присутан само један од енантиомера, рецимо Л). Овакви прелази су се морали спонтано догађати у оквиру физичко-хемијског процеса који су довели до живота на Земљи. Због тога је изучавање ове појаве од значаја за настојање да се разуме, а једног дана и лабораторијски да се репродукује, спонтани настанак живе материје.

Један плаузибилни приступ објашњењу спонтаног преласка из рацемског у монохирално стање предложио је Франк 1953. године. Његов модел се заснива на примени закона о дејству маса, дакле на законитостима од раније добро познатим у хемијској кинетици.

Диференцијалне једначине које описују динамику Франковог процеса могу се решити само ако се предпостави да се концентрација ахиралног супстрата А (из којег се стварају енантиомери Л и Д) не мења са временом. То је једна драстична апроксимација која је у контрадикцији са хемијским процесима на којима се заснива Франков модел.

У овом раду је показано да су главне одлике Франковог модела задржане и ако се дозволи да се концентрација ахиралног супстрата мења током времена. Нађени су нижни и довољни услови под којима Франков модел са променљивом концентрацијом супстрата доводи до хиралне стереоселекције. Ако са $n_A(t)$ означимо концентрацију супстанце А у тренутку t , онда ће до хиралне стереоселекције доћи ако и само ако интеграл $\int_0^t n_A(t) dt$ постаје бесконачно велик када $t \rightarrow \infty$.